

論文

[2059] 面内せん断理論を用いた RC 部材のねじり解析

正会員 ○守屋 紀和 (山梨大学大学院)

正会員 二羽淳一郎 (山梨大学工学部)

正会員 檜貝 勇 (山梨大学工学部)

1. はじめに

ねじりモーメントを受ける RC 部材の荷重-変形挙動を精度良く算定するために、最近では部材を鉄筋コンクリート要素としてモデル化する解析が進められている<sup>1)</sup>。また、この際には、鉄筋コンクリート板要素に関する研究成果<sup>2)</sup>が広く利用されてきている。著者らも、ねじりモーメントを受ける部材の荷重-変形解析において、コンクリートのテンションスティフニングを取り入れる手法を提案してきた<sup>3)4)</sup>。しかしながら、著者らが過去に提案した手法は、解析方法をひびわれ発生前後で分けていたことや、解析結果が経路に依存し、任意の変形レベルでの抵抗力を直ちに求めることができないという欠点を有していた。しかし、面内力を受ける板要素の解析方法を基にこの問題点を解決し、さらに、RC 部材の特性である鉄筋の局部降伏、コンクリートのひびわれ面でのせん断抵抗を取入れることにより、ひびわれ発生前から終局状態に至るまで一貫して統一的に解析する手法を新たに確立したので、ここに報告するものである。

2. 面内力を受ける板要素の解析

ねじりモーメントを受ける部材を解析するにあたり、従来通り、部材を仮定の厚みを有する板要素に置き換えて考える。そこで、基本となる RC 板要素の解析方法について概説する。なお、解析上はすべて引張を正、圧縮を負とする。また特に断らないかぎり、応力、ひずみはすべて、平均応力、平均ひずみで取り扱う。

【ひずみの算定】 図1に示すように x 方向、y 方向に配筋された RC 板が、純せん断状態にある場合を考える。ひびわれはコンクリートの引張応力が引張強度に達したとき、主引張応力 (t) 方向に垂直 (x 方向とのなす角  $\beta = 45^\circ$ ) に発生するものとする。x 方向と y 方向の鉄筋比が等しくない場合、ひびわれ面には力の釣合を満足させるためにせん断応力が発生するが、これは鉄筋のせん断抵抗を無視すれば、コンクリートが負担しなければならない。したがって、作用する外力の主方向とコンクリートに発生する応力およびひずみの主方向は一般には一致しないことになる。

x 方向と RC 板要素の主引張ひずみ方向のなす角度を  $\alpha$ 、x 方向と外力として作用する主引張応力方向のなす角度を  $\beta$  とし、これらの関係をモールのひずみ円で表示したものが図2である。このとき、各ひずみの値は次のようになる。

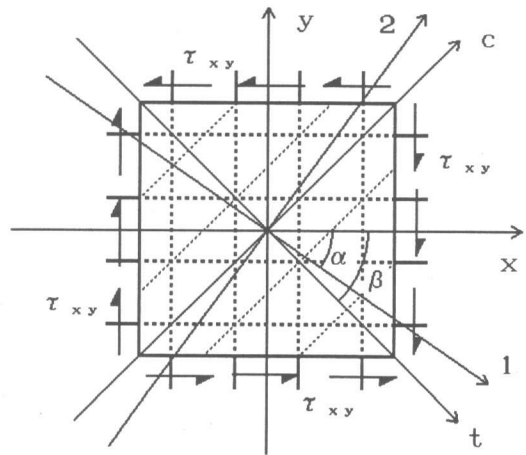


図1. 板要素に作用する応力状態

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ct} + \varepsilon_{cc}) \pm \frac{1}{2} (\varepsilon_{ct} - \varepsilon_{cc}) \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2(\alpha - \beta)} \quad \text{----- (1)}$$

$$\gamma_{xy} = (\varepsilon_{ct} - \varepsilon_{cc}) \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2(\alpha - \beta)} \quad \text{----- (2)}$$

$$\gamma_{ct} = (\varepsilon_{ct} - \varepsilon_{cc}) \tan(\alpha - \beta) \quad \text{----- (3)}$$

ここに、 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{ct}, \varepsilon_{cc}$ はそれぞれ部材軸(x), 部材横(y), ひびわれ垂直(t), ひびわれ平行(c) 方向の平均ひずみ,  $\gamma_{xy}, \gamma_{ct}$ は、それぞれx方向に垂直な面、ひびわれに平行な面での  $\varepsilon_{cc}$ ,  $\varepsilon_{ct}$  平均せん断ひずみである。

【応力の算定】 各方向の平均ひずみより、各平均応力-平均ひずみ関係を用い、各平均応力を求める。本解析においては、以下に示す応力-ひずみ関係を用いている。コンクリートの圧縮に対しては、軟化を考慮した

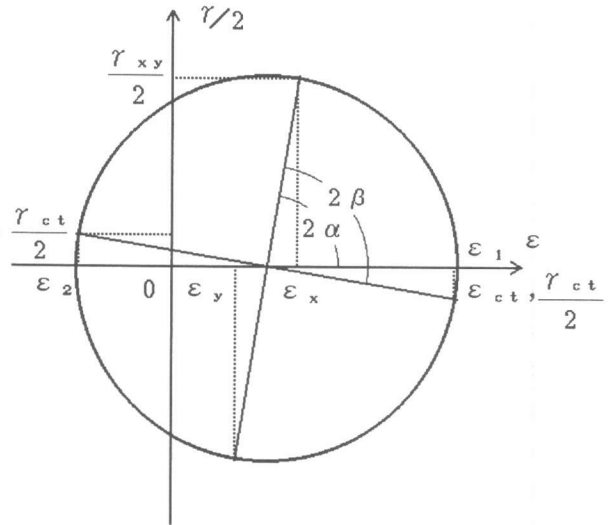


図2. 平均ひずみに対するモール円

Collinsらの提案式<sup>2)</sup>, 引張に対しては玉井らの提案式<sup>5)</sup>, ひびわれ面でのせん断抵抗には青柳・山田の提案式<sup>6)</sup>を基に出雲らが提案している方法<sup>7)</sup>を適用した。また、鉄筋の応力算定にあたっては、ひびわれ面での鉄筋の局部降伏の影響を取り入れた岡村らの方法<sup>8)</sup>を適用した。

【力の釣合条件】 各応力を算定した後、それぞれの応力をx方向およびy方向に分解し、力の釣合を考えると、コンクリートのx方向およびy方向に発生する平均直応力 $\sigma_{cx}, \sigma_{cy}$ , およびx方向に垂直な面での平均せん断応力 $\tau_{cxy}$  は次のように定まる。

$$\sigma_{cx} = \sigma_{ct} \cos^2 \beta + \sigma_{cc} \sin^2 \beta - \tau_{ct} \sin 2\beta \quad \text{----- (4)}$$

$$\sigma_{cy} = \sigma_{ct} \sin^2 \beta + \sigma_{cc} \cos^2 \beta + \tau_{ct} \sin 2\beta \quad \text{----- (5)}$$

$$\tau_{cxy} = (\sigma_{ct} - \sigma_{cc}) \sin \beta \cos \beta + \tau_{ct} \cos 2\beta \quad \text{----- (6)}$$

したがって、力の釣合条件は以下のようになる。

$$\tau_{cxy} = \tau_{xy} \quad \text{----- (7)}$$

$$p_x \sigma_{sx} + \sigma_{cx} = 0 \quad \text{----- (8)}$$

$$p_y \sigma_{sy} + \sigma_{cy} = 0 \quad \text{----- (9)}$$

ここに、 $\tau_{xy}$ は作用するねじりモーメントを変換して得られるせん断応力である。また、純ねじりの場合には、x, y方向の直応力は0である。 $p_x, p_y$ はそれぞれx方向, y方向の鉄筋比であり、ねじりモーメントを受ける部材に適用する場合には、 $p_x = A_{sx} / (p_o t_a)$ ,  $p_y = A_{sy} / (s t_a)$ となる。ただし、 $A_{sx}, A_{sy}, s$ はそれぞれx方向鉄筋の総断面積, y方向鉄筋一本の断面積およびその配置間隔。 $t_a$ は仮定の板厚、 $p_o$ は板厚中心線の周長であり、幅b, 高さhの矩形断面であれば、 $p_o = 2 [(b - t_a) + (h - t_a)]$ となる。

【ひびわれ面での鉄筋の局部応力】 図3に示すように、ひびわれ面での力の釣合を考えることにより、x, y両方向鉄筋のひびわれ面での局部応力 $\sigma_{sxcr}, \sigma_{sy cr}$ を求めることができる。こ

これらの値を鉄筋の局部的な降伏の判定に用いる。なお、ひびわれ面ではコンクリートのテンションステイニングは無視している。また、ひびわれ面での平均せん断応力  $\tau_{ctcr}$  は青柳・山田式を直接適用して求めた。

$$\sigma_{sxcr} = (\tau_{xy} + \tau_{ctcr}) \frac{\tan \beta}{p_x} \quad \text{--- (10)}$$

$$\sigma_{sy cr} = (\tau_{xy} - \tau_{ctcr}) \frac{\cot \beta}{p_y} \quad \text{--- (11)}$$

### 3. 変形の適合条件

板部材の解析とねじりモーメントを受ける部材の解析において、大きく相違する点は、板部材では板厚内においてひずみ分布が一様であるのに対し、ねじりモーメントを受ける部材では、厚さ方向のひずみ分布が一様でないという点である。この点を考慮して、変形の適合条件を導く。まず、ねじりモーメントを受ける板の曲率と単位長さ当りのねじれ角  $\theta$  の関係を考えると、図4に示すように、 $t$  方向の曲率  $\phi$  と、 $c$  方向の曲率  $\phi'$  は相反し次のようになる。

$$\phi = -\phi' = \theta \sin 2\beta \quad \text{--- (12)}$$

本解析においては、板要素の曲げ圧縮域を板厚と仮定するのであるが、断面の深さ方向に、ひずみが直線的に変化していることから、図5に示すように、 $c$  方向のひずみが0となる深さが板厚  $t_d$  となり、この板厚の中心でのひずみが  $c$  方向の平均ひずみ  $\epsilon_{cc}$  となる。なお、曲率、板厚および平均ひずみの間には次の関係が成立する。

$$2\epsilon_{cc} = \phi' t_d = -\phi t_d \quad \text{--- (13)}$$

また、単位長さ当りのねじれ角  $\theta$  とせん断ひずみ  $\gamma_{xy}$  の間には、閉合型ねじりで、考えている辺上でのせん断ひずみが一定であれば、式(14)の関係が成立することが知られている。

$$\theta = (p_0 \gamma_{xy}) / (2 A_0) \quad \text{--- (14)}$$

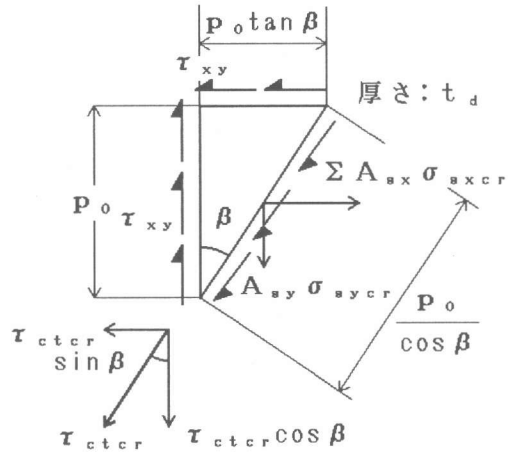


図3. ひびわれ面での力の釣合

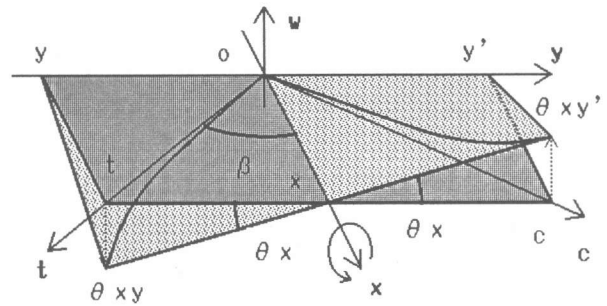


図4. ねじれ角と曲率の関係

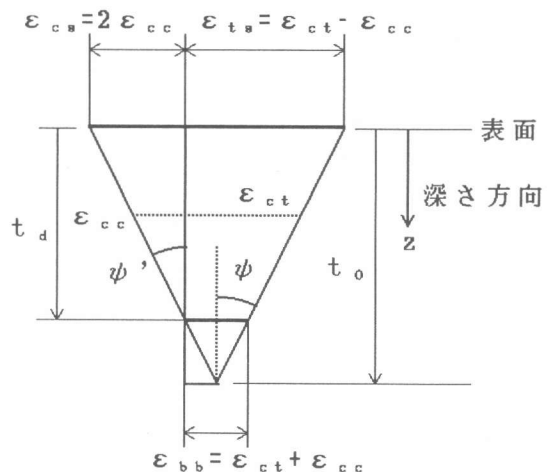


図5. 断面深さ方向のひずみ状態

ただし、 $A_0$  は板厚中心線が囲む面積であり、矩形断面であれば、 $A_0 = (b-t_d)(h-t_d)$  である。

ところが、板要素に関する解析においては、平均せん断ひずみ  $\gamma_{xy}$  は式(2) のように表すことができる。したがって、式(2)、(12)～(14)を整理することによって式(15)が得られる。

$$\varepsilon_{cc} = \frac{p_0 t_d \sin 2\alpha \sin 2\beta}{p_0 t_d \sin 2\alpha \sin 2\beta - 4 A_0 \cos 2(\alpha - \beta)} \varepsilon_{ct} \quad \text{--- (15)}$$

式(15)が、ねじりの解析における変形の適合条件式であり、式(15)は平均引張ひずみを与えることによって、変形の適合条件を満足する平均圧縮ひずみが算定できることを表している。

#### 4. 応力の平均化とせん断応力の合力作用位置

3. で述べたように、ひずみが板厚内で一様でないことから、部材中に発生しているコンクリート応力も板厚内で一様ではない。したがって、コンクリート応力を板厚内で平均化する必要がある。従来のねじりモーメントを受ける部材の解析においては、ねじりモーメントを算定する際に、その平均せん断応力  $\tau_{cxy}$  の合力作用位置を板厚の中心に置いていたが、このことは厳密に言えば誤った仮定であることは明らかである。

このため、実際のひびわれ発生ねじりモーメントを過小評価する傾向があった。そこで、本解析においては平均せん断応力の合力作用位置を忠実に求めることとした。

図5に示すようなひずみ分布において、任意の位置でのコンクリートのひずみを  $\varepsilon_c$ 、応力を  $\sigma_c$ 、 $c$  方向の圧縮応力の合力作用位置を  $z_c$ 、 $t$  方向の引張応力の合力作用位置を  $z_t$ 、 $c$  方向の表面ひずみを  $\varepsilon_{cs} (= 2\varepsilon_{cc})$ 、 $t$  方向の表面ひずみを  $\varepsilon_{ts} (= \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{cc})$ 、および  $c$  方向のひずみが0となる深さを  $t_d$  とし、表面から  $t_d$  の位置での  $t$  方向のひずみを  $\varepsilon_{bb} (= \varepsilon_{ct} + \varepsilon_{cc})$  とすると、各平均応力および合力作用位置は以下のように求められる。

《 $c$  方向》

$$\sigma_{cc} = \frac{1}{-\varepsilon_{cs}} \int_{\varepsilon_{cs}}^0 \sigma_c d\varepsilon_c \quad \text{--- (16)}$$

$$z_c = \frac{t_d}{-\varepsilon_{cs}} \left[ \frac{1}{-\sigma_{cc} \varepsilon_{cs}} \int_{\varepsilon_{cs}}^0 \sigma_c \varepsilon_c d\varepsilon_c - \varepsilon_{cs} \right] \quad \text{--- (17)}$$

《 $t$  方向》

$$\sigma_{ct} = \frac{1}{\varepsilon_{bb} - \varepsilon_{ts}} \int_{\varepsilon_{ts}}^{\varepsilon_{bb}} \sigma_c d\varepsilon_c \quad \text{--- (18)}$$

$$z_t = \frac{t_d}{\varepsilon_{bb} - \varepsilon_{ts}} \left[ \frac{1}{\sigma_{ct} (\varepsilon_{bb} - \varepsilon_{ts})} \int_{\varepsilon_{ts}}^{\varepsilon_{bb}} \sigma_c \varepsilon_c d\varepsilon_c - \varepsilon_{ts} \right] \quad \text{--- (19)}$$

また、 $t$  方向の平均せん断応力  $\tau_{ct}$  は、 $t$  方向の平均ひずみ  $\varepsilon_{ct}$  から算定し、板厚内では一様であると仮定した。したがって、その合力作用位置  $z_s$  は  $t_d/2$  となる。

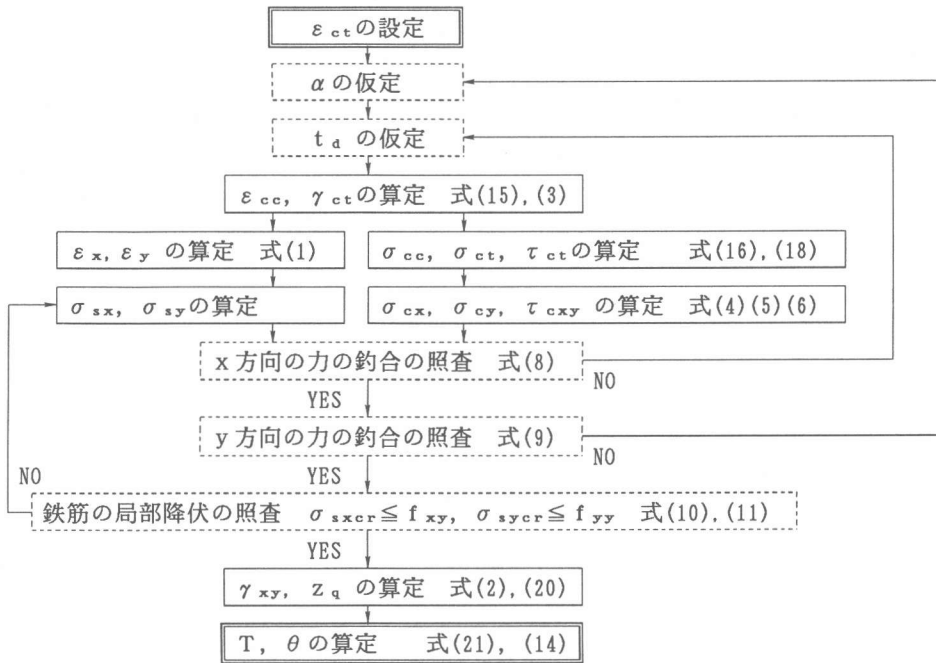
以上のことから、 $x$  方向に垂直な面での平均せん断応力  $\tau_{cxy}$  は式(6) で算定され、その合力作用位置  $z_q$  も次式のように求められる。

$$z_q = \frac{(\sigma_{ct} z_t - \sigma_{cc} z_c) \sin \beta \cos \beta + \tau_{ct} z_s \cos 2\beta}{\tau_{cxy}} \quad \text{--- (20)}$$

したがって、合力作用位置  $z_q$  によって囲まれる面積を  $A_1 = (b-2z_q)(h-2z_q)$  とすると、ねじりモーメント  $T$  は、次のように求めることができる。

$$T = 2 A_1 \tau_{cxy} t_d \quad \text{--- (21)}$$

以上の解析手法をまとめたフローチャートを以下に示す。



### 5. 実験値との比較

これまでに述べてきた解析手法の妥当性を検証をするため、実験値との比較を行った(表1)。使用したデータは、Hsu<sup>9)</sup>、McMullen<sup>10)</sup>、および著者らのものである(供試体数13)。実験値と解析値の比較の一例を図6に示す。図中の実線が実験値、破線が本手法による解析値、一点鎖線が平均せん断応力 $\tau_{ctxy}$ の合力作用位置を $t_d/2$ とした場合の解析値である。

ひびわれ発生ねじりモーメントは、実験値/解析値の比の平均が0.974であり、変動係数は、11.2%である。また、最大ねじりモーメントは、実験値/解析値の比の平均が0.964であり、変

表1. 実験値と解析値の比較

	供試体名	b cm	h cm	$f_c'$ kgf/cm <sup>2</sup>	$A_{sx}$ cm <sup>2</sup>	$f_{xy}$ kgf/cm <sup>2</sup>	$A_{sy}$ cm <sup>2</sup>	$f_{yy}$ kgf/cm <sup>2</sup>	s cm	$T_{cr} / T_{cr,cal}$	$T_u / T_{u,cal}$
著者ら	N4	15.0	20.0	368	2.85	3620	.317	3520	6.5	1.025	0.920
	SC20	15.0	20.0	178	7.94	3800	.713	3700	5.0	1.121	0.853
H s u	B2	25.4	38.1	292	8.00	3230	1.29	3620	18.1	0.842	0.830
	B4	25.4	38.1	311	15.5	3260	1.29	3380	9.2	0.865	0.740
	B6	25.4	38.1	294	25.8	3300	1.29	3290	5.7	0.987	0.863
	G2	25.4	50.8	315	8.00	3290	.710	3400	12.1	0.844	0.968
	G4	25.4	50.8	288	15.5	3320	1.29	3280	11.4	0.827	0.881
	G6	25.4	50.8	305	7.74	3420	.710	3570	12.7	0.884	0.935
	G8	25.4	50.8	289	17.0	3280	1.29	3350	10.5	0.966	0.925
Mc-Mullen	A3	21.9	21.9	402	10.0	3590	.710	3670	7.9	1.067	1.093
	A4	21.9	21.9	399	11.4	3580	.710	3670	5.7	1.168	1.155
	B3	14.3	32.1	394	10.0	3590	.710	3670	8.3	1.042	1.112
	B4	14.3	32.1	392	11.4	3580	.710	3670	6.0	1.029	1.254

係数は14.7%である。このことから、ひびわれ発生ねじりモーメント、および最大ねじりモーメントの推定は、ほぼ妥当な精度で可能であるといえる。ただし、ひびわれ発生モーメントと最大モーメントの比が大きい Hsuのデータに対しては、テンションスティフニングの影響がやや大きいものも認められる。また、解析値がひびわれ発生以後、一旦低下しているが(図6)、これは変位制御型の解析を行っていることと、中実断面に対して、断面中心部を無視していることによると考えられる。

## 6. 結論

鉄筋コンクリート特有の現象である、コンクリートの軟化、テンションスティフニング、ひびわれ面でのせん断抵抗および鉄筋のひびわれ面での局部降伏の影響を考慮してより現実に近いモデル化を行い、さらに面内力を受ける板要素の解析方法を基に、ねじりモーメントを受ける部材の解析方法を提案した。本研究により、得られた結論を要約すれば以下の通りである。

- 1)ねじりモーメントを受ける部材の荷重-変形関係をひびわれ発生前から終局に至るまで、統一的な手法で解析することが可能となった。
- 2)平均せん断応力の合力作用位置を忠実にモデル化し、解析を行うことにより、荷重-変形関係の算定精度が向上した。
- 3)ひびわれ発生ねじりモーメント、初期ねじり剛性、および最大ねじりモーメントを精度良く推定できた。
- 4)ただし、中実断面を仮想の中空断面と仮定しているため、部材断面中央部のテンションスティフニングの影響により、ねじり剛性を低めに評価する傾向にある。

## [参考文献]

- 1) Hsu, T. T. C. and Mo, Y. L.: Softening of Concrete in Torsional Members - Theory and Tests, ACI Journal, pp. 290~303, 1985
- 2) Vecchio, F. J. and Collins, M. P.: Predicting the Response of Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear Using Modified Compression Field Theory, ACI Structural Journal, pp. 258 ~ 268, 1988
- 3) 二羽, 楢貝, 岡村: コンクリートのテンションスティフネスを考慮したRC部材の純ねじり解析, コンクリート工学年次論文報告集, pp. 91~ 96, 1987
- 4) 守屋, 二羽, 楢貝: 軸力とねじりを受ける鉄筋コンクリート部材の強度-変形解析, コンクリート工学年次論文報告集, pp. 319~ 324, 1988
- 5) 玉井, 島, 岡村: 一軸引張部材における鉄筋の降伏以後の平均応力-平均ひずみ関係, 土木学会論文集, 第378号, pp. 239~247, 1987
- 6) 青柳, 山田: 面内力を受ける鉄筋コンクリートシェル要素の耐力変形特性, 土木学会論文報告集, No. 331, pp. 167~180, 1983
- 7) 出雲, 島, 岡村: 面内力を受ける鉄筋コンクリート板要素の解析モデル, コンクリート工学, Vol. 25, No. 9, pp. 107~120, 1987
- 8) Okamura, H., Maekawa, K. and Izumo, J.: Reinforced Concrete Plate Element Subjected to Cyclic Loading, Proc. of IABSE Colloquium Delft, pp. 575 ~ 589, 1987
- 9) Hsu, T. T. C.: Torsion of Structural Concrete - Behavior of Reinforced Concrete Rectangular Members, ACI Journal, pp. 261 ~ 306, 1968
- 10) McMullen, A. E. and Rangan, B. V.: Pure Torsion in Rectangular Sections - A Re-Examination, ACI Journal, pp. 511~519, 1978

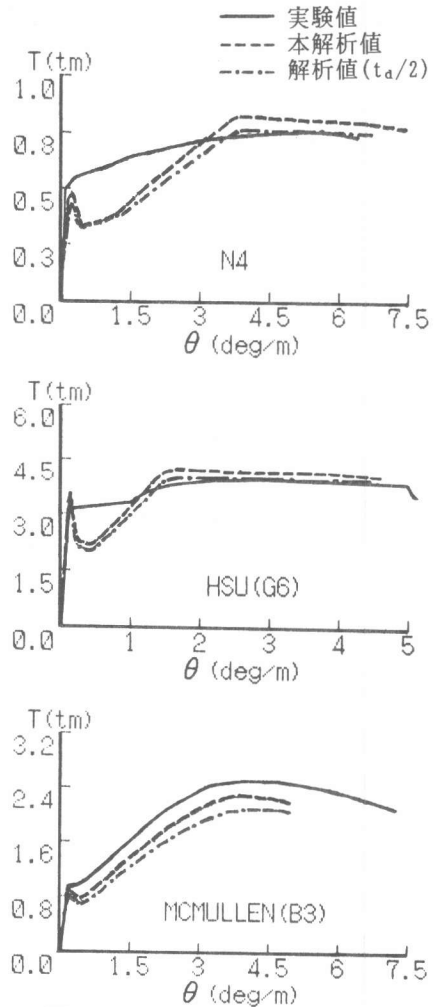


図6. 実験値と解析値の比較例