

[83] 確率過程理論に基づいたコンクリートの疲労に関する理論的研究

和泉正哲（東北大学）

正会員 ○三橋博三（東北大学）

1. はじめに

コンクリートは、建設工学上最も重要な構造材料の1つであり、その力学的性状に関する研究の歴史は古い。コンクリートの破壊強度に関する既往の研究も極めて数多いが、それ等の多くは主に破壊現象の断片的な観察に止どまっており、各々限られた条件下で適用可能な数々の実験式が提案されてきた。近年になって構造物の大型化・特殊化に伴い新たな条件下での設計が求められ、複合応力下での破壊条件式等に関して目覚ましい発展が見られる。また電子顕微鏡等観察技術の進歩によってセメント結晶構造の特性等に関する研究の進展も急速である。しかしながら、此等所謂巨視的レベルでの研究成果と微視的レベルでの研究成果を結びつけ得る研究方法は未だ確立されていない。一方、コンクリートはその内部構造上高度に非均質な材料であり、作用応力の種類によって大きく異なった破壊性状を示すのみならず、その力学的性状は環境条件あるいは作用応力の時間特性によっても影響を受ける事は広く知られている。従って、この様な数多くの要因が影響し合う実働荷重下でのコンクリートの力学的性状を実験的にのみ研究する事は極めて困難である。

本研究は、以上の2点を踏まえて、コンクリート材料内部の微視的構造・準微視的クラック進展挙動と巨視的な力学的性状を一つの理論の中に統一的に結びつけ得る様な破壊理論の確立を目指している。筆者等は、破壊進展過程の時間的ランダム性及び骨材や空隙等の介在物によって引起される局所応力分布の幾何学的ランダム性の双方を取り入れた確率過程理論に基づくコンクリートの破壊理論を既に報告している。^{1), 2), 3)} その結果、破壊強度の載荷速度依存性、温度依存性、寸法効果、内部の非均質性と強度の変動特性の関係等が理論的に説明された。これまで荷重条件としては単調増加荷重のみを取扱ったのに対し、本報では時間依存型の荷重条件、即ち持続載荷及び繰返し載荷の場合について報告する。前者の条件下では所謂静的疲労現象が生じ、後者の条件下では動的疲労現象が観察される。共に静的漸増破壊荷重よりも低い荷重で破壊が引き起される点が特徴である。本報では特に静的疲労に対するコンクリートの材令効果及び動的疲労に対する局所応力の relaxation 効果について理論的に考察を加える。

2. 基本仮定と解析モデル

微視的レベルから見ると、コンクリートの破壊はセメントペースト及び骨材-セメントペースト間の内部境界内で起る一連のクラック発生及び伝播によって引起されるものと考えられる。⁴⁾ 本理論は以下の基本仮定に基づく。

[a]. 供試体は、直列的に連結した m 個の要素の集合であり、各要素は 2~3 相からなる。(図 2-1)

[b]. 要素内の各相は、各々 1 個の Griffith Crack を有する n 個のユニットから構成されている。(図 2-2)

[c]. ユニット内のクラック長さは、等価クラック長さ c^2 で評価されるものとする。茲に c は一種の破壊強度係数であり、介在物による局所応力攪乱係数: s 、先在微小クラック長さ: 2ℓ 及び時刻: t の関数である。破壊力学の概念を導入して、 c は次式で評価される。

(1) :
$$c = ks \sqrt{\frac{\ell}{E\gamma}}$$
 茲に E : ヤング係数、 γ : 表面エネルギー、 k : 材料定数
破壊に支配的な影響を及ぼす微小クラックの期待最大値: $2\bar{\ell}$ のみを考えるものとすれば、 c の確率密度関数は次式で表わされる。

(2) :
$$f_c(c) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{E\gamma}{k}} f_s(s)$$
 茲に、 $f_s(s)$: 局所応力攪乱係数の確率密度関数

[d]. 破壊過程は、図 2-3 の様にモデル化される。破壊過程の進展に伴い、局所的応力の分布形のみが準微視的クラックの進展によって変化するものと考ええる。

[e]. 介在物や材料欠陥の分布及び各要素の特性は供試体全体に亘って確率論的には等しいものと仮定する。

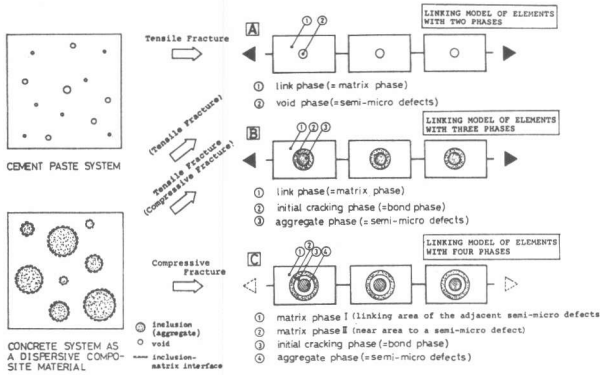


図 2-1: 要素の結合モデル

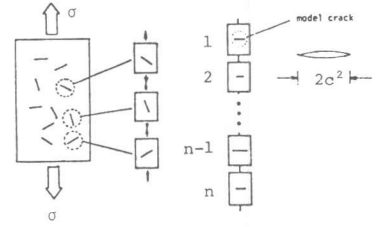


図 2-2: 硬化セメントペースト相のモデル化

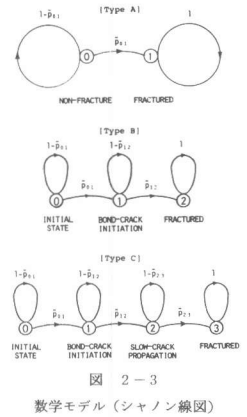


図 2-3

数学モデル(シャノン線図)

3. 持続荷重を受けるコンクリートの破壊強度 (静的疲労強度)

[I]. 引張または曲げ荷重による静的疲労 Aタイプの破壊モデルを用いて、時刻 t までに供試体のどこからも破壊が発生しない確率 $P(t)$ は次式で表される。²⁾

$$(3) : P(t) = \exp\left(-\int_0^t mL\sigma^\beta dt\right) = \exp(-mL\sigma^\beta t) ; \quad \text{where } L = nZ(E\gamma)^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} AR, \\ R = \int_0^\infty s^\beta f_s(s) \cdot ds, \quad \delta = \frac{1}{2}\beta + 1$$

従って予想される破壊時刻の期待値: \bar{t} は(4)式で表される。

$$(4) : \bar{t}_I = \frac{1}{mL\sigma^\beta} \Gamma(2)$$

[II]. 圧縮荷重等による静的疲労 最初の準微視的クラック発生が即供試体の崩壊とはならない場合、Bタイプの破壊モデルを用いれば、 m 個の要素からなる供試体の非破壊確率は(5)式で表われ、また 破壊時刻の期待値は(6)式で与えられる。⁵⁾

$$(5) : P(t) = \frac{1}{(L_1 - L_0)^m} \{ L_1 \exp(-L_0 |\sigma|^\beta t) - L_0 \exp(-L_1 |\sigma|^\beta t) \}^m$$

$$(6) : \bar{t}_{II} = \frac{1}{m^2 L_0 \sigma^\beta} \left[\lambda \Gamma(3) + \frac{\{(2m-1)\lambda - \lambda^2\}}{2m} \Gamma(4) + \frac{\{\lambda^2 + (1-3m)\lambda + m^2\}}{6m} \Gamma(5) \right] \\ = \frac{1}{mL_0 \sigma^\beta} F(m, \lambda) \quad \text{where } \lambda = \frac{L_1}{L_0}$$

(4) 式と(6) 式を比較すると、 \bar{t}_{II} は \bar{t}_I に対して供試体容積パラメータ: m 及び破壊過程パラメータ: λ の関数・ $F(m, \lambda)$ 倍、即ち整数倍となっている事がわかる。

[III]. 材令を考慮した静的疲労 コンクリートの静的疲労強度は、荷重レベルのみならず載荷開始時刻(供試体材令)の影響を大きく受ける事が Wittmann 等によって指摘されている。彼等は準微視的なクラック先端まわりでの応力緩和をクリープ関数導入によって考慮し、この問題を理論的に取扱っている。⁶⁾ 本論では、微小クラックの破壊強度係数の式(1)に含まれるヤング係数 E 、表面エネルギー γ 、先在微小クラックの長さ $2\bar{\ell}$ が供試体の材令によって変化する事に着目し、以下の様に仮定する。

$$(7.a) : E(\tau) = E_1 \cdot \tau^{a_1}$$

$$(7.b) : \gamma(\tau) = \gamma \cdot \tau^{a_2}$$

$$(7.c) : \bar{\ell}(\tau) = \bar{\ell}_1 / \tau^{a_3}$$

茲に、 a_1, a_2, a_3 は水セメント比によって変化する材料定数

時刻 t において、状態 0 から状態 1 へ遷移する確率は $\bar{p}_{01}(t) = L\sigma(t)^\beta$ で表わされるが、係数 L は(3)式より $L = \bar{L} \cdot L(t)$ の2つの部分に分けられる。その時間に依存する部分は(8)式で与えられる。

$$(8) : L(t) = (E\gamma)^{-\beta/2} \lambda^{-(\beta+2)/2} = C_1 \tau^{-a} , \quad \text{where } C_1 = (E_1 \gamma_1)^{-\beta/2} \lambda_1^{-(\beta+2)/2}, \quad a = \frac{1}{2}[\beta(a_1 + a_2) + (\beta+2)a_3]$$

載荷開始時刻を τ_0 とすると、時間 t 経過後供試体のどの部分からも破壊が発生していない確率は、(3)式より次式で与えられる。但し、 β への材令の影響は無視し得る程度と仮定する。

$$(9): P(t, \tau_0) = \exp\left\{\frac{mL C_1 \sigma^\beta}{(1-a) \tau_0} 1-a\right\} \exp\left\{-\frac{mL C_1 \sigma^\beta}{(1-a)} (t+\tau_0)^{1-a}\right\}$$

但し、 $a = 1$ の場合には、(9)式の代りに(9')式が用いられねばならない。

$$(9'): P(t, \tau_0) = \tau_0 \frac{mL C_1 \sigma^\beta}{(t+\tau_0) - mL C_1 \sigma^\beta}$$

(9)式より、破壊時刻の期待値は次式で与えられる。

$$(10): \bar{t}(\tau_0, \sigma) = \exp\left\{\frac{mL C_1 \sigma^\beta}{(1-a) \tau_0} 1-a\right\} \left[\frac{1}{mL C_1 \sigma^\beta} \frac{1}{1-a} \Gamma\left(\frac{2-a}{1-a}, \frac{mL C_1 \sigma^\beta}{1-a} \tau_0^{1-a}\right) - \tau_0 \Gamma\left(1, \frac{mL C_1 \sigma^\beta}{1-a} \tau_0^{1-a}\right) \right]$$

茲に $\Gamma(b, z)$ は不完全
ガンマ関数

ところで 図 3-1 に示す様な荷重条件の下では、持続荷重の始まる点 1 に於ける非破壊確率 $P(\sigma)$ を考慮して破壊時刻を評価しなければならない。その結果次式を得る。

$$(11): P(t) = \exp(-mL \sigma^\beta t) \cdot P(\sigma) = \exp(-mL \sigma^\beta t) \exp\left\{-\frac{mL}{(\beta+1)\sigma} \sigma^{\beta+1}\right\}$$

$$(12): \bar{t} = \frac{1}{mL \sigma^\beta} \exp\left[-\frac{mL}{(\beta+1)\sigma} \sigma^{\beta+1}\right]$$

同様の理由から(10)式を変形し、更に(4)式と(6)式の関係を用いて 材令を考慮した圧縮荷重下での静的疲労強度に関する理論式として次式を得る。

$$(13): \bar{t} = \frac{1}{mL C_1} \left(\frac{mL C_1}{\beta \sigma}\right)^{\beta+1} \left\{ \tau_0^{\frac{\beta}{\beta+1}} \frac{1}{\eta^\beta} + \frac{a}{mL C_1} \left(\frac{mL C_1}{\beta \sigma}\right)^{\beta+1} \cdot \frac{1}{\tau_0^{1-\frac{2a}{\beta+1}}} \left(\frac{1}{\eta^\beta}\right)^2 \right\} \exp\left(\frac{\beta}{\beta+1} \ln \eta\right) F(\lambda_1, m)$$

図 3-2 に、Wittmann 等による実験結果及び理論値と(13)式に基づいて求められた(14)式との対比を示すが、本理論の結果は極めて良く実験結果を表している。

$$(14): \bar{t} = 0.03126 \left\{ \tau_0^{0.2344} \cdot (1/\eta)^{21.278} + \frac{66.484}{\tau_0^{0.5311}} \cdot (1/\eta)^{42.556} \right\} \exp(-0.9551 \cdot \eta^{22.278})$$

where $\eta = \sigma/\bar{\sigma}(\tau_0)$

4. 繰返荷重を受けるコンクリートの

破壊強度 (動的疲労強度)

[I]. 引張または曲げ荷重による動的疲労

繰返荷重条件のタイプとして、(1). 短形パルス型、(2). 三角パルス型、(3). 三角級数型等が考えられる (図 4-1)。ここでは A タイプの破壊モデルを用いて簡単に考察を加える。

(1). 短形パルス型動的載荷 (3) 式より

荷重 1 サイクル後の非破壊確率は

$$(15): P(1) = \exp(-mL \sigma^\beta \tau_0)$$

従って N サイクル後の非破壊確率は

$$(16): P(N) = \exp(-mL N t_0 \sigma^\beta)$$

疲労寿命の期待値は

$$(17): \bar{N}_i = 2f/mL \sigma^\beta; \quad f = 1/2t_0$$

(2). 三角パルス型動的載荷 前と同様

にして荷重半サイクル後の非破壊確率は

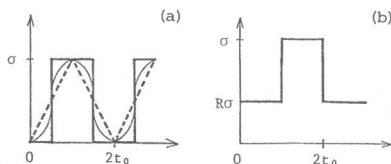


図 4-1: 動的疲労の載荷条件

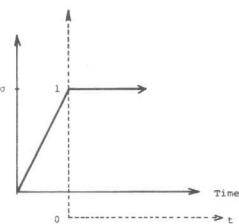


図 3-1: 静的疲労の載荷条件

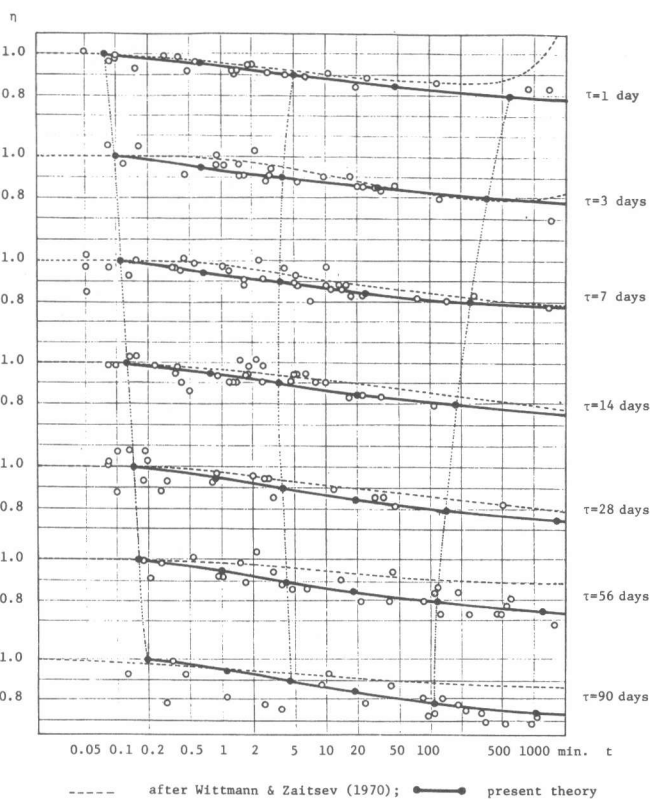


図 3-2: 荷重持続期間と硬化セメントペーストの強度低下の関係

$$(18): P(\frac{1}{2}) = \exp\{-mL_0\sigma_0^{\beta+1}/(\beta+1)\}$$

状態遷移確率は応力レベルのみに依存するものと仮定すると、Nサイクル後の非破壊確率と疲労寿命の期待値は

$$(19): P(N) = \exp\{-2mLN\sigma_0^{\beta}/(\beta+1)\}$$

$$(20): \bar{N}_2 = (\beta+1)f/mL\sigma_0^{\beta}$$

(3). 三角級数型動的載荷 (3)式の計算を厳密に実行する事は困難であるが、図 4-1 より $\bar{N}_1 < \bar{N}_3 < \bar{N}_2$ と考える事ができる。

[II]. 圧縮荷重等による動的疲労 Bタイプ の破壊モデルを用いた場合は以下の様になる。

(1). 短形パルス型動的載荷 非破壊確率と疲労寿命は

$$(21): P(N) = \frac{L_1^m}{(L_1-L_0)^m} \exp(-mL_0\sigma_0^{\beta}t_0N) [1 - \frac{L_0}{L_1} \exp\{(L_0-L_1)\sigma_0^{\beta}t_0N\}]^m$$

$$(22): \bar{N} = \frac{1}{m^2\sigma_0^{\beta}L_0t_0} \left\{ \frac{L_1}{L_0}\Gamma(3) + \frac{L_1(2mL_0-L_0-L_1)}{2mL_0^2}\Gamma(4) + \frac{\{L_1^2+(1-3m)L_0L_1+m^2L_0^2\}}{6mL_0^3}\Gamma(5) \right\}$$

(2). 三角パルス型動的載荷 非破壊確率と疲労寿命は

$$(23): P(N) = \frac{L_1^m}{(L_1-L_0)^m} \exp(-\frac{2mL_0\sigma_0^{\beta}t_0N}{\beta+1}) [1 - \frac{L_0}{L_1} \exp\{\frac{2(L_0-L_1)}{(\beta+1)}\sigma_0^{\beta}t_0N\}]^m$$

$$(24): \bar{N} = \frac{(\beta+1)}{2m^2L_0t_0\sigma_0^{\beta}L_0} \left\{ \frac{L_1}{L_0}\Gamma(3) + \frac{L_1(2mL_0-L_0-L_1)}{2mL_0^2}\Gamma(4) + \frac{\{L_1^2+(1-3m)L_0L_1+m^2L_0^2\}}{6mL_0^3}\Gamma(5) \right\}$$

(17)、(20)、(22)及び(24)式から、疲労寿命 \bar{N} と応力レベル η の関係は、荷重タイプによらず次式で表わされる。

$$(25): \ln \eta = -\ln \bar{N} / \beta + F(f, L, m, \beta)$$

図 4-2、3 に実験結果と理論式の比較を示す。

5. 時間依存型内部構造変化の影響 セメント水和物内部境界のこり(クリープ変形)によるクラック先端の曲率半径増大が内部の局所応力分布を時間と共に変化させる。その影響を考慮して、図 4-1. b に対して要素の非破壊確率は次式で表わされるものと仮定する。

$$(26): P(N) = \exp\left[-\int_0^N \frac{L(R^{\beta+1})\sigma^{\beta}t_0 dN}{a(bS^{\alpha}N+1)^{\beta}}\right]$$

$$\text{茲に } s = \int_0^{2t_0} \{\sigma(t)\}^{\alpha+1} dt = (R^{\alpha+1})\sigma^{\alpha+1}t_0$$

従って供試体の非破壊確率は次式で与えられる。

$$(27): P(N) = \exp\left\{\frac{mL(R^{\beta+1})\sigma^{\beta}t_0N}{abS^{\alpha}(1-r)}\right\} \exp\left\{-\frac{mL(R^{\beta+1})\sigma^{\beta}t_0N}{abS^{\alpha}(1-r)}(bs^{\alpha}N+1)^{1-r}\right\}$$

また疲労寿命の期待値は次の様に得られる。

$$(28): \bar{N} = \frac{2af}{mL(R^{\beta+1})\sigma^{\beta}} \left\{ 1 + \frac{abr(R^{\alpha+1})\sigma^{\alpha}(2f)^{1-\alpha}}{mL(R^{\beta+1})\sigma^{\beta-\alpha_2}} + \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot r \cdot (2r-1) \cdot f^2(1-\alpha) \cdot (R^{\alpha+1})^{2\alpha}}{m^2 \cdot L^2 \cdot (R^{\beta+1})^2 \cdot \sigma^{2(\beta-\alpha_2)}} \right\}$$

図 5-1 は (28) 式を用い疲労寿命と最小応力の関

係を示したものである。また (28) 式より、疲労寿命は一般に (29) 式で表わされる。従って $\ln \eta$ と $\ln \bar{N}$ の関係は;

$$(29): \ln \eta = -\ln \bar{N} / \beta + F(f, L, m, \beta, \eta, R)$$

(25) 式と異なり最早直線ではなく、 η の低下と共に \bar{N} が急激に増大する下に凸の曲線関係となる。

6. 参考文献 1). Mihashi, Izumi (1977) Cem. & Conc. Res., 7, 4, 2). 和泉・三橋(1980) 日本建築学会論文報告集, 287, 3). 同(1980) ibid., 288, 4). 和泉・三橋(1976) 東北大学建築学報, 16, 5). Mihashi, Izumi (1980) 建築学会東北支部, 35, 6). Wittmann, Zaitsev (1970) Proc. ICM 1, IV, 7). Reinhardt (1979) RILEM Off-shore Conf., 8). Leeuwen, Siemes (1979) HERON, 24, 1

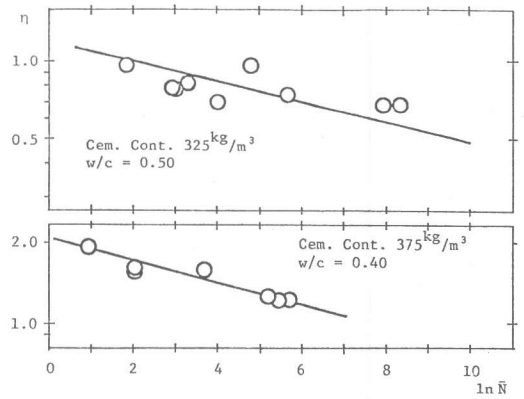


図 4-2: 一軸引張荷重による疲労寿命 (Reinhardt の実験結果⁷⁾との比較

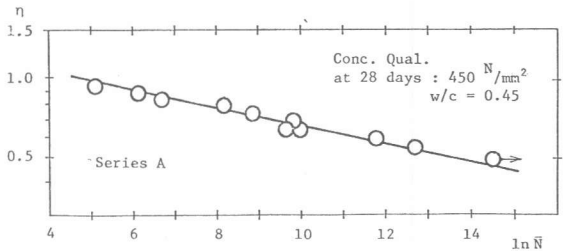
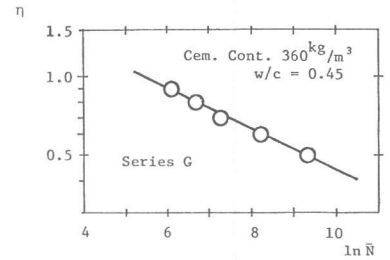


図 4-3: 一軸圧縮荷重による疲労寿命 (Siemes 等の実験結果⁸⁾との比較

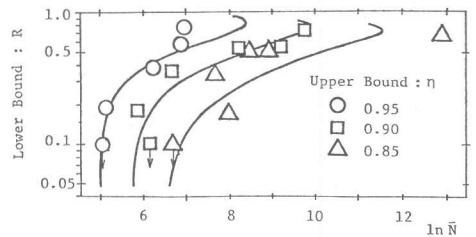


図 5-1: 動的疲労に及ぼす最小応力の影響 (Siemes 等の実験結果⁹⁾との比較)