

論文

[2066] クラックひずみ分布関数を用いた RC 単軸要素の引張剛性に関する FEM 解析の定式化

正会員 田辺 忠顕 (名古屋大学工学部)  
 正会員 呉 智深 (名古屋大学大学院)  
 正会員 ○加藤 千貴 (名古屋大学学部生)

1章 序

RC 構造物における耐荷力は、一般的に引張部に配置された鉄筋によって支配され、クラック断面の断面強度が主たる計算対象となり、引張側のコンクリートの寄与は殆どない。しかし、RC 構造物の変形に対しては、引張側のコンクリートの寄与が非常に大きく、この効果に対して近年多くの研究がなされるようになった。これは、原子力発電所格納容器や LNG タンク、大橋梁橋脚など、重要構造物が、RC 構造として建設され、地震などを想定した限界状態の変形余裕度が、エネルギー吸収の立場から大きく注目されるようになったからである。さて、この引張側の剛性は、ひびわれとひびわれの間のコンクリートと鉄筋との付着作用によって生じる。そして、その剛性は、ひびわれの発生・進展によって徐々に低下し、特有の非線形性状を呈す。

従来、引張剛性のモデル化は有限要素法、簡易近似計算の両分野で数多く提案され、ひび割れコンクリートの軟化曲線として表現される場合が多い (Scanlon(1971), Lin Scordelis(1973))

これらは引張硬化作用を付着機構、あるいは鉄筋量とは無関係に定めており、鉄筋のひずみは変位関数の一次微分として与えている。すなわち、鉄筋に対しては付着によるひずみ分布が考慮されていない事になっている。

そこで本研究では、クラックひずみ分布関数を用いて鉄筋応力の付着効果による剛性の増大を簡易に有限要素法に取り入れるための検討を行った。とりあえず変位関数を数種に変えて、一軸引張剛性の非線形挙動を合理的にかつ、簡易に取り扱う方法を提案する。そして、これを有限要素法に適用し、数値シミュレーション結果を既往実験結果と比較する事によりその妥当性を検証する。

2章 クラックひずみを用いた有限要素法の定式化

2.1 クラックひずみ及びコンクリートひずみの定式化

クラックひずみを導入し、付着すべりを考慮した有限要素法の引張剛性について定式化する。

鉄筋とコンクリートの付着すべりを考慮した要素を用いる有限要素法の定式化を行う。材軸方向の変位  $u$  は次式のように表される。

$$u = [N][\delta] \tag{2.1}$$

ここで  $[N]$ 、 $[\delta]$  は形状関数マトリックス、節点変位ベクトルである。またひずみ節点変位マトリックス  $[B]$  は  $[N]$  の一階微分で表され、ひずみと節点変位の関係は次式で表される。

$$\varepsilon = [B][\delta] \tag{2.2}$$

一般に RC 部材ではその全ひずみとコンクリートひずみとが一致しない。この差をクラックひずみ  $\varepsilon_{cr}$  と定義する。クラックひずみはクラック部分において最大値を取り、部材軸に沿って徐々に減少しながら分布し、その要素内における積分値はクラック幅に等しい。クラックひずみの分布関数を次式のようにひびわれ間で、双曲線関数で分布すると仮定する。すなわち

$$\varepsilon_{cr} = A_j \frac{\cosh(a(X_j - L_j)/b_c)}{\cosh(aL_j/b_c)} \quad (0 \leq X_j \leq 2L_j) \tag{2.3}$$

$$\text{ただし } b_c = \sqrt{\frac{A_s E_s}{\phi_s (1 + n p) k_1}}$$

$a$  は未定定数である。クラック位置 ( $X_j=0$ ) においてはコンクリートひずみは零で全ひずみはクラ

ックひずみに等しくなることから未定定数  $A_j$  を定めると、

$$A_j = [B(X_j=0)][\delta] \quad (2.4)$$

よってクラックひずみは以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cr} &= [B(X_j=0)][\delta] \frac{\cosh(a(X_j-L_j)/b_c)}{\cosh(aL_j/b_c)} \\ &= [B_{cr}][\delta] \end{aligned} \quad (2.5)$$

コンクリートひずみはクラックひずみの定義から

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= \varepsilon - \varepsilon_{cr} \\ &= [B][\delta] - [B(X_j=0)][\delta] \frac{\cosh(a(X_j-L_j)/b_c)}{\cosh(aL_j/b_c)} \\ &= [B_c][\delta] \end{aligned} \quad (2.6)$$

コンクリートひずみが定式化された。

## 2. 2 鉄筋ひずみの定式化

鉄筋ひずみは通常変位関数の一次微分として直接表す。しかしここでは付着による抵抗の増大を反映させるために、変位関数の一次微分とは異なってクラック間のひずみの適合条件を満たしつつよりひずみエネルギーが大きくなる次の表現をとる。

クラックを有する RC 部材は鉄筋とコンクリートの相対変位 (すべり  $g$ ) によって、せん断応力 (付着応力  $u_b$ ) が生じ、これによって鉄筋とコンクリート間の応力交換が行われると考えられる。この時微小区間  $dx$  での応力伝達量と、鉄筋とコンクリートの応力増分  $d\sigma_s$ 、 $d\sigma_c$  は釣合条件から次式のように表される。

$$\phi_s \cdot u_b \cdot dx = A_s \cdot d\sigma_s = -A_c \cdot d\sigma_c \quad (2.7)$$

ここで  $A_s$ 、 $A_c$  は鉄筋とコンクリートの断面積、 $\phi_s$  は鉄筋の周長を表す。また任意点でのすべりは次式で表される。

$$g(x) = \int_{L_j}^x \varepsilon_s dx - \int_{L_j}^x \varepsilon_c dx \quad (2.8)$$

式(2.8)を二階微分し、式(2.7)を用いると、一般によく知られている付着に関する基礎微分方程式を得る。

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = \frac{\phi_s (1+n p) u_b}{A_s E_s} \quad (2.9)$$

ここで、 $n$  は鉄筋とコンクリートの弾性剛性比、 $p$  は鉄筋比である。上式は鉄筋とコンクリートの付着応力—すべり関係  $u_b = u_b(g)$  と、適当な境界条件を与えることにより解くことができる。本研究では勾配  $k_1$  を持つ次式のような付着すべり応力関係を仮定する。

$$u_b = k_1 g \quad (2.10)$$

式(2.10)は見掛け上は線形である。ここで(2.9)、(2.10)を用いるのは、先にも述べたようにクラック間のひずみの適合条件を満たす為に最も簡単な式を選んだのであって実際には、適合条件さえ満たしていればいかなる関数形を用いてもよい。

式(2.10)を式(2.9)に適用すると、

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = \frac{\phi_s (1+n p) k_1 g}{A_s E_s} = \frac{g}{b_c^2} \quad (2.11)$$

上式と次の境界条件とから式(2.13)を得る。

$$g(0) = -\Delta w / 2 \quad \Delta w: \text{クラック幅} \quad (2.12)$$

$$g(L_j) = 0$$

$$g(x) = \frac{\Delta w}{2} \frac{\sinh((X_j-L_j)/b_c)}{\sinh(L_j/b_c)} \quad (2.13)$$

ここでクラック幅  $\Delta w$  はクラックひずみの積分値として与えられるので、

$$\Delta w / 2 = \int_0^{L_j} \varepsilon_{cr} dx_j$$

$$= b_c/a \tanh(aL_j/b_c)[B(X_j=0)][\delta] \quad (2.14)$$

これはクラック間のひずみの適合条件となっている。式(2.13)より

$$g(X) = \frac{b_c \tanh(aL_j/b_c) \sinh((X_j-L_j)/b_c)}{a \sinh(L_j/b_c)} [B(X_j=0)][\delta] \\ = [B_{bs}][\delta] \quad (2.15)$$

すべりの一階微分は式(2.15)より

$$d g / d x = \frac{\tanh(aL_j/b_c) \cosh((X_j-L_j)/b_c)}{a \sinh(L_j/b_c)} [B(X_j=0)][\delta] \\ = [B_{ss}][\delta] \quad (2.16)$$

式(2.8)の一階微分とから

$$\epsilon_s = [B_c][\delta] + [B_{ss}][\delta] \\ = [B_s][\delta] \quad (2.17)$$

このようにして鉄筋については定式化された。

### 2.3 引張剛性の誘導

次に引張剛性について定式化する。一般に全ポテンシャルエネルギー $\Pi$ は外力の作用によって生じる内部エネルギー $U$ と外力の為す負荷ポテンシャルエネルギー $V$ とによって次式のように表される。

$$\Pi = U - V$$

内部エネルギーとしてコンクリートと鉄筋とのひずみエネルギー $U_c, U_s$ と、コンクリートと鉄筋との界面に生じる付着ひずみエネルギー $U_{bs}$ を考える。内部エネルギーは次式で表される。

$$U = U_c + U_s + U_{bs} \\ = 1/2 \int v_c E_c \epsilon_c^2 dV + 1/2 \int v_s E_s \epsilon_s^2 dV + 1/2 \int b_s k_1 g^2 d b s \quad (2.19)$$

節点力を $[P]$ とすると外力のポテンシャルエネルギーは、

$$V = [P][\delta] \quad (2.20)$$

よって全ポテンシャルエネルギーは

$$\Pi = \int v_c E_c [\delta]^T [B_c] [B_c] [\delta] dV + \int v_s E_s [\delta]^T [B_s] [B_s] [\delta] dV \\ + \int b_s k_1 [\delta]^T [B_{bs}] [B_{bs}] [\delta] d b s - [P][\delta] \quad (2.21)$$

また最小ポテンシャルエネルギーの原理より

$$[D][\delta] = [P] \quad (2.22)$$

すなわち外力 $[P]$ と節点変位 $[\delta]$ とによって表された。ここで剛性マトリックス $[D]$ は次式である。

$$[D] = \int v_c E_c [B_c]^T [B_c] dV + \int v_s E_s [B_s]^T [B_s] dV \\ + \int b_s k_1 [B_{bs}]^T [B_{bs}] d b s \quad (2.23)$$

先程求めた $[B_c], [B_s], [B_{bs}]$ を代入することによって剛性マトリックスは定式化できた。

形状関数としては各種のものが考えられるが、ここでは例えば次に示す二種を考える。

(1) 一般的な直線変位関数

$$u = [- (X_j - L_j) / 2L_j + 1/2 \quad (X_j - L_j) / 2L_j + 1/2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ = [B][\delta] \quad (2.24)$$

(2) 付着とすべりを考慮した応力の釣合式 $\sigma = \sigma_c + \sigma_s$ から求めた変位関数

$$u = \left[ \begin{array}{cc} \frac{b_c}{n p} \frac{\sinh((X_j - L_j)/b_c)}{\cosh(L_j/b_c)} + X_j - L_j & \frac{-1}{2} \frac{b_c}{n p} \frac{\sinh(L_j/b_c)}{\cosh(L_j/b_c)} \\ \frac{b_c}{n p} \frac{\sinh((X_j - L_j)/b_c)}{\cosh(L_j/b_c)} + X_j - L_j & \frac{1}{2} \frac{b_c}{n p} \frac{\sinh(L_j/b_c)}{\cosh(L_j/b_c)} \end{array} \right]^T \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ (2.25)$$

### 3章 数値モデルと実験結果との比較

#### 3.1 数値モデル

前章において、有限要素法における引張剛性を定式化した。それらを定性的に検討するために、図(3.1)に示したようなモデルを考え、その試験体について数値解析を行い、クラックを含むRC棒部材の非線形付着すべり変形挙動について検討、考察する。なお解析に用いた変位関数は付着すべりを考慮した式(2.25)を用いた。

図(3.2)は単調増加荷重を受けた時のモデル試験体の計算結果を荷重-平均ひずみ関係として図示したものである。解析曲線上に明瞭に認められる階段上の水平部分は、クラックの発生に伴う鉄筋の急激な抜け出しに起因して生ずるものである。またこの解析曲線はRC部材がクラック発生するたび毎に、急速に剛性を失い同図中に併記した鉄筋のみの剛性に近づいていくことを示している。

図(3.3)には、各クラック位置の荷重-クラック幅曲線を掲げた。図の結果は、ある場所に新たにクラックが発生する場合、すでにクラックの生じている位置においては

応力の再分配によってクラック幅の一時的な減少が起こり、各位置のクラック幅を均質化しようとすることを示している。

図(3.4)はこのモデル部材のクラックの進展する3段階の荷重に対するコンクリート応力分布、鉄筋応力分布、付着応力分布を例示したものである。図の結果から材軸に沿う各応力に沿った分布形状は、荷重の増加に伴うクラックの発生の度に、大きく変化しながら推移しており部材の受け持つ軸応力分担が付着応力を介してコンクリートから鉄筋へと次第に移行している様子が読み取れる。

#### 3.2 実験結果との比較

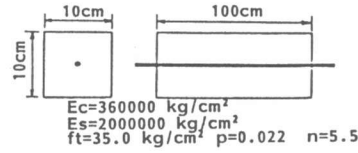


図 3.1 数値解析モデル

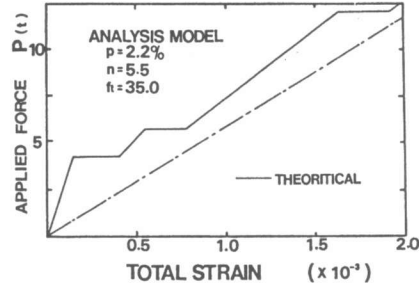


図 3.2 荷重-平均ひずみ曲線

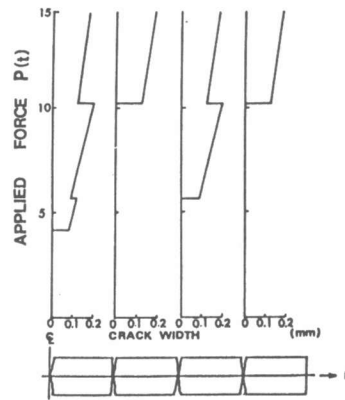


図 3.3 荷重-クラック幅曲線

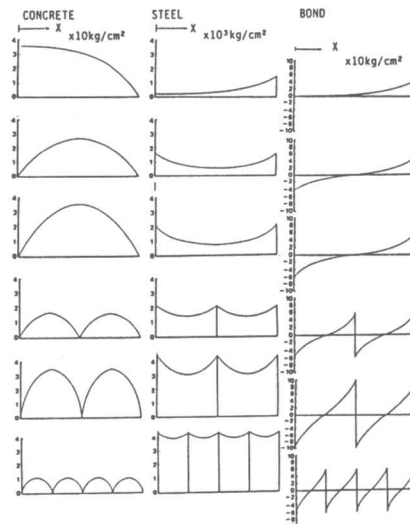


図 3.4 材軸に沿う各応力分布の推移

2章で定式化した有限要素法解析の実際問題への適応性を調べるため以下に示す3種の既往実験結果との比較を行った。すなわち、角田による両引き試験<sup>(4)</sup>、Rostasyらによる純粋引張試験<sup>(5)</sup>、森田らによる両引き抜き試験<sup>(6)</sup>である。各実験の諸条件は表(3.1)に示す通りである。

図(3.5a), 図(3.5b)における解析値は、付着すべりを考慮に入れた形状関数式(2.25)を用いて計算を行い、付着応力とすべりの関係を表す係数 $k_1$ を5000kg/cmとして計算を行った。解析値はクラック発生とともに全断面有効の線形変位域から離脱し、その後の荷重増加によってクラックが発生する度に急激に引張剛性を低下させながら、併記した鉄筋単体のみの平均ひずみ直線に近づいていくことが分かる。2例とも解析値は、実験曲線を全体的にかなり正確に再現している。すなわちクラック発生にともなって低下する引張剛性の評価が妥当であることを示している。

また図(3.5c)に示した平均ひずみ-全応力曲線は、図(3.5a)と同様に角田の実験に対する解析値を示したものであるが、解析において直線変位場を表す形状関数式(2.24)を用いて計算をおこなった結果である。クラックひずみ関数における定数 $a$ には0.5を用いた。厳密な変位場を用いたときほどの適合性はみられないとしても剛性に関しては全体的な傾向は正しく再現されている。

図(3.6)は森田らによる両引き試験との比較である。いま付着応力とすべりの関係を表す $k_1$ は付着応力が増加することにより実際には徐々に減少していることを考慮して $P=8200\text{kg}$ の時には $k_1=2500$ を用い、 $P=4350\text{kg}$ ,  $P=2240\text{kg}$ の時には $k_1=5000\text{kg/cm}$ を用いて計算を行った。図によれば本解析値は、荷重の小さい $P=2240, 4350\text{kg}$ 載荷時には実験曲

表 3.1 引用実験の諸条件

研究者	実験方法 (試験体名称)	計算に用いた材料定数	
		コンクリート	鉄筋
角田与史雄	両引き試験 No. 13-20 $\phi=16\text{mm}$ $8 \times 8 \times 60\text{ cm}$	$E_c = 0.246E+6$ $f_t = 29.9\text{ kgf/cm}^2$ $n = 8.30$	$\phi = 16\text{mm}$ $p = 0.031$ $E_s = 2.0E+6$ $f_y = 3000\text{kg/cm}^2$
Rostasy Leonhardt	純粋引張試験 (軽集骨材コンクリート)	$E_c = 0.171E+6$ $f_t = 12.5\text{ kgf/cm}^2$ $n = 12.1$	$\phi = 8\text{mm}$ $p = 0.010$ $E_s = 2.0E+6$ $f_y = 5440\text{kg/cm}^2$
森田司朗ら	両引き抜き試験 $25 \times 25 \times 150\text{ cm}$	$E_c = 0.40E+6$ $f_t = 38.6\text{ kgf/cm}^2$ $n = 5.0$	$\phi = 19\text{mm}$ $p = 0.0045$ $E_s = 2.0E+6$ $f_y = 6500\text{kg/cm}^2$

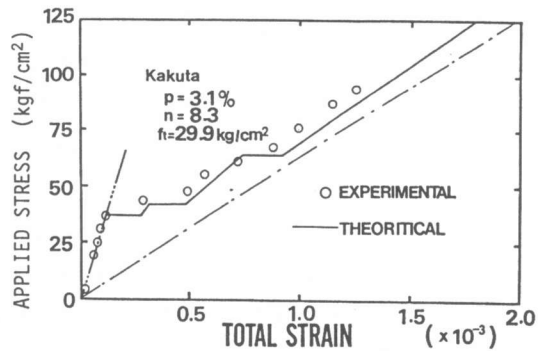


図 3.5a 実験値と解析値の全応力-平均ひずみ曲線

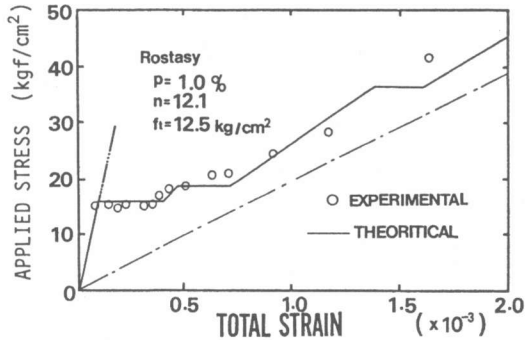


図 3.5b 実験値と解析値の全応力-平均ひずみ曲線

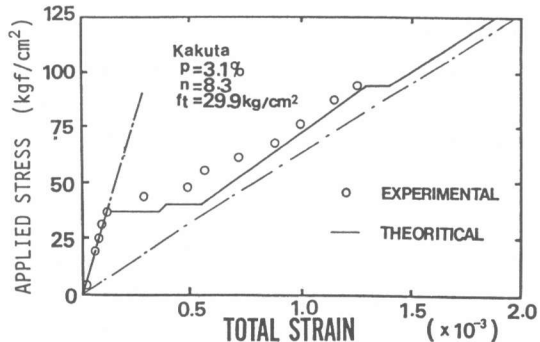


図 3.5c 直線変位場を仮定した全応力-平均ひずみ曲線

線の全体的な傾向はかなり良好に表現されている。しかし荷重の大きい $p=8200\text{kg}$ の時には鉄筋合力、付着応力ともに実験曲線とはやや違った傾向がみられる。すなわち、いま付着応力とすべりの関係を線形で仮定し、 $k_1$ を常に一定とし、ひずみを適合させているがこの適合条件の満たし方も含めて、なお検討の余地があると考えられる。

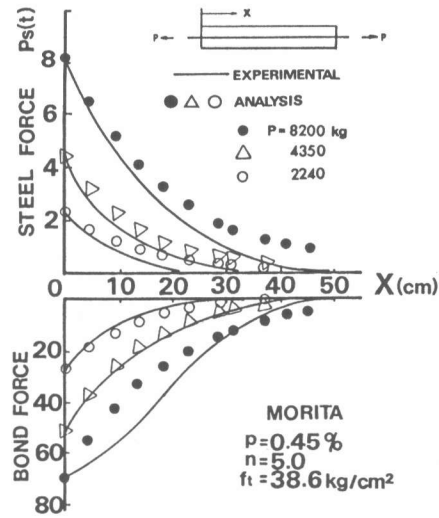


図 3.6 材軸に沿う鉄筋合力および付着応力の分布の推移

#### 4章 結論

本解析は、軸方向力のみが作用するRC部材を対象として、クラックひずみ分布関数を適当に仮定することによって tension stiffness 効果を簡易に有限要素法に導入する方法について述べたものである。3において既往実験3例を引用して実験結果との比較、検討を行い本非線形解析法の妥当性を検討した。

なお本報告では一次元のみを取り扱ったが、2次元、3次元問題への拡張は比較的容易であると考えられ、現在その作業を行っている。

また本計算には厳密な形状関数を用いるより、これを直線変位場で近似できるならばより簡易的に計算がなされる。特に2次元、3次元問題を考えたとき直線変位場を用いるほうがより拡張しやすい。実際に計算を行った結果から、クラックひずみにおける定数  $a$  に適当な値を用いることにより近似できる事が分かった。

#### 参考文献

- 1) Tanabe, T., Yoshikawa, H.: Constitutive equation of a cracked reinforced concrete panel, IABSE Colloquium on Computational Mechanics of concrete structure, DELFT, 17-34(1987)
- 2) 吉川弘道、田辺忠顕：ひび割れを有する鉄筋コンクリート板の平面応力場における構成方程式、コンクリート工学（論文）、Vol.24、No.6、日本コンクリート工学年次講演会論文集
- 3) Wu, Z., Yoshikawa, H., Tanabe, T.: Nonlinear Aspects of Cracked Reinforced Concrete by The Damage Mechanics Concept, Proceedings of EASEC-2, Chaing Mai, Thailand 1989
- 4) 角田与史雄：鉄筋コンクリートの最大ひびわれ幅、コンクリートジャーナル、Vol18、No9、Sept.(1970) pp.1-9
- 5) レオンハルト、F（横道英雄 訳）：コンクリート構造物の限界状態と変形、鹿島出版会、(1984)
- 6) 六車 照、森田司郎、富田幸次郎：鋼とコンクリートの付着に関する基礎的研究、建築学会論文報告集、第131,132,134,139号(1967-1,2,4,9)
- 7) 上田正生、土橋由造：軸力を受ける鉄筋コンクリート棒部材の材料非線形付着すべり解析、土木学会論文集、第360号、V-3(1985)