

# [135] 統計的ばらつきを考慮したコンクリート構造のクリープ解析

正会員 橋 龍哉 (横浜国立大学工学部)

## 1. 序 論

コンクリート構造物の長期にわたる力学的特性を支配する要因として、コンクリートのクリープと乾燥収縮があげられるが、これらの物理現象に含まれる統計的ばらつきは、コンクリートの他の材料特性に含まれるばらつきに比べて大きいことが報告されている。<sup>1)</sup>したがって、コンクリート構造物の長期にわたる耐久性等を保証するためには、コンクリートのクリープと乾燥収縮のばらつきの影響も含めて考慮することが、設計上必要であると思われる。

本研究では、コンクリートのクリープを主として考慮し、クリープひずみに含まれる統計的ばらつきを取り入れたコンクリート構造解析を行うための一解析手法を提案する。コンクリートの乾燥収縮ひずみに含まれるばらつきは、クリープと同様の手法で扱うことが可能である。コンクリートのクリープひずみに含まれる統計的ばらつきには、コンクリートを構成する材料に関する内部要因と、構造物の環境条件に関する外部要因等があるが、本研究では、これらの要因を容易に考慮できるように、クリープ係数に基づくクリープ構成則を用いる。<sup>2)</sup>解析手法は2次元有限要素法に基づき、コンクリート構造物の設計上必要と思われる、構造物各点における変位および応力の期待値と標準偏差を算出する。

## 2. 有限要素法を用いたクリープ解析手法

温度や湿度等のコンクリート構造物の外部環境条件のばらつきがコンクリート構造物の力学的挙動におよぼす影響を、コンクリートを線形粘弾性体と仮定し、解析的または数値的に求める研究は従来から行われているが、<sup>3, 4, 5)</sup>クリープという材料特性のばらつきを考慮して構造物を解析した例は少ない。これは、構造物各点における材料特性のばらつきを考慮して構造物の力学特性のばらつきを求める際、通常の統計計算を行うと非常に多くの計算時間を必要とすることが原因の一つであると考えられる。本研究では、この統計計算を比較的容易に行えるように考案された確率有限要素法を以下に示されるように用いる。<sup>6, 7)</sup>

コンクリートの緩和弾性係数  $\bar{E}$  が次のようにばらつきを含む場合を考える。

$$\bar{E}(x, y) = \bar{E}^0 \{1 + \alpha(x, y)\} \quad \dots \dots (1)$$

ここに  $\bar{E}$  は点  $(x, y)$  における緩和弾性係数、 $\bar{E}^0$  は  $\bar{E}$  の期待値、 $\alpha$  は期待値 0 の確率変数である。簡単のため、また、2次元のクリープ・データが少ないことから、ばらつきは緩和弾性係数のみに含まれ、クリープ・ポアソン比は確定論的に与えられる場合を考える。コンクリート構造物は同一寸法の有限要素により分割され、材料特性は要素内で一定とすると、第  $k$  要素の緩和弾性係数  $\bar{E}_k$  は次のように与えられる。

$$\bar{E}_k = \bar{E}^0 (1 + \alpha_k) \quad ; \quad \alpha_k = \alpha(x_k, y_k) \quad \dots \dots (2)$$

ここに  $x_k, y_k$  は要素の圆心座標を表わす。第  $k$  要素の要素剛性マトリックス  $k$  は

$$k = k^0 + k^1 \alpha_k \quad \dots \dots (3)$$

と表わされ、全体剛性マトリックス  $K$  は、式 (3) に基づき、次のように表わされる。

$$K = K^0 + \sum_{k=1}^n K_k^1 \alpha_k \quad \dots \dots (4)$$

ここに  $n$  は要素数を表わす。

構造物の各節点の変位を表わす変位ベクトル  $U$  は、1次摂動法に基づき、次のように表わされると仮定する。

$$U = U^0 + \sum_{k=1}^n U_k^1 \alpha_k \quad \dots \dots (5)$$

構造物全体の剛性方程式は、荷重ベクトルを  $F$  とすると次のように表わされる。

$$K U = F \quad \dots \dots (6)$$

式(6)に式(4)と式(5)を代入し、 $\alpha_k$ の2次の項を省略すると次式が得られる。

$$(K^0 U^0 - F) + \sum_{k=1}^n (K^0 U_k + K_k U^0) \alpha_k = 0 \quad \dots (7)$$

式(7)より、 $U^0$ および $U_k$ は次のように求められる。

$$U^0 = (K^0)^{-1} F ; \quad U_k = - (K^0)^{-1} K_k U^0 \quad \dots (8)$$

第m要素の応力ベクトル  $\sigma_m = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$  は、応力マトリックスSを次のように仮定することにより求められる。

$$\sigma_m = S u_m ; \quad S = S^0 + S^1 \alpha_m ; \quad u_m = u_m^0 + \sum_{k=1}^n u_{mk}^1 \alpha_k \quad \dots (9)$$

ここに、 $u_m$ は第m要素に関する変位の部分ベクトルである。式(9)を整理し、 $\alpha$ に関する高次の項を無視すると、次のようになる。

$$\sigma_m = \sigma_m^0 + \sum_{k=1}^n \sigma_{mk}^1 \alpha_k ; \quad \sigma_m^0 = S^0 u_m^0 ; \quad \sigma_k^1 = S^0 u_{mk}^1 + \delta_{km} S^1 u_m^0 \quad \dots (10)$$

ここに $\delta_{km}$ はクロネッカーのデルタである。以上より、コンクリート構造物の応力の期待値 $E[\sigma]$ と分散 $Var[\sigma]$ は次のように求まる。

$$E[\sigma] = \sigma^0 \quad \dots (11)$$

$$Var[\sigma] = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n diag[\sigma_k^1] \sigma_m^1 E[\alpha_k \alpha_m] ;$$

$$E[\alpha_k \alpha_m] = R(x_m - x_k, y_m - y_k) \quad \dots (12)$$

ここに、 $diag[\sigma_k^1]$ は $\sigma_k^1$ を対角成分ベクトルとする $3 \times 3$ の対角マトリックスであり、 $R(x_m - x_k, y_m - y_k)$ は $\alpha(x, y)$ の自己相関関数である。

コンクリートのクリープ特性は、式(1)の緩和弾性係数により表わされるものとする。ここではクリープ特性は次のように与えられるクリープ係数 $\phi$ によって表現されると仮定する<sup>(2,8)</sup>

$$\phi(t, t_0) = \beta_a(t_0) + \phi_f \beta_f(t, t_0) + \phi_d \beta_d(t, t_0) \quad \dots (13)$$

ここに、 $\beta_a$ は非可逆クリープ、 $\beta_f$ は流れクリープ、 $\beta_d$ は遅れ弾性クリープを表わす。また、 $t$ は材令、 $t_0$ は載荷時点の材令である。ここでは、これらの関数を次のように仮定する。

$$\beta_a(t_0) = 0.8 \exp(-0.2 t_0) ; \quad \beta_d(t, t_0) = 1 - \exp(-0.02(t - t_0)) ;$$

$$\beta_f(t, t_0) = [t/(t + \psi(r))]^{1/3} - [t_0/(t_0 + \psi(r))]^{1/3} ; \quad \dots (14)$$

$$\psi(r) = 20r + 200 \quad (r \leq 40)$$

$$\phi_d = 0.4 ; \quad \phi_f = \phi_{f1} \phi_{f2} \phi_{f3} ; \quad \dots (15)$$

$$\phi_{f1} = 4.5 - w/28 ; \quad \phi_{f2} = 1.2 + \exp(-0.14 r^{2/3}) ; \quad \phi_{f3} = 0.8 \quad (s \leq 30)$$

ここに、 $w$ は環境の相対湿度(%）、 $r = 2A/p$ (cm)、 $A$ は断面積、 $p$ は断面外周の長さ、 $s$ はスランブ(cm)である。

確率変数 $\alpha$ の自己相関関数の形状は、ばらつきがコンクリート構造物内で周期的に変化している場合を考え、次のように仮定する。

$$R(\lambda_1, \lambda_2) = 0.25 Var[Q] \cos(2\pi \lambda_1 / \hat{L}) \cos(2\pi \lambda_2 / \hat{L}) \quad \dots (16)$$

$$\alpha(x, y) = Q \cos(2\pi x / \hat{L} + \phi_1) \cos(2\pi y / \hat{L} + \phi_2)$$

ここに、 $Q$ は期待値0、分散 $Var[Q]$ の独立な確率変数、 $\phi_1$ 、 $\phi_2$ は $(0, 2\pi)$ の区間で一様分布する独立な確率変数、 $\hat{L}$ は分布の波長を表わす。

### 3. コンクリート構造物のクリープ解析例

上記の統計的ばらつきを考慮したクリープ解析手法を用いて、図-1に示すような、曲げと軸力を受ける対称断面の鉄筋コンクリートはりを解析する。ここでは、コンクリートはりの断面全体に圧縮応力が作用する場合を考える。曲げと軸力ははりの端部において与えられ、各々、 $M_0 = 10^6$  Kgf·cm、

$N_0 = 10^5$  Kgf である。これらの荷重はコンクリートの材令が28日の時点で与えられ、以後一定に保たれるものとする。また、有限要素による鉄筋コンクリートはりの分割が図-1に示される。要素特性の等方性を考慮し、4節点正方形要素を用いている。鉄筋は線要素で近似される。

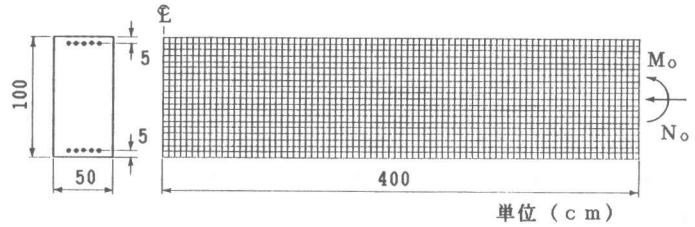


図-1 曲げと軸力を受ける鉄筋コンクリートはり

鉄筋の断面積は断面の上側と下側の鉄筋について、各々、 $A_S = 25 \text{ cm}^2$  であり、弾性係数は  $E_S = 2.1 \times 10^5 \text{ Kgf/cm}^2$  とする。鉄筋の材料特性は確定論的に与えられる。コンクリートのクリープ特性は、式(13)~(16)により与えられる。荷重載荷時点における緩和弾性係数、すなわち、弾性係数の期待値は  $E^0 = 2.1 \times 10^5 \text{ Kgf/cm}^2$ 、クリープ・ポアソン比は  $\nu = 0.2$  とする。クリープ・ポアソン比は確定論的に与えられるものとする。クリープ特性のばらつきを表わす自己相関関数の形状は式(16)により与えられる。ここでは、 $L = 50 \text{ cm}$  の場合の計算例を示す。また、緩和弾性係数の変動係数は20%とする。コンクリートのクリープ特性は温度  $20^\circ\text{C}$ 、湿度75%、スランプ10 cm、および普通ポルトランド・セメントの場合について考える。クリープ係数は式(13)により求められ、その経時変化が図-2に示される。

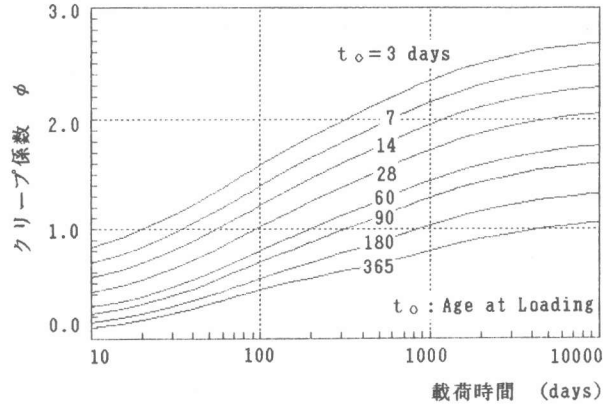


図-2 クリープ係数の経時変化

図-3から図-5にたわみ、コンクリートの応力、および、鉄筋の応力の期待値と標準偏差が示される。これらの図においては、各々の量は荷重載荷時点の弾性係数を用いて計算した値により割られ、無次元化されている。また、たわみと応力は、スパン中央における値である。

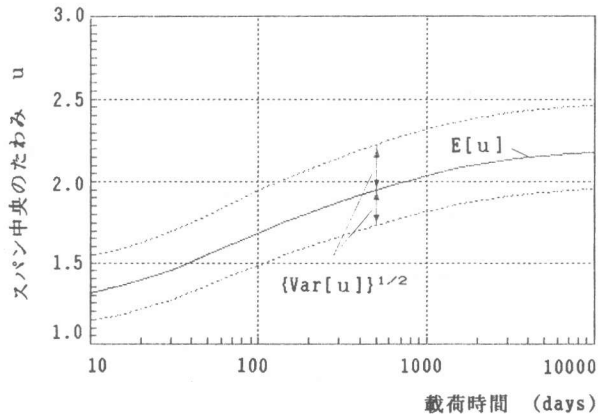


図-3 スパン中央のたわみの期待値と標準偏差

はりのスパン中央のたわみの期待値と分散の経時変化は図-3に示される。たわみは桁高中央の位置の鉛直方向変位により代表される。コンクリートのクリープの影響によりたわみの期待値とばらつきが次第に増加しているのがわ

かる。断面上縁と下縁におけるコンクリートの応力の期待値と標準偏差の経時変化は図-4に示される。コンクリートのクリープの影響により、コンクリートの応力の期待値とばらつきが次第に減少しているのがわかる。また、断面上部と下部に配筋された鉄筋の応力の期待値と分散の経時変化が図-5に示される。この場合、コンクリートの応力とは逆に、鉄筋の応力の期待値とばらつきは次第に増加することがわかる。

#### 4. 結論

コンクリートのクリープの統計的ばらつきを考慮した2次元有限要素解析が、摂動法を用いた確率有限要素法により可能であることが示された。従来、統計的ばらつきを考慮した解析は、構造物の形状が単純な場合にのみ解析的に求められていたが、ここで示された解析手法を用いることにより、一般的な形状の鉄筋コンクリート構造物を扱うことが可能である。この解析手法は一般的であり、クリープ特性を緩和弾性係数により表わすことができれば、任意のクリープ構成則を用いることができる。ただし、計算上、材料特性に含まれる確率変数の自己相関関数の形状を仮定する必要があるため、この仮定方法について検討することが今後必要であると思われる。また、本研究では、クリープひずみの各成分のばらつきが等しいと仮定したが、各成分のばらつきを独立に考慮することも場合により必要であると思われる。

#### 参考文献

- 1) Bazant, Z. P., "Probabilistic Analysis of Creep Effects in Concrete Structures," Proc. of ICOSSAR, 4th International Conference on Structural Safety and Reliability, Kobe, Japan, May, 1985.
- 2) Diamantidis, D., Madsen, H. O., and Rackwitz, R., "On the Variability of the Creep Coefficient of Structural Concrete," Materials and Structures, Vol.17, No.100, 1984, pp.321-328.
- 3) Tsubaki, I., "Thermal Stresses in Concrete Subjected to Periodic Temperature Change," Trans. of JCI, Vol.6, 1984, pp.347-354.
- 4) Tsubaki, I., and Bazant, Z. P., "Random Shrinkage Stresses in Aging Viscoelastic Vessel," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.108, No.EM3, June, 1982, pp.527-545.
- 5) Buyukozturk, O., and Wium, D. J. W., "Performance Evaluation of Precast Segmental Bridges for Long-Term Effects," Proc. of 5th ASCE, EMD Special Conference, August, 1984.
- 6) Vanmarcke, E., and Grigoriu, M., "Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams," Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.109, No.EM5, 1983, pp.1203-1214.
- 7) 中桐・久田：確率有限要素法入門、培風館、1985。
- 8) CEB-FIP, Model Code for Concrete Structures, CEB Bulletin No.124/125-E, Paris, 1978.

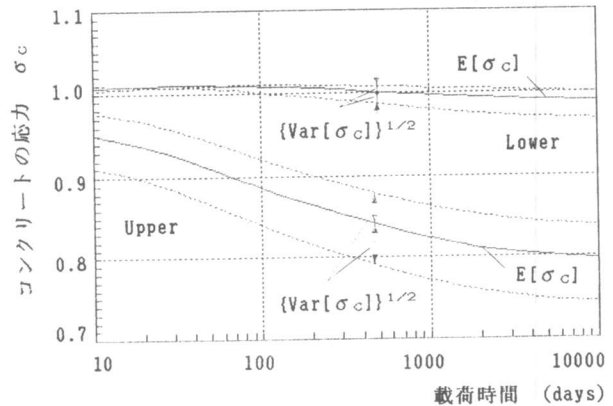


図-4 コンクリートの応力の期待値と標準偏差

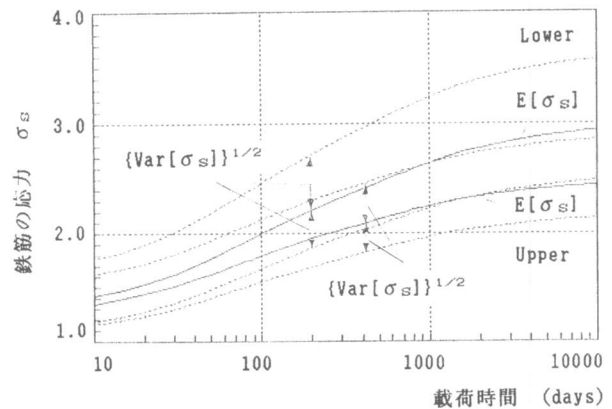


図-5 鉄筋の応力の期待値と標準偏差