

[146] 耐力の低下を考慮した鉄筋コンクリート断面の二軸曲げモデル

正会員 ○市之瀬敏勝 (名古屋工業大学工学部)  
 正会員 滝口 克己 (名古屋工業大学工学部)  
 吉井 正行 (名古屋工業大学大学院)

1. 序 論

水平二方向の地震外乱を受ける鉄筋コンクリート骨組を部材レベルから応答解析するためには、柱の二軸復元力モデルが必要となる。これまで、柱の一軸復元力特性を二軸に拡張する方法としては、滝沢<sup>5)</sup>のように、金属塑性論とのアナロジーが多く用いられてきた。しかし、Drucker<sup>2)</sup>の安定硬化条件を仮定する限り、図1のような、耐力が低下する柱の一軸特性を塑性論のみによって二軸に拡張することは困難である。

最近、ひずみ軟化を考慮した材料の多軸構成則がいくつか提案されている。Bazant<sup>6)</sup>は、Dougill<sup>4)</sup>の弾性破壊理論をもとに、応力空間上に塑性ポテンシャルを、ひずみ空間上に破壊ポテンシャルを仮定したコンクリートの塑性破壊理論を提案した。また前川<sup>7)</sup>は、ひずみ空間上に塑性ポテンシャルを仮定し、最大等価ひずみに応じて弾性係数を低下させることにより、コンクリートの弾塑性破壊モデルを導いた。

本報は、「仮想モーメント」平面上に(擬)塑性ポテンシャルを、曲率平面上に破壊ポテンシャルを仮定することにより、耐力が低下する部材断面の一軸曲げ復元力特性を二軸に拡張する。また、平面保持仮定による断面解析を行って、仮定した塑性ポテンシャルと破壊ポテンシャルの移動・拡大(縮小)ルールと比較する。なお、本報では、列ベクトルを{ }で、行ベクトルを[ ]で、行列を[ ]で表示する。

2. 弾塑性破壊理論

本節では、図1のように降伏モーメントが $M_0$ で、破壊(耐力低下)が曲率 $\phi_0$ から始まる一軸復元力特性を二軸に拡張する。除荷時の剛性は、初期剛性と同じく $K_1$ とする。一軸載荷時の、第1、第2、第3剛性部分でのモーメントの増分関係を図2に示す。第1剛性部分では弾性モーメント増分 $\{dM^e\}$ のみ、第2剛性部分では $\{dM^e\}$ と同時に塑性モーメント増分 $\{dM^p\}$ が生じ、第3剛性部分では $\{dM^e\}$ 、 $\{dM^p\}$ および、破壊モーメント増分 $\{dM^f\}$ が同時に生じると考える。これらを次式で表す。

$$\begin{aligned} \text{弾性時} \dots \{dM\} &= \{dM^e\} & \dots (1-a) \\ \text{塑性時} \dots \{dM\} &= \{dM^e\} + \{dM^p\} & \dots (1-b) \\ \text{破壊時} \dots \{dM\} &= \{dM^e\} + \{dM^p\} + \{dM^f\} & \dots (1-c) \end{aligned}$$

$\{dM^e\}$ と $\{dM^p\}$ は、弾性剛性 $[K_1] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix}$ 、全曲率増分 $\{d\phi\}$

および塑性曲率増分 $\{d\phi^p\}$ を用いて次式で定義する。

$$\{dM^e\} = [K_1] \{d\phi\} \dots (2)$$

$$\{dM^p\} = - [K_1] \{d\phi^p\} \dots (3)$$

$\{d\phi^p\}$ については 2-1節で、 $\{d\phi^f\}$ については 2-2節で述べる。

2-1. 塑性モーメント増分  $\{dM^p\}$

塑性ポテンシャル $F=0$ を、仮想モーメント $\{\tilde{M}\}$

$$\left. \begin{aligned} \{\tilde{M}\} &= \{M\} - \{M^f\} \\ \{M^f\} &= \int \{dM^f\} \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

に関して図3のような中心 $\{\alpha\}$ 、半径 $M_r$ の円と仮定する。実モーメント $\{M\}$ でなく $\{\tilde{M}\}$ に関して $F=0$ を定義したことにより第3剛性部分でも第2剛性部分と同量の塑性曲率増分 $\{d\phi^p\}$ を生じることになる。ただし仮想モーメント平面上に定義したため、「擬」塑性ポテンシャルと呼ぶべきかもしれない。

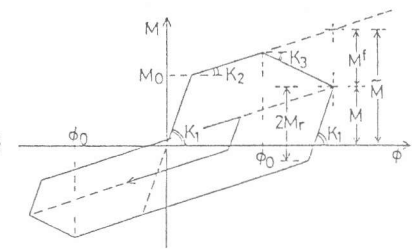
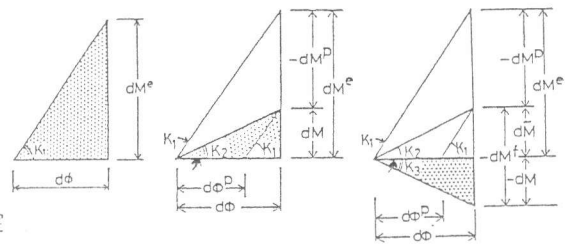


図1. 一軸復元力モデル



(a) 弾性時 (b) 塑性時 (c) 破壊時

図2. 一軸載荷時のモーメント増分関係

仮想モーメント増分 $\{d\tilde{M}\}$ を図3のように $F=0$ に対して法線成分 $\{d\tilde{M}^N\}$ と接線成分 $\{d\tilde{M}^T\}$ に分解する。

$$\{d\tilde{M}\} = \{d\tilde{M}^N\} + \{d\tilde{M}^T\}, \quad \{\partial F / \partial \tilde{M}\} \{d\tilde{M}^T\} = 0 \quad \dots\dots (5)$$

図2(b), (c)を参照して次式を仮定する。

$$\{d\tilde{M}^N\} = [w] \{d\phi^D\}, \quad [w]^{-1} = [K_2]^{-1} - [K_1]^{-1} \quad \dots\dots (6)$$

また、Drucker<sup>2)</sup>の条件つまり、塑性曲率増分 $\{d\phi^D\}$ は塑性ポテンシャル $F=0$ の法線方向に生じると仮定する。

$$\{d\phi^D\} = \{\partial F / \partial \tilde{M}\} \cdot d\lambda, \quad d\lambda \geq 0 \quad \dots\dots (7)$$

式(1)~(7)より次式を得る。

$$d\lambda = \frac{\{\partial F / \partial \tilde{M}\} [K_1] \{d\phi\}}{\{\partial F / \partial \tilde{M}\} ([w] - [K_1]) \{d\phi\}} \quad \dots\dots (8)$$

$$\{dM^D\} = - \frac{[K_1] \{\partial F / \partial \tilde{M}\} \{d\phi\}}{\{\partial F / \partial \tilde{M}\} ([w] + [K_1]) \{d\phi\}} \quad \dots\dots (9)$$

塑性ポテンシャル(降伏円)の移動についてZiegler則<sup>1)</sup>を仮定する。すなわち、降伏円の中心 $\{\alpha\}$ は、下式のように、 $\{\tilde{M} - \alpha\}$ と同じ方向に移動するものと仮定する。

$$\{d\alpha\} = \{\tilde{M} - \alpha\} \cdot d\xi \quad \dots\dots (10)$$

また降伏円の半径の増分 $dM_r$ を次式のように仮定する。

$$2 dM_r = - \{\tilde{M} - \alpha\} [K_1] ([K_1] - [K_2])^{-1} \{dM^f\} / M_r \quad \dots\dots (11)$$

塑性変形が進行する間は $dF=0$ であることから次式を得る。

$$d\xi = (\{\tilde{M} - \alpha\} \{d\tilde{M}\} - M_r \cdot dM_r) / M_r^2 \quad \dots\dots (12)$$

### 2-2. 破壊モーメント増分 $\{dM^f\}$

破壊ポテンシャル $G=0$ を曲率平面上で定義する。曲率ベクトルが、破壊ポテンシャルの外側へ進むとすると破壊が進むものとする。また、Il'iushin<sup>3)</sup>の条件<sup>(注)</sup>すなわち次式を仮定する。

$$\{d\phi^f\} = - \{\partial G / \partial \phi\} \cdot d\kappa, \quad d\kappa \geq 0 \quad \dots\dots (13)$$

全曲率増分 $\{d\phi\}$ も図4のように接線、法線成分に分解する。

$$\{d\phi\} = \{d\phi^N\} + \{d\phi^T\}, \quad \{\partial G / \partial \phi\} \{d\phi^T\} = 0 \quad \dots\dots (14)$$

図2(c)を参照して次式を仮定する。

$$\{dM^f\} = - ([K_2] + [K_3]) \{d\phi^N\} \quad \dots\dots (15)$$

式(13)~(15)より次式を得る。

$$d\kappa = \frac{\{\partial G / \partial \phi\} \{d\phi\}}{\{\partial G / \partial \phi\} [Z] \{d\phi\}} \quad \dots\dots (16)$$

ここで  $[Z] = ([K_2] + [K_3])^{-1}$

$$\{dM^f\} = - \frac{\{\partial G / \partial \phi\} [Z] \{d\phi\}}{\{\partial G / \partial \phi\} [Z] \{d\phi\}} \{d\phi\} \quad \dots\dots (17)$$

式(2), (9), (17)を式(1)に代入すると、 $\{d\phi\}$ と $\{dM\}$ に関する対称な瞬間剛性行列を得る。

破壊ポテンシャル $G=0$ は初期状態を半径 $\phi_0$ 、中心 $\{0\}$ の円とし次のルールで拡大すると仮定する。まず、曲率平面上で降伏曲面を描くと、半径 $\phi_r = M_r / K_1$ 、中心 $\{\beta\} = \{\phi\} - [K_1]^{-1} \cdot \{\tilde{M} - \alpha\}$ の円になり、図5の点線のように $\{\phi\}$ とともに移動する。このとき破壊ポテンシャル $G=0$ は、図5の実線のように、前ステップまでの破壊ポテンシャル(ハッチ部分)と移動後の降伏曲面を包含する面積最小でかつ外側に凹でない曲面とする。

(注) Dougill<sup>4)</sup>が弾性破壊理論の中で破壊応力増分 $d\sigma_{ij}^f$ を求めるために用いた仮定であって、図6においてひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ を与えて取り除く間になされる仕事 $d^2W = - d\sigma_{ij}^f d\varepsilon_{ij} / 2$ (図6のハッチ部の面積)が非負であるというものである。塑性理論におけるDrucker<sup>2)</sup>の条件に対応する。本報の場合 $\{d\phi\}$ を与えて取り除く間になされる仕事は $d^2W = - [dM^D + dM^f] \{d\phi\}$ である。 $d^2W \geq 0$ となるには $- [dM^f] \{d\phi\} \geq 0$ が必要であり、式(13)を得る。

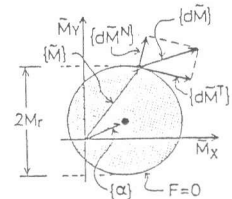


図3. 塑性ポテンシャルとモーメント増分の分解

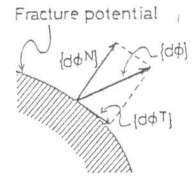


図4. 曲率増分の分解

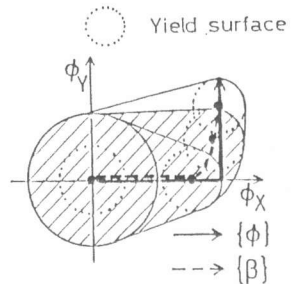


図5. 破壊ポテンシャルの拡大

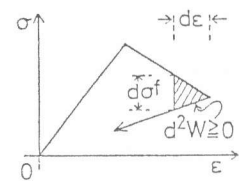


図6. Dougill<sup>4)</sup>の理論におけるIl'iushin<sup>3)</sup>の条件

3. 平面保持解析との比較

本節では、円形RC柱および中空RC杭の平面保持断面解析を行うことによって、前節で仮定した塑性ポテンシャルと破壊ポテンシャルの移動・縮小・拡大のルール（以後「理論」と略す）と比較する。

解析対象の材料特性のうち、鉄筋の応力・ひずみ関係は、図7に示す完全弾塑性型とする。コンクリートは図8に示す弾性破壊型とし、引張側は応力を負担しないものとする。

円形断面柱は、外径・100cm、かぶり厚 5cm、全鉄筋比  $P_G = 2\%$ 、平均軸力  $F_c/4$  とし、図9のように円周方向に32等分、半径方向に 5等分の分割を行う。中空断面杭は、外径45cm、肉厚 5cm、 $P_G = 1\%$ 、平均軸力  $F_c/3$  とし、図10のように円周方向に32等分の分割を行う。分割した要素内では、ひずみ一様とする。

柱と杭について、一方向に曲率  $\phi$  を与えた時のモーメント応答 ( $M-\phi$  関係) および中立軸の位置を、図11と図12に実線で示す。中立軸は断面中心の近傍を推移した。前節の理論を適用するため、これらの  $M-\phi$  関係を同図中の破線のように3つ折れ線で近似する。具体的な数値を表1に示す。平面保持解と理論との比較を容易にするため、折れ線モデルの降伏耐力  $M_0$  と破壊曲率  $\phi_0$

表1. 折れ線モデルの諸定数

	$K_1$ ( $\times 10^3$ kN·m <sup>2</sup> )	$K_2$	$K_3$	$M_0$ (kN·m)	$\phi_0$ ( $\times 10^{-3}/m$ )
柱	500	0.5	45	2548	10.1
杭	10	0.01	0.8	89.9	16.1

表2. 平面保持解析による円形断面柱の破壊曲面と降伏曲面および理論解との比較

	$\begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 20 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}/m$	$\begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 30 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}/m$	$\begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 20 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 20 \\ 20 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}/m$
破壊曲面			
降伏曲面			

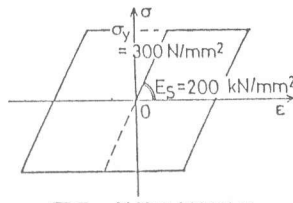


図7. 鉄筋の材料特性

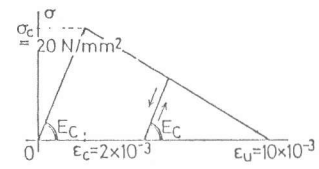


図8. コンクリートの材料特性

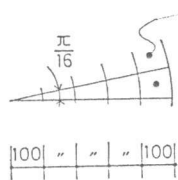


図9. 円形断面柱の分割

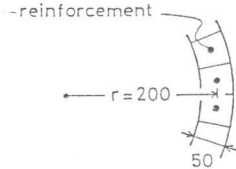


図10. 中空RC杭の分割

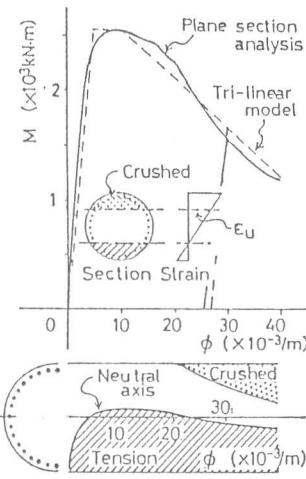


図11. 柱のM-phi関係と中立軸位置

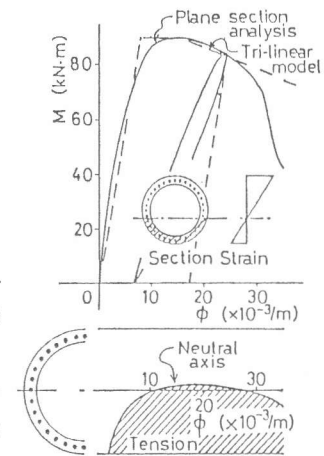
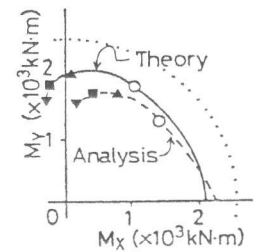


図12. 杭のM-phi関係と中立軸位置



- ▲  $\begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 10 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}/m$
- ▼  $\begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 20 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}/m$

図13.

$$\phi = \begin{Bmatrix} 20 \\ 20 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}/m$$

に向かうときのモーメント軌跡

は、平面保持解の最大耐力およびそのときの曲率とし、第2剛性 $K_2$ を十分に小さく定めた。

平面保持解析では、ある曲率履歴（例えば表2の右端の場合は、 $\{\phi\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 20 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 20 \\ 20 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} / m$ ）を与えたあと荷重（モーメント）をゼロまで戻す。次に、曲率平面上で荷重ゼロの点から30°きざみに放射状の曲率増分を与える。モーメントベクトルの絶対値が最大となるときの曲率およびモーメントを表2と表3の図面に黒丸で示す。これらを結んだ破線が、平面保持解析による破壊曲面と降伏曲面と言える。理論上の曲面は実線で、初期降伏曲面は点線で示した。（理論上の降伏曲面は、仮想モーメント平面上から $\{M\}$ の分だけ移動して示した。）

平面保持解析では、最大変形方向と直交方向への耐力の低下が著しく、降伏曲面は楕円状となった。破壊曲面は、特に柱の場合、理論解に比べて最大変形と直交方向へも拡大した。また、表2の右上欄のように、必ずしも外側に凸な曲線にならない例も見られた。しかし前節の仮定における基本的特徴、すなわち、降伏曲面、破壊曲面が載荷方向には縮小・拡大し、その反対側では初期の形状を保存するという特徴は、平面保持解析でも確認された。

最後に、柱と杭について $\{\phi\} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} / m$ から $\{\phi\} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 20 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} / m$ または $\{\phi\} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 15 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} / m$ まで変形させたときのモーメントの軌跡を図13、図14に示す。柱、杭とも、理論解の方が平面保持より速い位相でモーメントベクトルが移動するという違いはあるが、ほぼ類似の軌跡を描いた。

#### 4. 結論

(1) 曲率平面上に破壊ポテンシャルを仮定することによって、二軸曲げを受ける部材断面の耐力低下現象をモデル化できる。実モーメントから破壊モーメントを差し引いた仮想モーメント平面上で塑性ポテンシャルを仮定することによって、耐力低下時にも塑性変形が進行し塑性ポテンシャルが移動・縮小するというモデル化が可能となる。また、対称な瞬間剛性行列が得られる。

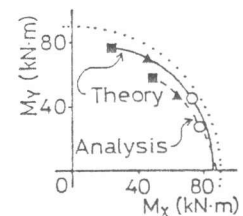
(2) 円形R/C柱断面および中空R/C杭断面の平面保持解析を行ったところ、降伏曲面・破壊曲面が、載荷方向には縮小・拡大しその反対側では初期の形状を保存するという、本報の仮説と類似の傾向が見られた。しかし平面保持解析では載荷方向と直交方向へも縮小・拡大する傾向があり、本報の仮説についてはさらに検討を要する。

#### 〈参考文献〉

- (1) Ziegler, H., "A Modification of Prager's Hardening Rule," Quartly Appl. Math., Vol.17, No.1, pp.55-65, 1959.
- (2) Drucker, D. C., "A Definition of Stable Inelastic Material," J. Appl. Mech. Vol.26, pp.101-106, March 1959.
- (3) Il'iushin, A. A., "On the Postulate of Plasticity," Appl. Mech. 25, pp.746-752, 1961.
- (4) Dougill, J. W., "On Stable Progressively Fracturing Solids," ZAMP, Vol.27, Fasc.4, pp.423-437, 1976.
- (5) Takizawa, H. and H. Aoyama, "Biaxial Effects in Modelling Earthquake Response of R/C Structures," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.4, No.5, pp.523-552, July 1976.
- (6) Bazant, Z. P. and S. S. Kim, "Plastic-Fracturing Theory for Concrete," ASCE, Vol.105, No.EM3, pp.407-428, June 1979.
- (7) 前川宏一・岡村甫：「弾塑性破壊モデルに基づくコンクリートの平面応力構成則」, コンクリート工学 Vol.21, No.5, pp.87-99, 1983年5月。

表3. 平面保持解析による中空R/C杭の破壊曲面と降伏曲面および理論解との比較

	$\begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 20 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} / m$	$\begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 25 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} / m$	$\begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 20 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 20 \\ 15 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} / m$
破壊曲面			
降伏曲面			



- $\begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 5 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} / m$
- $\begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 15 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} / m$

図14.

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 15 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} / m$$

に向かうときのモーメント軌跡