

[111] 周期的な温度変化を受けるコンクリート内の温度応力

正会員 橋 龍哉 (横浜国立大学工学部)

1. 序 論

コンクリート表面の温度が日照等の原因で周期的に変動するとき、コンクリート内部に温度応力が発生するが、応力の大きさは表面温度変化のばらつきに応じた変化を示す。このような温度応力のばらつきは、構造物の周囲の条件により大きな値になることがあり、そのコンクリート構造物への影響は構造物の耐久性を考えると、無視できないものとなる場合がある。この応力のばらつきを推定する方法としては、コンクリートの粘弾性の影響も考慮して、弾性厳密解を用いた解析法^(1,2)、有限要素を用いた数値解法⁽⁴⁾がすでに提案されている。また、コンクリートの材令の影響を厳密に考慮した研究も行われている⁽⁵⁾。本研究は、これらの研究を再検討し、周期的温度変化を受ける任意形状のコンクリート構造物内の温度応力のばらつきを、より効率的に求めるため、境界要素を用いて解析的に推定する手法を検討したものである。対象とする構造物は2次元平面ひずみ状態として扱えるものとし、また、構造物の温度変化は定常状態であると仮定する。

2. 温度応力解析法

コンクリート構造物表面 S_0 で表面温度が周期的に変化する場合を考える (図-1 参照)。

$$\bar{\theta}(y, t) = \bar{\theta}_0(y) e^{i\omega t} \quad (1)$$

ここに、 $i = \sqrt{-1}$ 、 $\omega = 2\pi/T$ 、また、 t 、 T は各々時間と温度変化の周期である。構造物が2次元等方的で温度分布が熱伝導方程式に従うものと仮定し、温度変化が定常の状態の場合には、温度 $\bar{\theta}(x, t)$ は次のように表わされる。

$$\bar{\theta}(x, t) = \theta(x) e^{i\omega t} \quad (2)$$

$$K \nabla^2 \theta - i \rho c \omega \theta = 0 \quad ; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3)$$

ここに K 、 ρ 、 c は、各々、構造物材料の熱伝導係数、密度、比熱を表わす。式(3)の基本解 θ^* は次のようになる。

$$\theta^*(x, x_1) = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(\beta r) \quad ; \quad H_0^{(2)}(\beta r) = J_0(\beta r) - iY_0(\beta r) \quad ; \quad \beta = (i-1) \sqrt{\frac{\rho c \omega}{2K}} \quad ; \quad r = |x - x_1| \quad (4)$$

$H_n^{(2)}$ は n 次第2種 Hankel 関数、 J_n 、 Y_n は n 次第1種および第2種 Bessel 関数である。温度 θ に関する境界 S 上の積分方程式は次のように表わされる。スカラー変数の添字は各座標軸方向の成分を表わし、総和規約に従う。

$$c(y) \theta(y) + \int_S q^*(y, y_1) \theta(y_1) dS(y_1) = \int_S \theta^*(y, y_1) q(y_1) dS(y_1) \quad (5)$$

$$q^*(y, y_1) = \frac{\partial \theta^*(y, y_1)}{\partial n} = -\frac{\beta}{4ir} n_k (y_k - y_{1k}) H_1^{(2)}(\beta r) \quad ; \quad H_1^{(2)}(\beta r) = J_1(\beta r) - iY_1(\beta r) \quad ;$$

$$q(y_1) = \frac{\partial \theta(y_1)}{\partial n} \quad ; \quad r = |y - y_1| \quad ; \quad c(y) = \frac{1}{2} \quad (6)$$

ここに、 $\partial/\partial n$ は境界 S 上の外向き方線 \underline{n} 方向の方向微分であり、 n_k は \underline{n} の x_k 方向の方向余弦である。領域内部点における温度 $\theta(x)$ は次式で求まる。

$$\theta(x) = \int_S \theta^*(x, y_1) q(y_1) dS(y_1) - \int_S q^*(x, y_1) \theta(y_1) dS(y_1) \quad ; \quad r = |x - y_1| \quad (7)$$

式(5) および (7) によって求められた領域内および境界上の温度分布によって生じる変位や表面力は次のような境界 S 上の積分方程式を解くことによって得られる⁽⁶⁾

$$C_{ki}(y) u_i(y) + \int_S f_{ki}^*(y, y_1) u_i(y_1) dS(y_1) = \int_S u_{ki}^*(y, y_1) f_i(y_1) dS(y_1) + b_k(y) \quad (8)$$

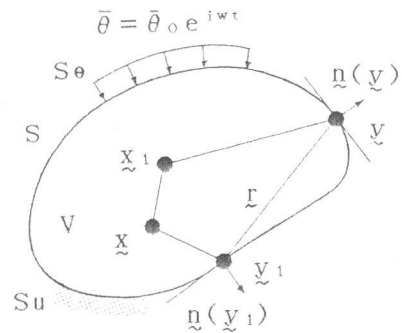


図-1 領域と境界

$$u_{ki}^{\sim}(y, y_1) = \frac{1+\nu}{4\pi E(1-\nu)} [(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ki} + r_k r_i] \quad (9)$$

$$f_{ki}^{\sim}(y, y_1) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \{ (1-2\nu) \delta_{ki} + 2r_k r_i \} + (1-2\nu)(r_k n_i - r_i n_k) \right] \quad (10)$$

$$b_k(y) = \int_S P_k^{\sim}(y, y_1) \theta(y_1) dS(y_1) - \int_S Q_k^{\sim}(y, y_1) \frac{\partial \theta(y_1)}{\partial y_{1m}} n_m(y_1) dS(y_1) \quad (11)$$

$$P_k^{\sim}(y, y_1) = -\frac{\alpha(1+\nu)}{4\pi(1-\nu)} \left[\left(\frac{1}{2} + \ln r \right) n_k + n_m r_m r_k \right]; \quad Q_k^{\sim}(y, y_1) = -\frac{\alpha(1+\nu)}{4\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{2} + \ln r \right) r r_k \quad (12)$$

$$r_k = \frac{y_{1k} - y_k}{r}; \quad r = |y_1 - y|; \quad C_{ki}(y) = \frac{1}{2} \delta_{ki} \quad (13)$$

ここに、 u_i, f_i は各々構造物の変位と表面力を表わし、 u_{ki}^{\sim} は2次元等方弾性体（平面ひずみ）の基本解、 f_{ki}^{\sim} は u_{ki}^{\sim} に対応する表面力成分、 b_k は温度により生じる見かけの物体力項である。定常状態を対象としているため、温度による物体力項が体積積分ではなく、表面積分で表わされている。また、 E, ν, α は各々縦弾性係数、Poisson 比、線膨張係数を表わし、 δ_{ki} は Kronecker のデルタである。領域内部点における変位および応力は、式(8)を与えられた境界条件のもとで解いて得られた境界S上の u_i, f_i を次式に代入して求めることができる⁹⁾

$$u_k(x) = \int_S u_{ki}^{\sim}(x, y_1) f_i(y_1) dS(y_1) - \int_S f_{ki}^{\sim}(x, y_1) u_i(y_1) dS(y_1) + b_k(x) \quad (14)$$

$$S_{ij}(x) = \int_S D_{kij}(x, y_1) f_k(y_1) dS(y_1) - \int_S S_{kij}(x, y_1) u_k(y_1) dS(y_1) + \int_S D_{fj}^{\sim}(x, y_1) \theta(y_1) dS(y_1) - \int_S S_{fj}^{\sim}(x, y_1) \frac{\partial \theta(y_1)}{\partial y_{1m}} n_m(y_1) dS(y_1) - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \theta(x) \delta_{ij} \quad (15)$$

$$D_{kij}(x, y_1) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)(\delta_{ki} r_j + \delta_{kj} r_i - \delta_{ij} r_k) + 2r_i r_j r_k];$$

$$S_{kij}(x, y_1) = -\frac{E}{4\pi(1-\nu)r^2} \left[2 \frac{\partial r}{\partial n} \{ (1-2\nu) \delta_{ij} r_k + \nu(\delta_{ik} r_j + \delta_{jk} r_i) - 4r_i r_j r_k \} \right. \\ \left. + 2\nu(n_i r_j r_k + n_j r_i r_k) + (1-2\nu)(2n_k r_i r_j + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right] \quad (16)$$

$$D_{fj}^{\sim}(x, y_1) = \frac{\alpha E}{4\pi(1-\nu)r} [n_m r_m \left(\frac{\delta_{ij}}{1-2\nu} - 2r_i r_j \right) + n_i r_j + n_j r_i];$$

$$S_{fj}^{\sim}(x, y_1) = \frac{\alpha E}{4\pi(1-\nu)} [r_i r_j + \frac{\delta_{ij}}{1-2\nu} \left(\frac{1+2\nu}{2} + \ln r \right)]; \quad r_k = \frac{y_{1k} - y_k}{r}; \quad r = |y_1 - x| \quad (17)$$

積分方程式(5) および(8)を、 θ, q, u, f に適当な内挿関数を用いて離散化することにより、次のようなマトリックス形式の全体系方程式が得られる。

$$\underline{A}\underline{\theta} = \underline{B}\underline{q}; \quad \underline{H}\underline{U} = \underline{G}\underline{F} + \underline{B}^* \quad (18)$$

ここに、 $\underline{\theta}, \underline{Q}, \underline{U}, \underline{F}$ および \underline{B}^* は各境界要素の節点における θ, q, u, f および b から成るベクトルである。複素係数マトリックス $\underline{A}, \underline{B}, \underline{H}, \underline{G}$ の計算方法については、参考文献(7)を参照されたい。また、コンクリート構造物が複数の材料から成る場合には、領域分割法を用いて境界面の状態に応じて $\underline{A}, \underline{B}, \underline{H}, \underline{G}$ を変形する必要がある⁹⁾。 θ, q が境界S上で線形に変化する内挿関数 \underline{N} を用いた線形境界要素の場合には、 \underline{B} の対角部分は次のように計算される(図-2参照)。

$$B_{j,j} = \frac{1}{4i} \left[\frac{1}{\beta l_j} H_1^{(2)}(\beta l_j) - \frac{2i}{\pi} \left(\frac{1}{\beta l_j} \right)^2 \right]; \quad B_{j,j+1} = -\frac{1}{4i} \left[\frac{1}{\beta l_j} H_1^{(2)}(\beta l_j) - 1 \right. \\ \left. + \frac{2i}{\pi} \left\{ \ln \frac{\beta l_j}{2} + \gamma - 1 - \left(\frac{1}{\beta l_j} \right)^2 \right\} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (\beta l_j)^{2m}}{(m!)^2 2^{2m} (2m+1)} \left\{ 1 - \frac{2i}{\pi} \left(\ln \frac{\beta l_j}{2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \gamma - S_m - \frac{1}{2m+1} \right) \right\} \right]; \quad S_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \quad (19)$$

$$\int_S \theta^* q dS = [B_{j,j}, B_{j,j+1}] q_j; \quad q = \underline{N}^T q_j;$$

$$\underline{N} = \left[\frac{1}{2}(1-\xi), \frac{1}{2}(1+\xi) \right]; \quad q_j = [q_j, q_{j+1}]^T \quad (20)$$

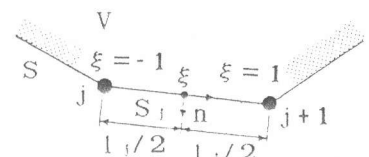


図-2 線形境界要素

ここに、 l_j は要素 j の長さ、 $\gamma = 0.57721 \dots$ (Eulerの定数) である。 \underline{A} の対角部分は、 θ と q^* の直交性から常に 0 となる。コンクリートの粘弾性の影響を考慮する場合には、クリープ・ポアソン比が弾性の場合の値と等しく、一定と仮定すると、粘弾性論における対応原理を用いて、縦弾性係数 E を複素弾性係数 \hat{E} によって置換えればよい。コンクリートの緩和弾性係数 E_R が一般化 Maxwell モデルで表わされるとき、 \hat{E} は次のようになる。

$$\hat{E} = \sum_{n=1}^M \frac{E_{0n} \tau_n i \omega}{1 + \tau_n i \omega} + E_{0\infty} \quad (21)$$

$$E_R(t, \tau) = \sum_{n=1}^M E_n(\tau) e^{-(t-\tau)/\tau_n} + E_{\infty}(\tau); \quad E_n(\tau) = E_{0n} + \sum_{j=1}^{N+1} \bar{E}_{jn} e^{-\tau/\tau_j};$$

$$E_{\infty}(\tau) = E_{0\infty} + \sum_{j=1}^{N+1} \bar{E}_{j\infty} e^{-\tau/\tau_j}; \quad \tau_n = \tau_1 10^{n-1} \quad (n=1, 2, \dots, M);$$

$$\tau_j = \tau_1 10^{j-1} \quad (22)$$

M, N はモデルに含まれる項数であり、その他の係数は実験結果に基づき決定される。

式 (18) を与えられた境界条件のもとで解いて得られた解 $\theta, q, \underline{u}, \underline{f}$ は各々与えられた構造物の外表面における周期的温度変化に対する周波数応答関数となっている。したがって、境界 S_0 上に与えられる周期的温度変化の振幅 $\bar{\theta}_0(\underline{y})$ が時間的に変動し、その平均および分散が各々 $\bar{\theta}_0$ および $\sigma_{\bar{\theta}_0}$ とすると、各々の量の標準偏差は次のように求められる。

$$\sigma_{\theta}(\underline{x}) = \sigma_{\bar{\theta}_0} |\theta(\underline{x})|; \quad \sigma_q(\underline{x}) = \sigma_{\bar{\theta}_0} |q(\underline{x})|; \quad \sigma_{\underline{u}}(\underline{x}) = \sigma_{\bar{\theta}_0} |\underline{u}(\underline{x})|; \quad \sigma_{\underline{s}}(\underline{x}) = \sigma_{\bar{\theta}_0} |\underline{s}(\underline{x})| \quad (23)$$

ここに、 \underline{u} および \underline{s} は、たとえば $x-y$ 座標系では、各々、変位成分 u_x, u_y 、応力成分 s_x, s_y, s_{xy} から成るベクトルである。

3. 周期的温度変化を受けるコンクリートの解析例

ばらつきを含む周期的温度変化を受けるコンクリートの温度応力を求めるための、境界要素を用いた解析方法を導いたが、同方法を用いた数値計算例を以下に示す。図-3(a) に示すような 2 種のコンクリートから成るコンクリート構造物を考える。異なる種類のコンクリートが接する界面では、温度および変位が連続であると仮定する。その他の境界における境界条件は図-3(a) に示すとおりである。計算上必要となる材料定数は表-1 に示す値を用いる。温度による材料定数の変化は無視する。また、コンクリートの自重の影響も無視する。コンクリートの粘弾性を表わす複素弾性係数 \hat{E} (表-2 参照) を計算するために必要なコンクリートの緩和弾性係数に関するデータは参考文献(9) のものを用いた。境界要素による要素分割は、図-3(b) に示すとおりである。線形要素を用い、領域の角の部分では誤差を小さくするため、要素分割を細かくしている。

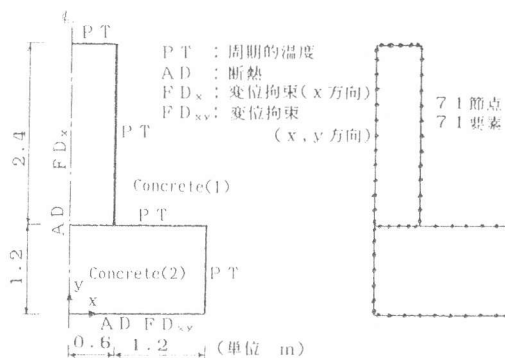
温度変化の周期 T が 1 日と 365 日の場合について、コンクリート構造物内の温度と応力の分布を図-4 に示す。分布は図-3(a) に示された構造物の 3 つの断面において求められている。なお、これらの分布は、式(23) から明らかなように、温度 θ および応力 \underline{s} の定常的变化の振幅を表わすと同時に、構造物外表面で与えられる周期的温度変化のばらつきにより生じた温度と応力のばらつ

表-1 コンクリートの材料定数

材料定数	コンクリート(1)	コンクリート(2)
熱伝導率 k (kcal/m·day·°C)	5.7.6	4.5.6
密度 ρ (kg/m ³)	2.3.0.0	2.4.0.0
比熱 c (kcal/kg·°C)	0.2.4	0.2.7
熱膨張率 α (m ² /day)	1.033×10^{-1}	1.097×10^{-2}
日合 τ (days)	1.0.2.5	3.6.5.0
Poisson比 ν	0.1.7	0.1.7
熱膨張係数 α (°C ⁻¹)	10×10^{-6}	10×10^{-6}

表-2 コンクリートの複素弾性係数

複素弾性係数 \hat{E}	コンクリート(1)	コンクリート(2)
$T = 1 \text{ day}$		
$Re(\hat{E})$ (kgf/cm ²)	2.150×10^6	2.191×10^6
$Im(\hat{E})$ (kgf/cm ²)	2.221×10^5	1.317×10^5
$T = 1 \text{ yr}$		
$Re(\hat{E})$ (kgf/cm ²)	1.399×10^6	2.071×10^6
$Im(\hat{E})$ (kgf/cm ²)	1.570×10^5	1.233×10^5



(a) 境界条件 (b) 要素分割

図-3 境界条件と要素分割

きの標準偏差も表わしている。

温度に関しては、周期が長い場合は、外表面の温度変化の影響が構造物内部に達しているのに対し、周期が短い場合は、外表面付近のみが主として影響を受けていることがわかる。この傾向は、断面の厚さが大きくなるに従い、顕著になっている。また、応力に関しては、周期が長い場合は境界における拘束が、また、周期が短い場合は、温度勾配が、各々の場合において支配的な影響を与えていることがわかる。各々の支配的要因によって発生する応力の大きさは、ほぼ同程度であるから、構造解析等においては、両者を考える必要があることがわかる。

4. 結論

外表面が不規則な周期的温度変化を受ける2次元コンクリート構造物内の応力のばらつき、すなわち、標準偏差を求めるための解析方法として、境界要素を用いた手法を示した。解析例からは、周期の長短による外部温度変化の影響の範囲について、従来の弾性厳密解や有限要素法を用いた手法で得られた傾向と同様な結果が得られた。境界要素法の特徴としての入力データ数、総自由度数が少ないという点がこの場合もあてはまることがわかる。コンクリート構造物を3次元として扱う必要がある場合には、境界要素を用いた手法がさらに有利になるものと思われる。

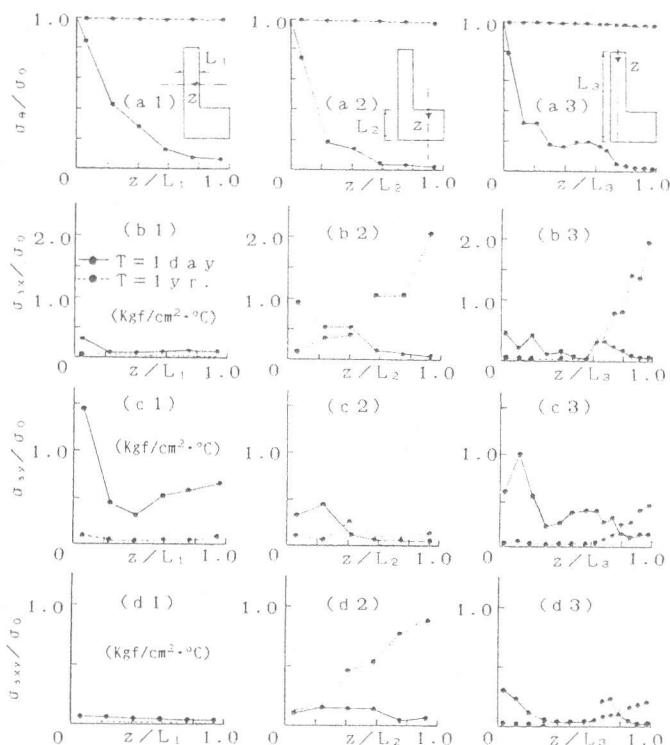


図-4 温度と応力の分布

【参考文献】

- 1) Heller, R.A. : Thermal Stress as a Narrow-Band Random Load, Proc. of ASCE, Vol.102, No. EM5, Oct. 1976, pp.787-805.
- 2) Singh, M.P., and Heller, R.A. : Random Thermal Stress in Concrete Containments, Proc. of ASCE, Vol.106, No. ST7, July, 1980, pp.1481-1496.
- 3) Tsubaki, T., and Bazant, Z.P. : Random Shrinkage Stresses in Aging Viscoelastic Vessel, Proc. of ASCE, Vol.108, No. EM3, June, 1982, pp.527-545.
- 4) 江田 徹、橋 龍哉、池田 尚治 : 周期的温度変化を受けるコンクリート構造物の有限要素法による熱応力解析、土木学会第38回年次学術講演会講演概要集、第5部、1983年9月、pp.387-388.
- 5) Bazant, Z.P. : Response of Aging Linear Systems to Random Input, Concrete and Geomaterials Report No.82-12/665r, Northwestern University, IL., Dec., 1982.
- 6) Brehbia, C.A., and Walker, S. : Boundary Element Techniques in Engineering, Butterworth and Co. Ltd., London, 1980.
- 7) 橋 龍哉 : 外部拘束を受けるマスコンクリートの温度応力解析における境界要素の適用、マスコンクリートの温度応力発生メカニズムに関するコロキウム論文集、日本コンクリート工学協会、1984年3月。
- 8) 橋 龍哉、山野辺 慎一、池田 尚治 : 面内力を受けるコンクリート平板の解析に関する一考察 —— 有限要素法と境界要素法、RC構造のせん断問題に対する解析的研究に関するコロキウム論文集、JCI-C5、日本コンクリート工学協会、1983年10月、pp.29-36.
- 9) Bazant, Z.P., and Wu, S.T. : Rate-type Creep Law of Aging Concrete Based on Maxwell Chain, Materials and Structures, Paris, France, Vol.7, No.37, 1974, pp.45-60.