

## 論 文

## [2016] アンカースリップの影響を考慮した PC 梁部材の緊張解析

正会員 上田 正生（北海道大学工学部）

正会員○和田 俊良（北海道職業訓練短期大学校）

正会員 広瀬 雅明（東急建設札幌支店）

## 1. はじめに

著者らは先に、曲線テンドンを有する PC 梁部材のための精・粗 2 種の有限要素を開発し、その基本的な解析法と適用性について報告した<sup>1)</sup>。本論文では、既報の要素のうちの精密要素に基づき、テンドンとシース間の摩擦およびアンカースリップによるプレストレスの減衰の影響をも容易に考慮しうる PC 梁の緊張解析手法について記述し、二・三の数値計算例を掲げて若干の検討・考察を行うことにする。

## 2. 曲線テンドンを有する PC 梁の緊張解析

## 2.1 有限要素方程式

既に報告したように、曲線(パラボリック)テンドンを有する PC 梁部材の解析の基礎となるのは図 1 に示す PC 梁要素であり、この場合の有限要素方程式は下式で与えられる<sup>1)</sup>

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uw} & K_{us} \\ K_{uw}^T & K_{ww} & K_{ws} \\ K_{us}^T & K_{ws}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_u \\ \delta_w \\ \delta_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_u \\ P_w \\ P_s \end{bmatrix} \quad (1)$$

但し、 $\{\delta_u\}, \{\delta_w\}, \{\delta_s\}$ ：それぞれ梁の軸方向変位、曲げ変位、および全テンドンの設置曲線に沿うすべり変位に係る PC 梁要素の節点変位ベクトル、

$\{P_u\}, \{P_w\}, \{P_s\}$ ：それぞれ節点変位 $\{\delta_u\}, \{\delta_w\}, \{\delta_s\}$ に対応する外荷重ベクトルで、 $\{P_s\}$ は緊張端における導入緊張力ベクトル、

$[K_{uu}], [K_{uw}], [K_{us}], [K_{ww}], [K_{ws}], [K_{ss}]$ ：部分剛性マトリックス

## 2.2 PC 梁の力学性状における“摩擦による緊張力減衰の効果”的算入法

$m$  個（任意である）のテンドン層を有する PC 梁のための(1)式の有限要素方程式は、既に報告したように付着係数の値のみを調整することによって、アンボンドから完全付着状態に至るまでの PC 梁を一貫して取り扱うことが可能であり、また、テンドンとシース間に摩擦作用なしのアンボンド状態を仮定し得るならば、テンドンの緊張力導入時の梁の挙動も同式の右辺の荷重ベクトル $\{P_s\}$ に、対応する緊張力を等置するとによって容易に解析することができる。しかし実際には、テンドンとシース間の摩擦と、施工時に生ずるシース自身の波打ちによって、導入された緊張力は緊張端から離れるにしたがって徐々に減衰していき、さらにプレストレス導入後、テンドンを緊張端において梁本体に定着する際にアンカースリップが生じ、緊張力分布にさらなる変化を惹起することになる。従って、(1)式の有限要素方程式のみでは、通常の弾性変形とは全く異なる現象であるこの摩擦による緊張力減衰の効果を考慮することは出来ない。これが PC 梁の力学性状における影響を勘案するには、何らかの方法をとることが必要になる。

## (1) テンドンに沿う緊張力と摩擦力分布の評価

テンドンとシース間の摩擦による緊張力の減衰の PC 梁の力学性状における影響を考慮するには、まずテンドン曲線に沿う緊張力と摩擦力の分布形状そのものを評価しなければならない。

## A) 緊張力導入時

テンドン層はすべて類型的に取り扱うことが可能なので、任意の  $i$  層のみを考える。よく知ら

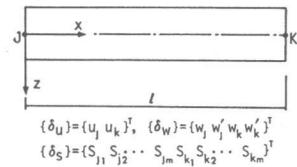


図 1 テンドンの付着すべりを考慮した  
PC 梁要素

れているように、緊張端から  $x$  だけ離れた位置におけるテンドン層  $i$  の緊張力  $P_{s,i}$  は次式で表示することができる。<sup>2)</sup>

$$P_{s,i} = P_{s,0} \cdot e^{(-\mu_i \theta_{ix} - \lambda_i s_i)} \quad (2)$$

但し  $P_{s,0}$  :  $i$  層のテンドンの導入緊張力

$\theta_{ix}$  : 緊張端から  $x$  点までのテンドンの角変化

$\mu_i$  : テンドンの単位角(rad)変化当りの摩擦係数

$\lambda_i$  : テンドンの単位長さ当りの摩擦損失係数

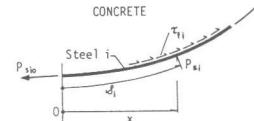


図2 テンドンに働く接線方向摩擦力

上式の右辺の  $s_i$  は、 $i$  層のテンドンの緊張端から  $x$  点までの曲線長（図2）であるから、この点のテンドンの材軸からの距離を  $h_{s,i}$  とすれば下式で求められる。

$$s_i = \int_0^x \sqrt{1 + (dh_{s,i}/dx)^2} dx \quad (3)$$

また、この位置におけるテンドン曲線  $i$  の接線方向（図2参照）に働く単位長さ当りの摩擦力  $\tau_{ti}$  は、曲線  $s_i$  に沿う緊張力  $P_{s,i}$  の変化率であるから次式で表される。

$$\tau_{ti} = dP_{s,i}/ds_i = (dP_{s,i}/dx)/\sqrt{1 + (dh_{s,i}/dx)^2} \quad (4)$$

従って、梁全部材長に亘る各テンドンに沿う緊張力と摩擦力分布は、全要素の個々の節点ごとに  $P_{s,i}$  と  $\tau_{ti}$  の値を計算することによって求められる。

### B) アンカースリップの生ずる定着時

各層のテンドンに所望の緊張力が導入されると、これを緊張端において梁本体に定着することになるが、この時緊張端にアンカースリップ  $dS_{ti}$  が生じ、テンドンの緊張力と摩擦力分布に更なる影響をおよぼすことになる。ここではそのアンカースリップの影響量の評価を考える。

図3の(a),(b)は、3種類の曲線(curve 1,2,3)の連結からなる任意の  $i$  層のテンドンのプロファイルと、その定着前・後の同テンドンの緊張ひずみ分布(緊張力分布と相似形)を、それぞれ概念的に図示したものである。同図の(b)の斜線部がアンカースリップ  $dS_{ti}$  の影響によって生じたテンドンの緊張ひずみの低下分とその影響区間を表しており、また周知のように、この斜線部の面積がアンカースリップ量  $dS_{ti}$  と等価になる。換言すれば、スリップ量  $dS_{ti}$  は緊張端から  $L_{ir}$  までのテンドンのひずみの変化によって吸収されたと云うことである。また、この影響区間  $L_{ir}$  における定着前・後のテンドンのひずみ分布曲線O-P-Q-RとO'-P'-Q'-R'は、云うまでもなく図中の直線R<sub>a</sub>-R'に関して対称となる(従って、この間のアンカースリップ後の摩擦力は定着前と+/-の符号が変わるだけでその大きさは同一となる)から、先ず  $L_{ir}$  の値を求めることが問題になる。

#### [影響区間 $L_{ir}$ の計算]

$L_{ir}$  区間の緊張力の変化(図3 (b)の例では、O-P, P-Q, Q-R部分)を直線と仮定すれば、 $L_{ir}$  は容易に決定できるが<sup>3)</sup> 本来の曲線分布として  $L_{ir}$  をより正確に求めようとすると、ことはそれほど簡単ではない。例えばGreunen等は正確には(3)式で与えられるテンドンの曲線長  $s_i$  を  $x$  座標値で代用する( $s_i \approx x$ )という幾つかの近似を導入し、繰り返し計算によってバラボリックテンドンの  $L_{ir}$  を求める方法を提示している<sup>4)</sup> このGreunen等の手法は有用であるが、同一テンドン層が幾つかの曲線の連結によって形成されている場合には、その計算アルゴリズムはかなり複雑なものとなる。従って本論文では、以下に述べるような単純な方法を用いて  $L_{ir}$  をもとめることとした。

即ち、緊張端から  $L_i$  だけ離れた位置の節点をJとする。いま仮にこの位置が、あるアンカースリップ量に対応するその影響区間だとすると、このときのスリップ量  $dS_{ij}$  は次式で求められる。

$$dS_{ij} = 2 \int_0^{L_i} (\epsilon_{s,i} - \epsilon_{s,j}) dx \quad (5)$$

但し、 $\epsilon_{s,i}$  :  $i$  層のテンドンの任意位置  $x$  のひずみ

$$\varepsilon_{sJ} : i \text{ 層のテンドンの節点 } J \text{ の位置のひずみ}$$

上式中の  $\varepsilon_{si}$ 、 $\varepsilon_{sJ}$  は既知であるから、その積分は容易である。図 3 (c)に示すように、全節点位置に対応する  $dS_{ij}$  を計算しておき、最後に緊張端で生ずる実際のアンカースリップ量  $dS_{i0}$  に相当する  $L_{iR}$  をもとめその解とする。先に述べた Greunen 等の方法はパラボリックテンドンへの適用のみに限られているのに対して、ここで用いた  $L_{iR}$  の計算アルゴリズムは極めて単純であり、どのようなテンドン曲線形にも使用することが可能である。

#### [区間 $L_{iR}$ 内のテンドンの緊張力分布の修正]

先述したように区間  $L_{iR}$  での摩擦力分布は、正負の符号が変わるものでアンカースリップのない場合と同形となるから、テンドンの緊張力分布の修正のみが問題となる。 $L_{iR}$  が部材の限界区間長  $L_{iLM}$  (片引きの場合には、対応するテンドンの緊張端から固定端まで、また対称両引きの場合はその対称軸までの距離) より小さい場合には、先の図 3 (b)でみたように、その分布形は容易にもとめられるので、 $L_{iR}$  が  $L_{iLM}$  より大きい場合が問題となる。

図 4 はこのときの  $i$  層のテンドンの緊張力分布の変化を例示したものである。区間  $L_{iLM}$  内で吸収されるスリップ量を  $dS_{iLM}$  (この値は(5)式から得られる) とすると、緊張端で生じた実際のスリップ量  $dS_{i0}$  の差に相当する量が吸収されずに残った分であり、これがこのテンドン全体の緊張力の低下として、区間  $L_{iLM}$  内に一様に配分されることになる。従って、この区間のアンカースリップ後のテンドンの緊張力  $P_{si}$  を、 $L_{iR} \leq L_{iLM}$  と  $L_{iR} > L_{iLM}$  の各場合について表示すると、それぞれ次のようになる。

①  $L_{iR} \leq L_{iLM}$ :

$$P_{si} = 2 P_{siR} - P_{si} \quad (6)$$

②  $L_{iR} > L_{iLM}$ :

$$P_{si} = (2 P_{iLM} - P_{si}) - (dS_{i0} - dS_{iLM}) / L_{iLM} \quad (7)$$

但し、 $P_{si}$ : アンカースリップ前の緊張力、

$P_{siR}$ :  $L_{iR}$  位置のアンカースリップ前の緊張力

$P_{iLM}$ :  $L_{iLM}$  位置のアンカースリップ前の緊張力

#### (2) 緊張力の減衰を考慮した PC 梁の緊張解析法

前項 (1) では摩擦理論に基づいてテンドンの緊張力と摩擦力分布を求めたが、本項では、これらの分布力が PC 梁に引き起こす力学的な影響を算定する方法について考える。本論文で使用している有限要素を用いて PC 梁の緊張解析を行う方法としては、A) 導入緊張力を緊張端に作用する外荷重として取り扱う方法<sup>5)</sup>、B) 緊張力と摩擦分布を初期応力として取り扱う方法<sup>6)</sup> の二つの手法が考えられる。以下ではこれらの各手法について概述する。

A) 導入緊張力を緊張端に作用する外荷重として取り

扱う方法

緊張力を外荷重として取り扱う場合、テンドンとシース間に完全アンボンドを仮定し得るなら、前節 2.2 で既に述べたように、その緊張解析は極めて容易である。この手法によつて両者間の摩擦作用を考慮するには幾つかの方途が考えられるが、ここでは、「緊張力を緊張端における外荷重として作

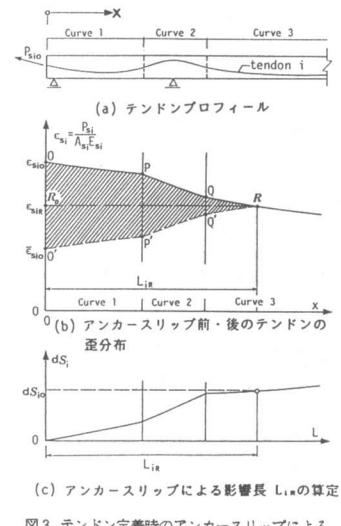


図 3 テンドン定着時のアンカースリップによる影響区間長  $L_{iR}$  算定のための概念図

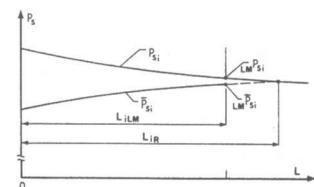


図 4 影響区間長  $L_{iR}$  が限界区間長  $L_{iLM}$  より大きい場合のアンカースリップ前・後のテンドンの緊張力分布

用させつつ、(4)式で評価される摩擦力分布を初期応力として構造系に強制する」という方法を用いる。即ち、まず各テンドン層の全要素節点の摩擦力を(4)式により計算する。次に、これらの節点摩擦力を要素内で線形変化するものと仮定して、全テンドン層に関する等価節点荷重に変換する。更にこの等価節点荷重と緊張荷重を(1)式の有限要素方程式に適用して、その結果として計算される各テンドンの摩擦力分布が、(4)式で評価された摩擦力分布に一致するまで繰り返し計算を行い、結果として(2)式には等しいテンドンの緊張力分布を具現し解析を終える。この方法は次に述べるB)の手法より解析手順自体かなり単純になるが、アンカースリップの影響の取扱いが困難（理論的には可能であるが）となるため、ここではこの影響を考慮していない。

#### B) 緊張力と摩擦分布を初期応力として取り扱う方法

この方法は、前項(1)で求めたテンドンの緊張力と摩擦力分布を内力と見做し、これらの分布形を初期応力法を用いて構造系に強制することにより、摩擦作用を考慮したP C梁の緊張解析を行うものである。即ち、まず(2)式（必要に応じては(6),(7)式）により各テンドン層の全要素節点の緊張力を求め、これらの節点緊張力を要素内で線形変化するものと仮定して、全テンドン層に関する等価節点荷重に変換する。次に、各テンドン層の節点摩擦力をA)の場合と同様にして等価節点荷重に変換し、これと今ここで求めた各等価節点荷重を共に荷重項として(1)式の有限要素方程式に適用し、結果として得られる緊張力と摩擦分布が、先に計算しておいたこれと対応する分布形に一致するまでこの初期応力法を繰り返し所望の解を得るものである。

尚、ここでは紙幅の制約もあり、A), B) 2種の方法の基本的な解析手順について概述するに留め詳細には亘れなかったが、前項(1)の(2)~(4)式をみても明らかなように、各テンドンの緊張力と摩擦力分布はその曲線形に大きく依存しており、これらの分布力をより正確に求めるためには、緊張力の導入に伴うP C梁自身の変形が各テンドン曲線形におよぼす影響をも考慮することが必要になる。本解析法では、この影響を算入することは極めて容易（各テンドンの原曲線に梁の撓み曲線を加算しこれを新たなテンドン曲線としてシミュレートするだけでよい）であり、上で述べたA), B)両手法には共にその影響が考慮されている。

### 3. 数値計算例と考察

本論文で提案したP C梁部材の緊張解析法による計算例を示すため、図5に掲げるような3本のバラボリックテンドンを有するモデルT型梁の解析を行い、若干の検討・考察を試みる。ただし、この梁のテンドンは両引きでジャッキアップされ、各テンドンには緊張端においてそれぞれ144tの緊張力が導入されるものとする。

#### (1) アンカースリップがない場合

図6は前節で展開したA), B)二種の本解析値の相違を、撓み、曲げモーメント、テンドン応力、および摩擦力の各分布曲線で調べたものである。図中の両解析値は全ての分布曲線について良好な一致をみせており、両解析手法の等価性が明らかである。

P C梁の緊張解析を行う場合に留意すべき点としては、先に述べた梁自身の変形がテンドン曲線形状におよぼす影響の他に、シースの付設によるコンクリート断面の欠損が梁の剛性におよぼす影響の問題がある。本解析法では、これらの点をも容易に考慮可能であり、図6に掲げたA), B)両解析値では、既にその影響が考慮されている。図7と図8は、これらを無視した場合、解析値にどの程度の差異が生ずるかを調べたものである。即ち、図7が梁の撓み（シースによるコンクリート断面の欠損は考慮）の影響を、また図8はシースによるコンクリート断面の欠損（梁の撓みの影響は考慮）の影響をみたもので、両図の結果はそれぞれ、梁自身の撓みのテンドン曲

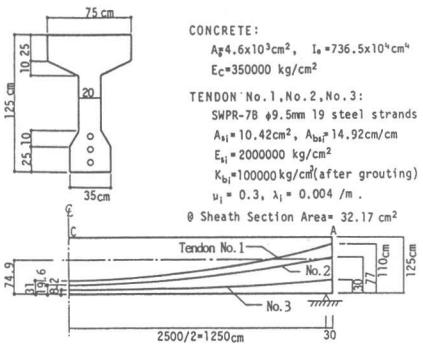


図5 モデルPC梁の概要

線形によれば影響は殆ど無視し得ること、またシースの付設によるコンクリート断面の欠損を無視すると、梁の撓み曲線が過小評価（梁中央点で6%弱撓みが小さくなる）されるが、曲げモーメントや他の応力曲線には差異が生じないことを示している。なお因みに、テンドンの緊張力による曲げ上げの効果を、各テンドンの梁中央点の緊張力を用い、上向きの等分布荷重に置き代えて取り扱う慣用法<sup>2)</sup>（シースによる断面欠損は考慮できない）によって中央点の撓みを求めてみると、その値は5.92cmとなり、シースによるコンクリート断面の欠損を無視した図8の本解析値5.83cm（これを考慮した場合の値は6.18cm）に近い値が得られる。

## (2) アンカースリップが有る場合

図9は各テンドンのアンカースリップ量を7mmと仮定した場合の本解析値(B)と、これを無視した先の図6の計算結果とを比較して示したものである。同図(a)～(h)には、PC梁の力学性状におけるアンカースリップの影響が明瞭に例示されている。図中の(f),(g),(h)の摩擦力分布に注目すると、アンカースリップによる緊張力の減衰区間は、1層目のテンドンでは緊張端から12.472mで梁中央点まで達していないが、他の2,3層のその区間は梁中央点にまでおよんでいる。この緊張力減衰区間を既往の慣用法で求めてみると<sup>2)</sup>、誤差の最も大きな1層目の場合で12.123mとなり、より精密な本解析値との差は高々2.3%に過ぎないことを知る。また、アンカースリップに起因して生ずるテンドンの主要点の緊張力損失は、本解析法では、緊張端でテンドン層1,2,3の順にそれぞれ $\Delta P_{s10}=23.03t$ ,  $\Delta P_{s20}=21.62t$ ,  $\Delta P_{s30}=19.60t$ となる。

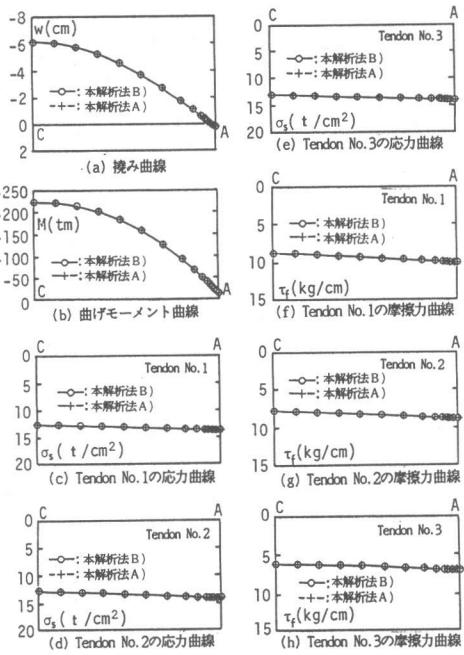


図6 本解析法A), B)の解の比較

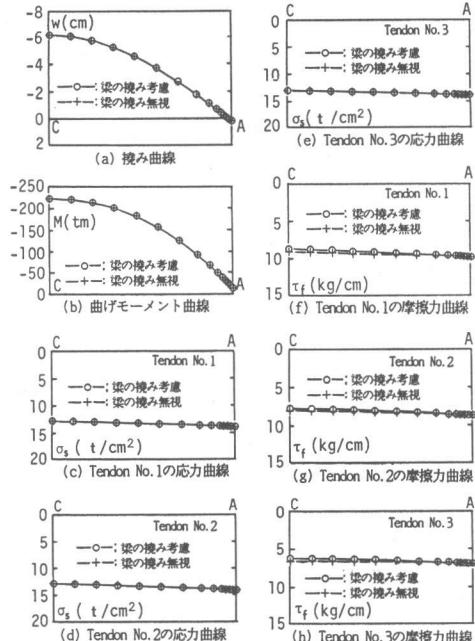


図7 梁の撓みのテンドン曲線形に及ぼす影響の検討

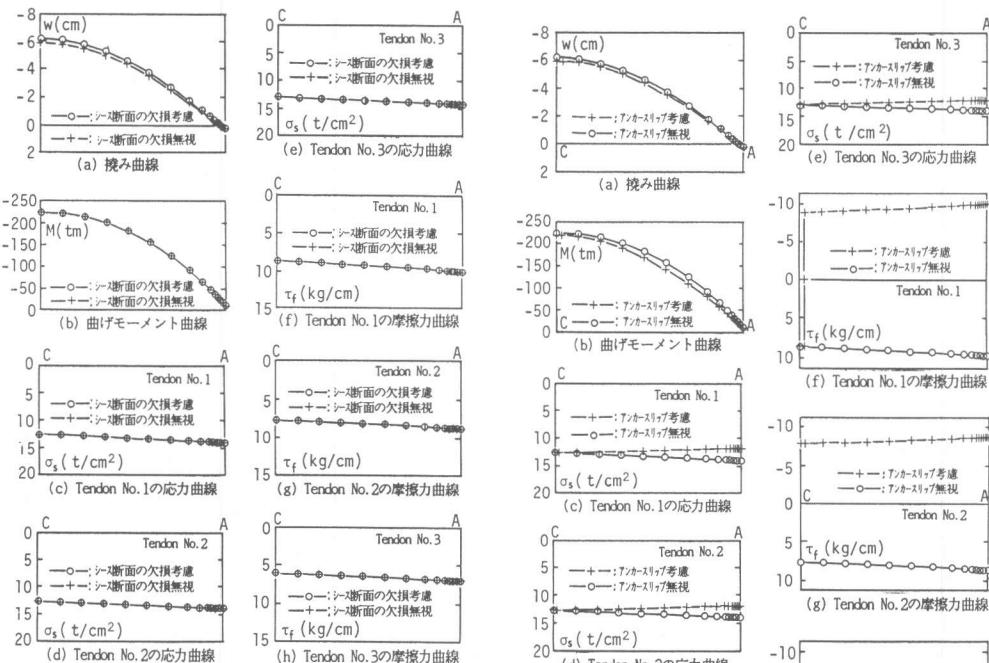


図8 シースの付設による梁の断面欠損の影響の検討

30t、中央点でテンドン層2,3の順に各々  $\Delta P_{s2c} = 0.51t$ ,  $\Delta P_{s3c} = 2.6t$  となる。慣用法によって得られるこれと対応する各値は、それぞれ  $\Delta P_{s1o} = 24.07t$ ,  $\Delta P_{s2o} = 22.64t$ ,  $\Delta P_{s3o} = 20.24t$ 、及び  $\Delta P_{s2c} = 0.15t$ ,  $\Delta P_{s3c} = 2.55t$  となり、設計基準等に採用されている慣用法は満足し得る十分な精度をもっていることが分かる。

#### 4. まとめ

本論文では、著者らが先に報告した曲線テンドンを有するPC梁要素<sup>1)</sup>を用いて、テンドンとシース間の摩擦による緊張力の減衰をも考慮したPC梁部材の緊張解析を行うための2種の手法について記述し、数値計算例を掲げて若干の検討・考察を試みた。本論文で得られた結果を要約すると以下のようである。

- (1) テンドンのアンカースリップのない場合、本論文で提示したA), B) 2種の手法は殆ど同一の値を与えるが、手法の適応性を考えると、アンカースリップの影響をも容易に考慮し得ると言う点で、緊張力と摩擦力分布を共に内力として取り扱う後者のB)の手法の方が優れている。
- (2) 梁の変形のテンドン曲線形状への影響を無視しても解析結果には殆ど変化がみられないが、シースによるコンクリート断面の欠損を無視すると撓みが過小（本論文の計算例では梁中央点で6%弱）評価されるので、正確を期するにはこれを考慮する方が賢明である。
- (3) アンカースリップの影響区間長の計算法等、既往の慣用法は、より精密な本解析法と比較すると多少精度は劣るが、実設計という観点からすれば十分な精度を有している。

#### [参考文献]

- 1) 上田正生、松野昌義：広瀬雅明：緊張完了後のボストンションPC梁の剛性評価のための有限要素について、コンクリート工学年次論文報告集、第10巻、第3号、1988、pp.7-12
- 2) 日本建築学会編、プレストレストコンクリートの設計・施工規準・同解説、1987、pp.103-107、pp.271-273
- 3) 猪股俊司：プレストレストコンクリートの設計・施工、技報堂出版、1985、pp.40-44
- 4) Van Greenen, J. and Sorderis, A.C.: Non linear analysis of prestressed concrete slabs, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.109, No.7, 1983, pp.1742-1760
- 5) 上田正生、松倉潤智子：Tendonの付着すべりを考慮したプレストレストコンクリート梁部材の変形解析－2、建築学会北海道支部研究報告集No.61、1988、pp.61-64
- 6) 上田正生、広瀬雅明：アンカースリップの影響を考慮したPC梁部材の緊張解析、土木学会北海道支部論文報告集、第45号、1989、pp.87-90

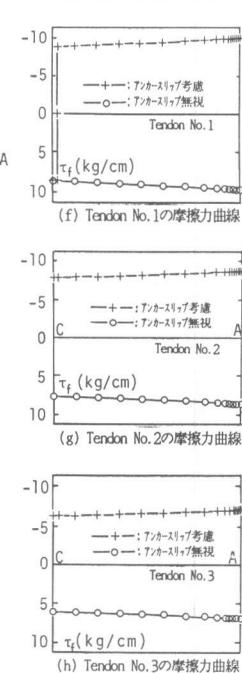


図9 アンカースリップを考慮した場合の解析結果