

正会員 ○ 川上 洵 (秋田大学)  
 " 加賀谷 誠 ( " )  
 " 徳田 弘 ( " )

1 まえがき

鉄筋コンクリート曲線部材に曲げのみが作用するときの弾性解析は、B. Topaloff<sup>1)</sup>や R. H. Dawoud<sup>2)</sup>らの研究にみられ、ラーメン隅角部や曲率の大きいアーチ構造を対象として応力解析を行い、曲率の応力に及ぼす影響や直線部材の応力等との比較がなされている。しかし、これらの結果は、極限強度解析による検討を要することが指摘されている。本研究は、B. Topaloffの弾性解析を極限強度解析へと発展させ、ひびわれ曲げモーメントおよび破壊曲げモーメントを明らかにし弾性解析の評価を行い、さらに、曲げと軸力が作用するときの破壊曲線をもとめ、直線部材の結果との比較を行ったものである。

2 応力とひずみ

弾性理論による応力解析は、一般に直線部材の場合と同様に、次の仮定を設け、記号は図-1のとおりである

①コンクリートおよび鉄筋の応力-ひずみ関係は、弾性

域においてフックの法則にしたがう

②平面保持の仮定が成り立つ

③コンクリートの引張抵抗は、無視する。

図-1において、ひずみおよび応力は、次のとおりである。

$$\epsilon = \frac{y}{r} \frac{d\varphi}{2} = \frac{y}{r} \frac{d\varphi}{\varphi} \quad 1)$$

$$\sigma = E\epsilon = E \frac{y}{r} \frac{d\varphi}{\varphi} \quad 2)$$

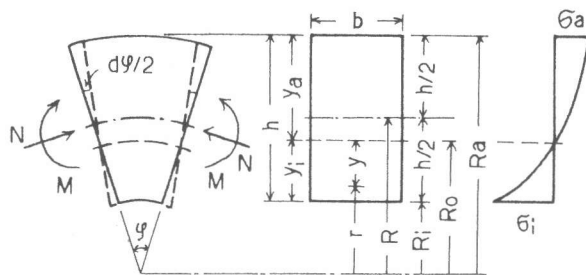


図-1 曲線部材断面の変形と応力

ここで、 $y$  は、中立軸から任意の点までの距離、 $r$  は、曲率の中心から任意の点までの距離である。また、曲線部材の中心に近い内側のコンクリートが圧縮となる曲げモーメントが作用するときを Case A、逆に、外側のコンクリートが圧縮となる曲げモーメントが作用するときを Case B とし、軸力に対しては、軸圧縮力を正、軸引張力を負とする。応力やひずみに添字があるとき、 $c$  はコンクリートを、 $s$  は鉄筋を示す。

3 ひびわれ発生モーメント

図-2は、Case Aのひびわれ直前の応力状態を示す。ひびわれ直前の引張部コンクリートは、塑性変形するから仮定の①、③は用いず、コンクリートの引張部に関する応力-ひずみ関係は、二次放物線と矩形の組合せを仮定する。そのとき引張塑性係数を $\gamma_t$ 、曲げ引張極限ひずみを $\epsilon_{ct}^*$ 、コンクリートの引張強度 $\sigma_{ct}^*$ とする。中立軸より

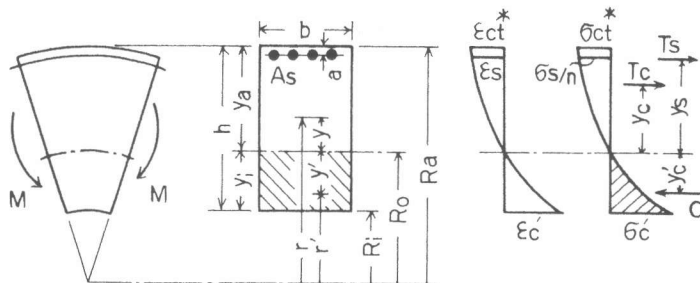


図-2 ひびわれ発生時の応力状態

任意の距離でのひずみを $\epsilon_{cy}^*$ 、コンクリートの引張縁におけるひずみを $\epsilon_{ct}^*$ とおくと、その比 $z$ は、

$$\epsilon_{cy} / \epsilon_{ct}^* = (y/r) / (ya/Ra) = Ra/ya (1 - Ro/r) = z \quad 3)$$

であり、そのとき応力分布は、次式のように示される。  $\sigma_{cy} / \sigma_{ct}^* = 1 \quad (z = \gamma_t \sim 1)$  4)

$$\sigma_{cy} / \sigma_{ct}^* = \epsilon_{cy} / \gamma_t \epsilon_{ct}^* (2 - \epsilon_{cy} / \gamma_t \epsilon_{ct}^*) = \frac{1}{\gamma_t} (2z - z^2 / \gamma_t) \quad (z = 0 \sim \gamma_t) \quad 5)$$

図-2より、コンクリートの圧縮力 $C$ は、 $C = \int_{Ri}^{Ro} \sigma_{cy} dF = E_c \epsilon_{ct}^* b \int_{Ri}^{Ro} \frac{RaRo}{(h-yi)} \{ -yi/Ro - \log(1 - yi/Ro) \}$  6)

また、コンクリートの引張力 $T_c$ は、 $T_c = \int_{Ro}^{Ra} \sigma_{cy} dF = \sigma_{ct}^* b \left( \int_0^{\gamma_t} \frac{1}{\gamma_t} (2z - z^2) \frac{RoRa\gamma_a}{(Ra - y_a z)^2} dz + \int_{\gamma_t}^1 \frac{RoRa\gamma_a}{(Ra - y_a z)^2} dz \right)$

$$= \sigma_{ct}^* b R_a \frac{(1-\gamma_t) y_a}{(R_a - \gamma_t y_a)} + \sigma_{ct}^* b \frac{R_o R_a}{\gamma_t} \left[ \frac{2}{y_a} \left\{ \log \left( 1 - \frac{\gamma_t y_a}{R_a} \right) + \frac{\gamma_t y_a}{(R_a - \gamma_t y_a)} \right\} + \frac{1}{\gamma_t y_a} \left\{ \frac{-2 \gamma_t R_a y_a + \gamma_t^2 y_a^2}{R_a - \gamma_t y_a} - 2 R_a \log \left( 1 - \frac{\gamma_t y_a}{R_a} \right) \right\} \right] \quad (7)$$

鉄筋の引張力  $T_s$  は,  $T_s = \sigma_s \cdot A_s = E_s \epsilon_s \cdot p b h = E_s \frac{(y_a - a)}{(R_a - a)} \epsilon_{ct}^* p b h$  (8)

また, 力の釣合いは,  $C = T_c + T_s$  (10) であるから式10より中立軸の位置が決定され, そのときのひびわれ発生モーメントは,

$$M_{cr} = C \cdot y_c' + T_c y_c + T_s y_s \quad (11)$$

で与えられる。ここで  $y_c' = \frac{1}{C} E_c \epsilon_{ct}^* b \frac{R_i}{h - y_a} \left[ -R_o y_a + \frac{1}{2} y_a^2 + R_o^2 \log \left( 1 + \frac{y_a}{R_o} \right) \right]$  (12)

$$y_c = \frac{\sigma_{ct}^*}{T_c} b R_i \left[ y_i^2 (1 - \gamma_t) \frac{(R_i \gamma_t + R_i + 2 \gamma_t y_i)}{2 (R_i + \gamma_t y_i)} + \frac{R_o^2}{\gamma_t} \left\{ \frac{-6 R_i - 13 R_i \gamma_t y_i - 8 \gamma_t^2 y_i^2}{2 y_i (R_i + \gamma_t y_i)^2} + \frac{3 R_i + 2 \gamma_t y_i}{\gamma_t y_i^2} \log \left( 1 + \frac{\gamma_t y_i}{R_i} \right) \right\} \right]$$

一方, Case B に関しても同様に,  $C, T_c, T_s$  を求めた後, 釣合いより中立軸の位置が決まりさらに, ひびわれ発生モーメントを得ることができる。

#### 4 破壊曲げモーメント

曲線部材の破壊曲げモーメントは, 弾性理論の仮定のかえて, コンクリートに関する応力-ひずみ関係は, 図-4 のような, 放物線と矩形(a)または falling - branch のある放物線と台形(b)の組合せを, そして鉄筋に関するそれは, 完全弾塑性体を仮定する。図中,  $\gamma$ : 圧縮塑性係数,  $\sigma_c^*$ : コンクリートの圧縮強度,  $\epsilon_c^*$ : 曲げ圧縮極限ひずみである。図-4 において, 任意の点のひずみ  $\epsilon_{cy}$  と圧縮縁におけるひずみ  $\epsilon_c^*$  との比を  $z$  とおくとひずみに対応する応力度の比は,

$$\sigma_{cy} / \sigma_c^* = 1 \quad (z = \gamma \sim 1)$$

$$\sigma_{cy} / \sigma_c^* = \epsilon_{cy} / \gamma \epsilon_c^* (z - \frac{\epsilon_{cy}}{\gamma \epsilon_c^*}) = \frac{1}{\gamma} (2z - \frac{z^2}{\gamma}) \quad (z = 0 \sim \gamma)$$

であり, これより, 圧縮力  $C$  は,  $C = \int_{R_i}^{R_o} \sigma_{cy} dF = \sigma_c^* b \left( \int_{\gamma}^1 \frac{R_o R_i y_i}{(R_i + y_i z)} dz + \int_0^{\gamma} \frac{1}{\gamma} (2z - \frac{R_o R_i y_i}{(R_i + y_i z)}) dz \right)$  (13)

$$= \sigma_c^* b p_i \frac{(1-\gamma) y_i}{R_i + \gamma y_i} + \sigma_c^* b \frac{R_o R_i}{\gamma} \left[ \frac{2}{\gamma} \left\{ \log \left( 1 + \frac{\gamma y_i}{R_i} \right) - \frac{\gamma y_i}{(R_i + \gamma y_i)} \right\} - \frac{1}{\gamma y_i} \left\{ \frac{\gamma^2 y_i^2 + 2 R_i \gamma y_i}{R_i + \gamma y_i} - 2 R_i \log \left( 1 + \frac{\gamma y_i}{R_i} \right) \right\} \right] \quad (13)$$

また, 引張力  $T$  は,  $T_s = A_s \sigma_s$  である。いま,  $p = A_s / b h$  とおくと  $T = p b h \sigma_s$  であり, 釣合い式は,  $C = T$  (14) である。鉄筋が降伏すると同時にコンクリート圧縮部が破壊するとき,

$$\epsilon_c^* = \frac{y_i}{R_i} \frac{d\varphi}{\varphi}, \quad \epsilon_s^* = \frac{y_a}{R_a} \frac{d\varphi}{\varphi} \quad \text{より} \quad y_i = \frac{h}{\frac{R_a}{R_i} \frac{\epsilon_s^*}{\epsilon_c^*} + 1} \quad (15)$$

なる中立軸の位置で, この式 15) を 14) へ代入して求まる  $p$  が  $p'$  (つりあい鉄筋比) である。そのとき, 破壊曲げモーメントは,  $M_B = C (h - y_i + y_c)$  (16)

であり, ここで,

$$y_c = \frac{1}{C} \int_{R_i}^{R_o} \sigma_{cy} y dF = \frac{1}{C} \sigma_c^* b R_i y_i^2 (1 - \gamma) \frac{(R_i + R_i \gamma + 2 \gamma y_i)}{2 (R_i + \gamma y_i)^2} + \frac{1}{C} \sigma_c^* b \frac{R_o^2 R_i}{\gamma} \left\{ \frac{-6 R_i^2 + 13 R_i \gamma y_i + 8 \gamma^2 y_i^2}{2 (R_i + \gamma y_i)^2 y_i} + \frac{3 R_i + 2 \gamma y_i}{\gamma y_i^2} \log \left( 1 + \frac{\gamma y_i}{R_i} \right) \right\} \quad (17)$$

一方,  $p < p^*$  のとき式 14) において  $\sigma_s = \sigma_s^*$  とおき,  $p > p^*$  のとき  $\sigma_s = E_s \epsilon_s = E_s \epsilon_c^* \frac{R_i (h - y_i)}{R_a y_i}$  とおくことにより, トライアル法により中立軸の位置  $y_i$  を決定し, また, 式 16) より破壊曲げモーメントが求められる。

次に, 応力-ひずみ関係が(b)の場合では, 応力分布は, 次式で示され

$$\sigma_{cy} / \sigma_c^* = 1 + \frac{\delta \gamma}{1 - \gamma} - \frac{\delta}{1 - \gamma} z \quad (z = \gamma \sim 1)$$

$$\sigma_{cy} / \sigma_c^* = \frac{1}{\gamma} (2z - \frac{z^2}{\gamma}) \quad (z = 0 \sim \gamma)$$

$\delta$  の係数の項が(a)の場合と異なる。これより(b)の場合の圧縮力  $C'$  は,

$$C' = C + \sigma_c^* b R_i \delta \left[ \frac{\gamma}{R_i + \gamma y_i} y_i + \frac{R_o}{(1 - \gamma) y_i} \left\{ \log \frac{R_i + \gamma y_i}{R_o} + \frac{R_i (1 - \gamma) y_i}{R_o (R_i + \gamma y_i)} \right\} \right]$$

となり, また, 釣合いは,  $C' = T$  である。また, 破壊モーメントも式 16)

において  $C \rightarrow C'$  とし, また,  $y_c$  にかえ次の  $y_c'$  を用いればよい。

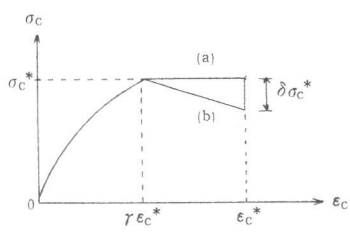


図-4 応力-ひずみ関係図

$$y_c' = \frac{1}{C'} \sigma_c^* b R_i \left[ \left\{ 1 - (1 - \delta) \gamma \right\} y_i^2 \frac{(R_i \gamma + R_i + 2 \gamma y_i)}{2 (R_i + \gamma y_i)^2} + \frac{R_o^2 \delta}{(1 - \gamma) y_i} \left\{ (1 - \gamma) R_i y_i \frac{(2 R_i^2 + 3 R_i (1 + \gamma) y_i + 4 \gamma y_i^2)}{2 R_o^2 (R_i + \gamma y_i)^2} + \log \frac{R_i + \gamma y_i}{R_o} \right\} + \frac{R_o^2}{\gamma} \left\{ \frac{-6 R_i^2 + 13 R_i \gamma y_i + 8 \gamma^2 y_i^2}{2 (R_i + \gamma y_i)^2 y_i} + \frac{3 R_i + 2 \gamma y_i}{\gamma y_i^2} \log \left( 1 + \frac{\gamma y_i}{R_i} \right) \right\} \right]$$

とおけば, あとは同様であり, また, Case B についても同様に破壊曲げモーメントを決定することができる。

5 曲げと軸力をうけるときの極限強度解析

5.1 無筋コンクリート断面

図-5において、無筋コンクリート断面は、 $A_s=0$ ，つまり  $T=0$  のときである。そのとき、添字0をつける、  
 水平力の釣合いは、 $N_0=C$  (18)

図心位置でのモーメントの釣合いは、  
 $M_0=C \left\{ \frac{h}{2} - (y_1 - y_c) \right\}$  (19)

ここで、 $C$ は、式13により、 $y_c$ は、式17により与えられる。また、図-6のように中立軸の位置が断面内にないとき<sup>3</sup>  
 水平力の釣合いは、

$$N_0=C=\int_{R_i}^{R_a} \sigma_{cy} dF = \bar{\alpha} \sigma_c^* b y_i \quad (20)$$

ただし

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} = & R_o R_i \left\{ \frac{2}{\gamma y_i^2} \left\{ -\frac{\gamma y_i}{R_i + \gamma y_i} + \log \left( 1 + \frac{\gamma y_i}{R_i} \right) \right\} \right. \\ & - \frac{1}{\gamma^2 y_i^2} \left\{ \frac{2 R_i \gamma y_i + \gamma^2 y_i^2}{R_i + \gamma y_i} - 2 R_i \log \left( 1 + \frac{\gamma y_i}{R_i} \right) \right\} \\ & + \frac{(1-\gamma)}{R_o (R_i + \gamma y_i)} - \left( \frac{2}{\gamma y_i^2} \left\{ -\frac{u}{R_i + u} + \log \left( 1 + \frac{u}{R_a} \right) \right\} \right) \right. \\ & \left. + \frac{R_i}{\gamma^2 y_i^2} \left\{ \frac{-u^2 - 2u R_a}{R_a (R_a + u)} + 2 \log \left( 1 + \frac{u}{R_a} \right) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

また、中位軸の位置でのモーメント  $M'$ は、 $M' = \int_{R_i}^{R_a} \sigma_{cy} y dF = \bar{\alpha} \sigma_c^* b y_i^2 \{ 1 - \bar{\beta} \}$

心位置でのモーメントは、 $M_0 = \bar{\alpha} \sigma_c^* b y_i^2 \left( \frac{h}{2 y_i} - \bar{\beta} \right)$  (22)

ただし  $\bar{\beta} = \frac{R_o R_i^2}{\bar{\alpha}} \left\{ \frac{\gamma}{R_i (R_i + \gamma y_i)} + \left( \frac{1}{\gamma^2} + \frac{2}{\gamma} \right) \frac{1}{y_i^2} \left\{ \frac{2 R_i \gamma y_i + 3 \gamma^2 y_i^2}{2 (R_i + \gamma y_i)^2} - \log \left( 1 + \frac{\gamma y_i}{R_i} \right) \right\} \right. +$   
 $\frac{1}{\gamma^2 y_i^2} \left\{ \frac{6 R_i^2 \gamma y_i + 9 R_i \gamma^2 y_i^2 + 2 \gamma^3 y_i^3}{2 (R_i + \gamma y_i)^3} - 3 R_i \log \left( 1 + \frac{\gamma y_i}{R_i} \right) \right\} - \frac{(1-\gamma)^2}{2 R_o (R_o + \gamma y_i)^2} -$   
 $-\frac{1}{\gamma} \left( \frac{u}{y_i} \right)^2 \frac{1}{R_i (R_a + u)^2} - \left( \frac{1}{\gamma^2} + \frac{2}{\gamma} \right) \frac{1}{y_i^2} \left\{ \frac{u (2 R_a + 3 u)}{2 (R_a + u)^2} - \log \left( 1 + \frac{u}{R_a} \right) \right\}$   
 $\left. - \frac{R_i}{\gamma^2 y_i^2} \left\{ \frac{u (6 R_a^2 + 9 R_a u + 2 u^2)}{2 (R_a + u)^2 R_a} - 3 \log \left( 1 + \frac{u}{R_a} \right) \right\} \right\}$  (23)

5.1 単鉄筋および複鉄筋断面

一定の鉄筋により無筋コンクリートを補強した場合、極限状態における断面のひずみ分布は一定であり、したがってコンクリートによる抵抗も一定であるから、単鉄筋および複鉄筋断面の耐力の増減は、鉄筋量にのみ依存する。それゆえに、一般に耐力は、無筋コンクリートとしての抵抗と鉄筋による抵抗の和からなる。無筋コンクリート断面の軸力  $N_0$  曲げモーメント  $M_0$  とすると、引張鉄筋のみの補強のとき  $N = N_0 - p b h \sigma_s$

$M = M_0 + \frac{p b h^2}{2} \sigma_s$ ， また、圧縮鉄筋のみの補強のとき、 $N = N_0 + p' b h \sigma_s$ ，  $M = M_0 + \frac{p' b h^2}{2} \sigma_s$  である。

中立軸の位置が断面内にないとき、引張鉄筋では、 $N = N_0 + p b h \sigma_s$ ，  $M = M_0 - \frac{p b h^2}{2} \sigma_s$  であり  
 圧縮鉄筋では、 $N = N_0 + p' b h \sigma_s$ ，  $M = M_0 + \frac{p' b h^2}{2} \sigma_s$

である。さらに、複鉄筋断面は、無筋コンクリート断面を引張および圧縮鉄筋で補強した場合で、図-7に示されるとおりであり、その破壊時の軸力、曲げは、 $p + p' = p_t =$ 一定と考え、引張鉄筋比を  $p = \zeta p_t$  とすると圧縮鉄筋比  $p'$  は  $p' = (1 - \zeta) p_t$  で与えられ、前述の単鉄筋断面の組合せより決定される。

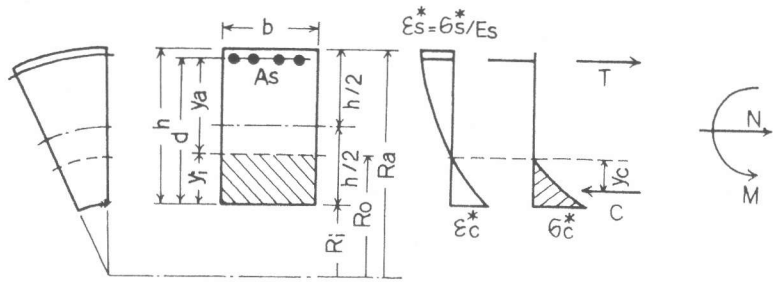


図-5 曲げと軸力をうける単鉄筋断面

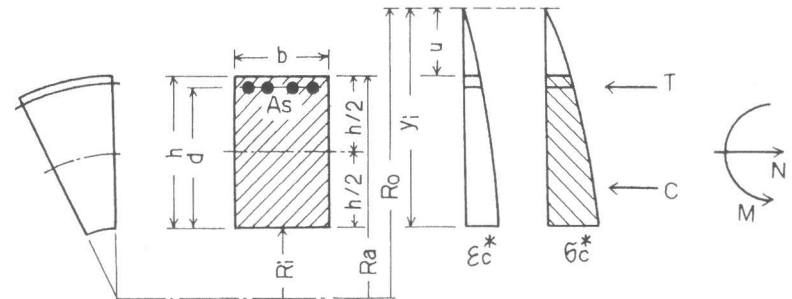


図-6 曲げと軸力をうける単鉄筋断面

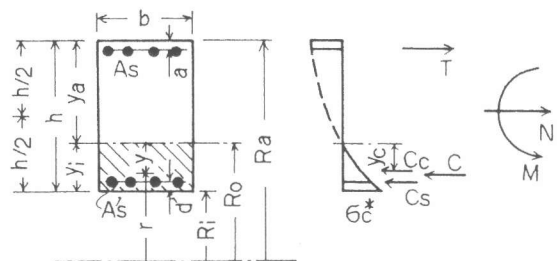
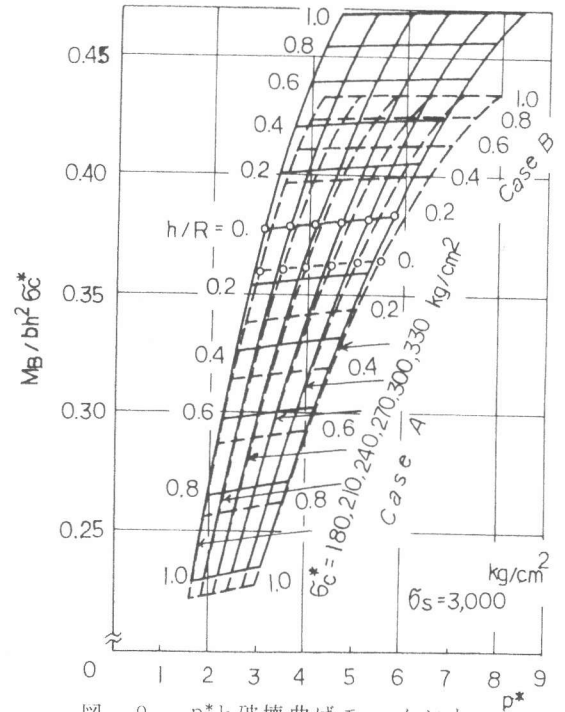
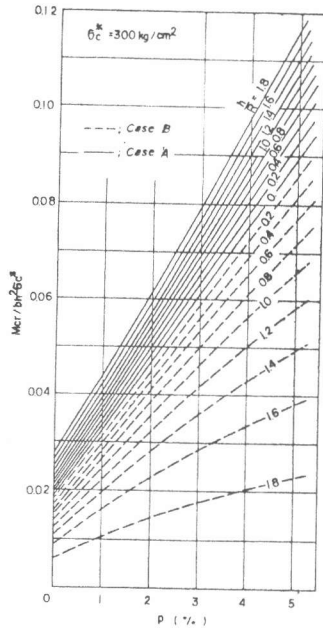


図-7 曲げと軸力をうける複鉄筋断面

6 数値計算結果

図一8は、鉄筋比とひびわれ発生モーメント，図一9は、つりあい鉄筋比と破壊曲げモーメントの関係を示したものである。両図において  $h/R=0$  が直線部材であり Case A と Case B は、この上下に  $h/R$  の変化にともない分布している。図一9において (a), (b)の応力-ひずみ関係による差異は、ごく小さいことがわかる。また、図一10は複鉄筋断面の破壊曲線である。領域Iは、無筋コンクリートとして抵抗できる範囲、領域IIは

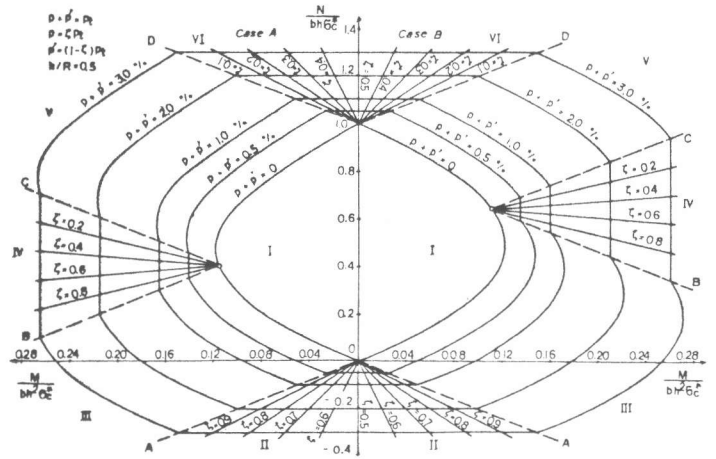


Case Aでは、下縁に、Case Bで 図一8 pとひびわれモーメント

図一9 p\*と破壊曲げモーメント

は、上縁に引張応力度が生ずる範囲、領域IIIは、鉄筋が降伏した後に破壊する範囲、領域IVは、複鉄筋として効果が期待できる範囲、領域Vは、破壊時に圧縮鉄筋が降伏している範囲、領域VIは、全断面が圧縮されて破壊する範囲である。複鉄筋とした効果は、II, IV, VIにみられ、特に単鉄筋のものに比べ領域IVの軸力、曲げの増加が顕著であり、 $\zeta$ が減少すなわち引張鉄筋量が減少し圧縮鉄筋が増加するほどその傾向は大きい。また、領域IIにおいては、軸引張力に対し鉄筋のみが抵抗し、領域VIにおいては、軸圧縮力に対し、コンクリートの全断面が $\sigma_c^*$ となり、加えて鉄筋が抵抗する場合であるから

$\zeta = 0.5$  で Case A と Case B は、一致する。  
本例では、曲げ圧縮極限ひずみ  $\epsilon_c^* = 0.24 + 0.0001 \sigma_c^*$  (%)<sup>4</sup> を用い、 $h/R = 0.5$ ,  $\sigma_s^* = 3,000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_c^* = 300 \text{ kg/cm}^2$  に対するものであるが、 $\epsilon_c^* = 0.35\%$  を用いるとその破壊曲線は、本図よりわずかに軸力が増加し、領域IIIの範囲が拡大する傾向となる。また、無筋コンクリートの場合に対し  $h/R$  を変化させると、破壊曲線は、Case Aでは、 $h/R = 0$  から増加するにしたがい内側に、Case Bでは、外側つまり、軸力、曲げとも増加する傾向となる。



図一10 複鉄筋断面の破壊曲線

7 あとがき

鉄筋コンクリート曲線部材が、曲げおよび曲げと軸力をうけるときの極限強度解析を行い、若干の結果を示したが、これらの結果を用いた、断面設計および実験による検証は、目下、継続中である。

参考文献

- 1) B. Topaloff; Berechnung des gekrümmten Stahlbetonbalkens, Beton und Stahlbetonbau, Heft 5. 1960
- 2) R.H. Dawoud, et al; Flexural stresses in rectangular reinforced concrete curved members, ACI Jour. March 1970
- 3) 角田与史雄; 鉄筋コンクリート部材の諸性状—曲げおよび曲げ圧縮—, コンクリートライブラリー 34号 1975
- 4) 横道英雄, 藤田嘉夫, 鉄筋コンクリート工学 共立出版 1971