[107] 非軸対称剛性を有するコンクリートドーム壁の応力解析

正会員 ○遠 藤 孝 夫 （電力中央研究所）
正会員 田 辺 忠 顕 （電力中央研究所）

1. まえがき

従来，非軸対称荷重を受ける軸対称物体の有限要素法解析では，[1),2)] 周方向に幾何学的形状および材料定数の変化がないことを仮定して解析を簡明化している。実際の構造物は開口部を有することもあるし，鉄筋コンクリート製であれば種々の荷重によりひびわれが発生し，各部の剛性が変化する場合もある。その場合にはシエル要素を用いる等三次元解析を必要とする。

本論文では，上記のような場合に於ても，その変化がなだらかな場合には周方向の荷重，変位，剛性を項数の少ないフーリエ級数で表現し得て，非軸対称荷重を受ける非軸対称剛性を有する構造物の応力解析を精度よく行えることを示したものである。

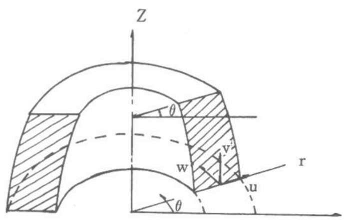
2. 解析の概要

2.1 定義と仮定

図－1に示すような円筒座標系を用い，周方向の単位長さ当りの節点荷重と変位をフーリエ級数で離散化して次のように表わす。[1)]

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R} &= \sum_{n=0}^{L} \bar{R}^{n}\cos n\theta + \sum_{n=0}^{L} \bar{\bar{R}}^{n}\sin n\theta \\ \mathbf{Z} &= \sum_{n=0}^{L} \bar{Z}^{n}\cos n\theta + \sum_{n=0}^{L} \bar{\bar{Z}}^{n}\sin n\theta \\ \mathbf{T} &= \sum_{n=0}^{L} \bar{T}^{n}\sin n\theta + \sum_{n=0}^{L} \bar{\bar{T}}^{n}\cos n\theta \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_{n=0}^{L} \bar{u}^{n}\cos n\theta + \sum_{n=0}^{L} \bar{\bar{u}}^{n}\sin n\theta \\ \mathbf{v} &= \sum_{n=0}^{L} \bar{v}^{n}\cos n\theta + \sum_{n=0}^{L} \bar{\bar{v}}^{n}\sin n\theta \\ \mathbf{w} &= \sum_{n=0}^{L} \bar{w}^{n}\sin n\theta + \sum_{n=0}^{L} \bar{\bar{w}}^{n}\cos n\theta \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$



図－1 座標系と変位成分

次に，周方向へ剛性が変化するとき等方性を仮定すれば，三次元弾性理論式により弾性マトリックスは次のように表わすことができる。

$$[D] = \begin{bmatrix} E_{11}(\theta) & E_{12}(\theta) & E_{13}(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ & E_{22}(\theta) & E_{23}(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ & & E_{33}(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_{44}(\theta) & 0 & 0 \\ & & & & G_{55}(\theta) & 0 \\ \mathrm{Sym.} & & & & & G_{66}(\theta) \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned} E_{11} = E_{22} = E_{33} &= \sum_{n=0}^{L} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)(2\mu + \lambda) \\ E_{12} = E_{13} = E_{23} &= \sum_{n=0}^{L} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\lambda \\ G_{44} = G_{55} = G_{66} &= \sum_{n=0}^{L} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\mu \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda &= \frac{2\nu}{1-2\nu}\mu, \quad E：\text{弾性係数}, \quad \nu：\text{ポアソン比} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

である。

2.1　要素内の変位，ひずみ，応力

図－2のように要素内の応力とひずみを定義する。有限要素として回転体の回転軸を含む断面内に任意の三角形を考え，この三角形を回転軸まわりに回転させて生じるリング要素を考える（図－3）。要素内の変位は，三角形断面の頂点をｉ，ｊ，ｋとし，要素の形状関数をN_i'，N_j'，N_k'とすれば次式で表わされる。[1)]

$$\{f\}=\begin{Bmatrix}u\\v\\w\end{Bmatrix}=[\,IN_i'\quad IN_j'\quad IN_k'\,]\{\boldsymbol{\delta}\}^e \qquad\cdots\cdots(5)$$

$\{\delta\}^e$は要素の節点変位で次のように表わされる。

$$\{\boldsymbol{\delta}\}^e=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\delta}_i\\\boldsymbol{\delta}_j\\\boldsymbol{\delta}_k\end{Bmatrix}=\{\mathbf{u}_i\ \mathbf{v}_i\ \mathbf{w}_i\ \mathbf{u}_j\ \mathbf{v}_j\ \mathbf{w}_j\ \mathbf{u}_k\ \mathbf{v}_k\ \mathbf{w}_k\}^T$$

$$=\sum_{n=0}^{L}[\bar{\lambda}^n]\{\bar{\delta}^n\}^e+\sum_{n=0}^{L}[\bar{\bar{\lambda}}^n]\{\bar{\bar{\delta}}^n\}^e \qquad\cdots\cdots(6)$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned}
[\bar{\lambda}^n]&=\mathrm{diag.}[\cos n\theta\ \cos n\theta\ \sin n\theta\ \cos n\theta\ \cos n\theta\ \sin n\theta\ \cos n\theta\ \cos n\theta\ \sin n\theta]\\
[\bar{\bar{\lambda}}^n]&=\mathrm{diag.}[\sin n\theta\ \sin n\theta\ \cos n\theta\ \sin n\theta\ \sin n\theta\ \cos n\theta\ \sin n\theta\ \sin n\theta\ \cos n\theta]\\
\{\bar{\delta}^n\}^e&=\{\bar{u}_i^n\ \ \bar{v}_i^n\ \ \bar{w}_i^n\ \ \bar{u}_j^n\ \ \bar{v}_j^n\ \ \bar{w}_j^n\ \ \bar{u}_k^n\ \ \bar{v}_k^n\ \ \bar{w}_k^n\}^T\\
\{\bar{\bar{\delta}}^n\}^e&=\{\bar{\bar{u}}_i^n\ \ \bar{\bar{v}}_i^n\ \ \bar{\bar{w}}_i^n\ \ \bar{\bar{u}}_j^n\ \ \bar{\bar{v}}_j^n\ \ \bar{\bar{w}}_j^n\ \ \bar{\bar{u}}_k^n\ \ \bar{\bar{v}}_k^n\ \ \bar{\bar{w}}_k^n\}^T
\end{aligned}\right\}\cdots(7)$$

また，要素の節点力も同様に表わされる。

$$\{\mathbf{F}\}^e=\begin{Bmatrix}\mathbf{F}_i\\\mathbf{F}_j\\\mathbf{F}_k\end{Bmatrix}=\{\mathbf{R}_i\ \mathbf{Z}_i\ \mathbf{T}_i\ \mathbf{R}_j\ \mathbf{Z}_j\ \mathbf{T}_j\ \mathbf{R}_k\ \mathbf{Z}_k\ \mathbf{T}_k\}^T$$

$$=\sum_{n=0}^{L}[\bar{\lambda}^n]\{\bar{F}^n\}^e+\sum_{n=0}^{L}[\bar{\bar{\lambda}}^n]\{\bar{\bar{F}}^n\}^e \qquad\cdots\cdots(8)$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned}
\{\bar{F}^n\}^e&=\{\bar{R}_i^n\ \ \bar{Z}_i^n\ \ \bar{T}_i^n\ \ \bar{R}_j^n\ \ \bar{Z}_j^n\ \ \bar{T}_j^n\ \ \bar{R}_k^n\ \ \bar{Z}_k^n\ \ \bar{T}_k^n\}^T\\
\{\bar{\bar{F}}^n\}^e&=\{\bar{\bar{R}}_i^n\ \ \bar{\bar{Z}}_i^n\ \ \bar{\bar{T}}_i^n\ \ \bar{\bar{R}}_j^n\ \ \bar{\bar{Z}}_j^n\ \ \bar{\bar{T}}_j^n\ \ \bar{\bar{R}}_k^n\ \ \bar{\bar{Z}}_k^n\ \ \bar{\bar{T}}_k^n\}^T
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(9)$$

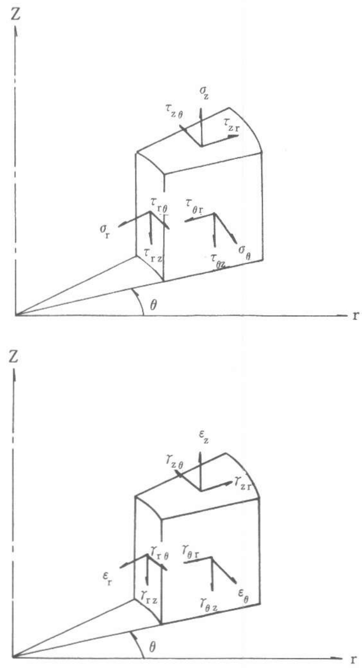
非軸対称荷重をうける場合の要素内ひずみは，弾性論より次式で表わされる。[1)]

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^e=\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\\varepsilon_z\\\varepsilon_\theta\\\gamma_{rz}\\\gamma_{r\theta}\\\gamma_{z\theta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial r}\\\dfrac{\partial v}{\partial z}\\\dfrac{u}{r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial\theta}\\\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial v}{\partial r}\\\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}+\dfrac{\partial w}{\partial r}-\dfrac{w}{r}\\\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\end{Bmatrix}$$

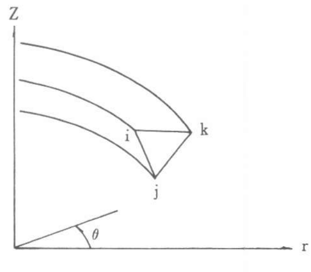
$$=\sum_{n=0}^{L}[\bar{B}^n]\{\bar{\delta}^n\}^e+\sum_{n=0}^{L}[\bar{\bar{B}}^n]\{\bar{\bar{\delta}}^n\}^e \qquad\cdots\cdots(10)$$

また，応力とひずみの関係は次式で表わされる。[1)]

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}^e=\begin{Bmatrix}\sigma_r\\\sigma_z\\\sigma_\theta\\\tau_{rz}\\\tau_{r\theta}\\\tau_{z\theta}\end{Bmatrix}=[D(\theta)]\cdot\{\varepsilon\}^e=[D(\theta)]\cdot\sum_{n=0}^{L}[\bar{B}^n]\{\bar{\delta}^n\}^e+[D(\theta)]\cdot\sum_{n=0}^{L}[\bar{\bar{B}}]\{\bar{\bar{\delta}}^n\}^e \qquad\cdots\cdots(11)$$



図－2　要素内の応力とひずみ



図－3　リング要素

2.3 要素の剛性マトリックス

図－3のリング要素に仮想仕事の原理を適用すると，次の釣合方程式が得られる。

$$\int_0^{2\pi} (\{\delta^*\}^e)^T \{\mathbf{F}\}^e \, r\, d\theta = \int_v (\{\varepsilon^*\}^e)^T \{\sigma\}^e \, d(\mathrm{vol}) \quad \cdots\cdots (12)$$

ここで，$\{\delta^*\}^e$と$\{\varepsilon^*\}^e$ はそれぞれ要素の仮想変位と仮想ひずみを表わしている。

(12)式に，これまでの(6)，(8)，(10)，(11)式を代入して整理すると次式が得られる。

$$\left\{\begin{array}{c} \bar{F}^{O}_{si} \\ \vdots \\ \bar{F}^{L}_{sk} \\ \hline \bar{\bar{F}}^{O}_{ai} \\ \vdots \\ \bar{\bar{F}}^{L}_{ak} \end{array}\right\}^e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} [K^{OO}_{ss}] & \cdots & [K^{OL}_{ss}] & [K^{OO}_{sa}] & \cdots & [K^{OL}_{sa}] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [K^{LO}_{ss}] & \cdots & [K^{LL}_{ss}] & [K^{LO}_{as}] & \cdots & [K^{LL}_{sa}] \\ \hline [K^{OO}_{as}] & \cdots & [K^{OL}_{as}] & [K^{OO}_{ss}] & \cdots & [K^{OL}_{ss}] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [K^{LO}_{as}] & \cdots & [K^{LL}_{as}] & [K^{LO}_{ss}] & \cdots & [K^{LL}_{ss}] \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \bar{\delta}^{O} \\ \vdots \\ \bar{\delta}^{L} \\ \hline \bar{\bar{\delta}}^{O} \\ \vdots \\ \bar{\bar{\delta}}^{L} \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (13)$$

ここで，

$$\left.\begin{array}{l} \{\bar{F}^{n}_{si}\}^e = \displaystyle\int_0^{2\pi} \left\{\begin{array}{l} \bar{R}^n_i \cos^2 n\theta \\ \bar{Z}^n_i \cos^2 n\theta \\ \bar{T}^n_i \sin^2 n\theta \end{array}\right\} r\, d\theta, \quad \{\bar{\bar{F}}^{n}_{ai}\}^e = \displaystyle\int_0^{2\pi} \left\{\begin{array}{l} \bar{\bar{R}}^n_i \sin^2 n\theta \\ \bar{\bar{Z}}_i \sin^2 n\theta \\ \bar{\bar{T}}_i \cos^2 n\theta \end{array}\right\} r\, d\theta \\ [K^{mn}_{ss}]^e = \iiint_v [\bar{B}^m]^T [\mathbf{D}(\theta)] [\bar{B}^n] \, r\, d\theta\, dr\, dz \\ [K^{mn}_{sa}]^e = \iiint_v [\bar{B}^m]^T [\mathbf{D}(\theta)] [\bar{\bar{B}}^n] \, r\, d\theta\, dr\, dz \\ [K^{mn}_{as}]^e = \iiint_v [\bar{\bar{B}}^m]^T [\mathbf{D}(\theta)] [\bar{B}^n] \, r\, d\theta\, dr\, dz \\ [K^{mn}_{aa}]^e = \iiint_v [\bar{\bar{B}}^m]^T [\mathbf{D}(\theta)] [\bar{\bar{B}}^n] \, r\, d\theta\, dr\, dz \end{array}\right\} \cdots (14)$$

(13)式は，次式のように簡単に書き表わされる。

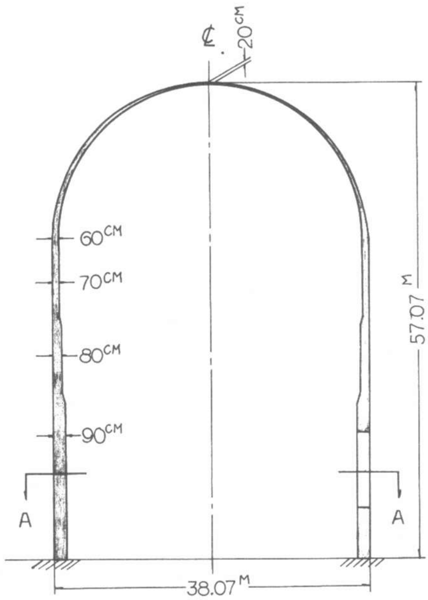
$$\{\mathbf{F}\}^e = [\mathbf{K}]^e \{\delta\}^e \quad \cdots\cdots (15)$$

ここで，$[\mathbf{K}]^e$は要素の剛性マトリックスを表わし，個々の成分は(14)式により計算される。

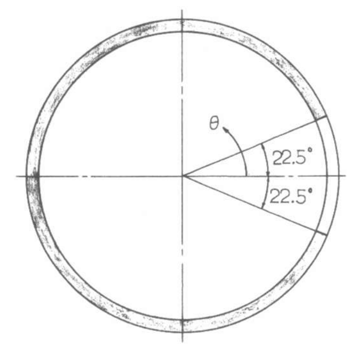
3. 鉄筋コンクリートドーム壁地震時応力静的解析

これまでに導いた解析手法を図－4に示す鉄筋コンクリートドーム壁が水平地震力を受ける場合に適用する。鉄筋コンクリートドーム壁は，高さ57.07 *m*，外径38.07 *m*であり，$\theta = 0°$の面に対称に中心角45°で高さ約9 *m*の開口部があるもの及び開口部のないものの二つとした。これを三角形要素のメッシュに分割し（要素数243，節点数185），0.2 gの加速度を水平に加えた場合を計算した。

図－4のようにθをとると，$\theta = 0°$と180° をとおる面での変形状態は図－5に示される。これより，全体的な変形に及ぼす開口部の影響は一割程であるが，開口部付近ではその影響が顕著で大きく変形することがわかる。また，$\theta = 30°$の面におけるドーム壁の直応力N_1は図－6に示される。これらを比較することにより，開口部付近の応力集中に対する補強鉄筋量算定の手助けとすることができるであろう。



(a) 鉛直断面図

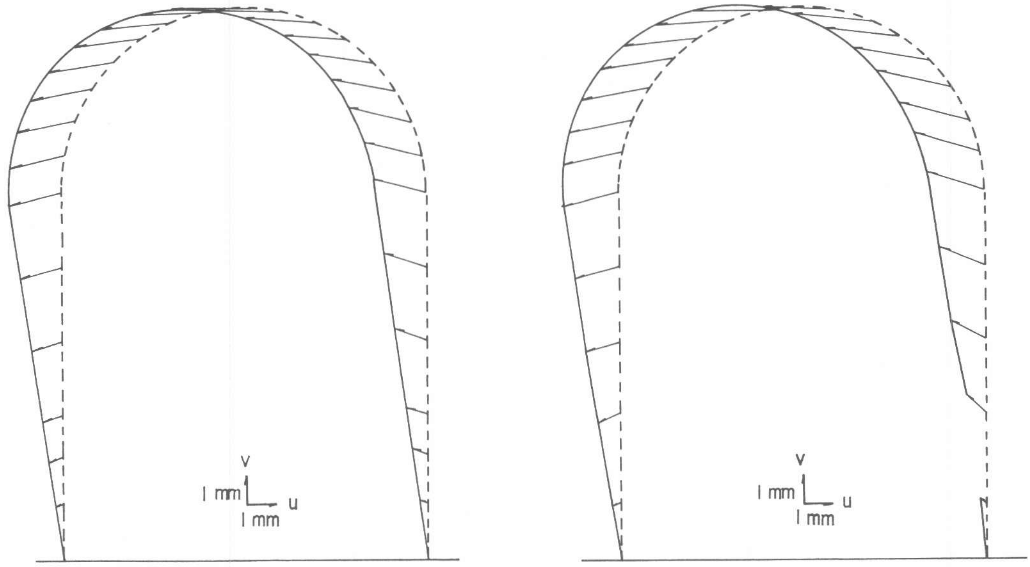


(b) 横断面図

図－4. コンクリートドーム壁モデル

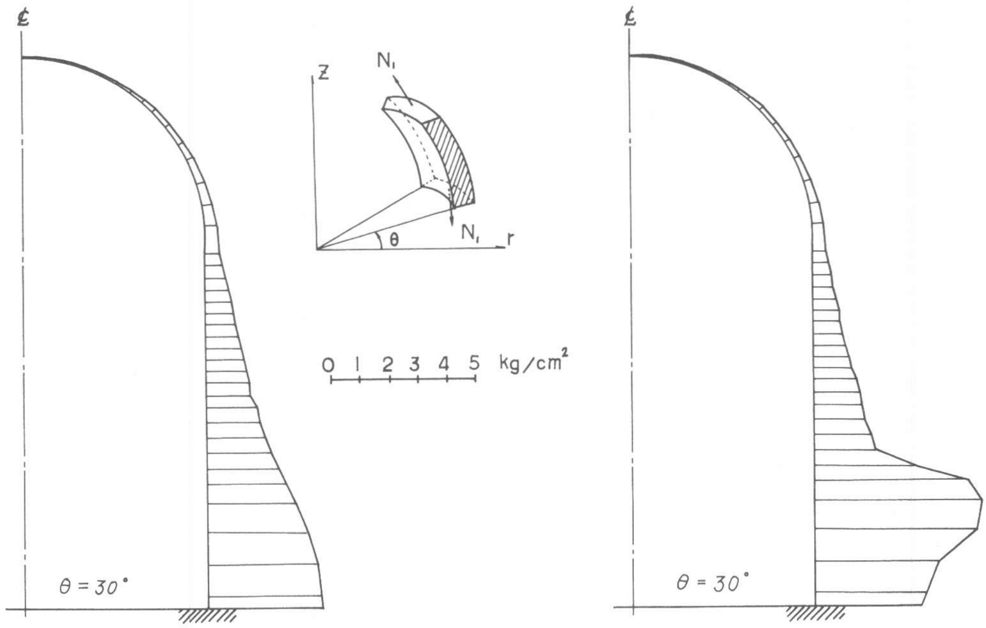
4. あとがき

この論文で述べた解析手法は，構造物に開口部や肉厚変化があり形状が厳密には軸対称とならない構造物や，コンクリートの局部的ひびわれ発生により剛性が軸対称とならない鉄筋コンクリート構造物の解析に有効であり，



（a） 開口部を有しない場合　　　（b） 開口部を有する場合

図－5　ドーム壁の変位分布



（a） 開口部を有しない場合　　　（b） 開口部を有する場合

図－6　ドーム壁の直応力分布（ $\theta = 30°$ ）

一般の三次元解析に比較して経済的であると思われる。

参考文献

(1) Zienkiewicz, O.C. and Cheung, Y.K. : Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, Mc Graw-Hill, 1977.

(2) 川股重也他：回転体の非対称問題に対する剛性行列，生産研究，1968年1月.