

論文

[2008] 有限要素法による二次元応力拡大係数の解析

正会員 石黒 寛 (大阪府立大学農業工学科)

1. まえがき

線形破壊力学 (Linear Fracture Mechanics) は、クラックを含む部材あるいは構造物の弾性解析より破壊力学パラメータである応力拡大係数を決定し、このパラメータを用いて、脆性破壊、疲労破壊などにおけるクラックの挙動を定量的に評価する工学的手法である。本手法は、クラックの発生および進展に起因する非線形挙動の解析に対して有効であることからコンクリート構造への応用が模索されてきた。コンクリートのような複合材料では、金属やガラスなどの均質材料とは異なり、骨材によってクラックの進展が阻止され、主クラックの周囲に大きな微細クラックの累積領域が形成される。このため、一般規模のコンクリート構造物では線形破壊力学の適用が困難とされ、破壊力学パラメータとして破壊エネルギーの適用が検討されている [1]。一方、コンクリートダムのような大規模な無筋コンクリート構造物に対しては、線形破壊力学の適用が有効と考えられており、いくつかの適用例も報告されている [2]。

本論文は、コンクリートダムのクラック解析に線形破壊力学を適用するための基礎的研究として、簡便で精度のよい応力拡大係数の決定方法について検討したものである。有限要素法による応力拡大係数の決定方法には種々の方法が提案されており、本論文では特異要素と変位法を組合せた方法を採用し、二次元クラック問題への適用性を検証した。

2. 特異要素を用いた応力拡大係数の解析方法

2.1 クラック先端近傍における応力・変位分布

クラックの変形モードは、クラック先端近傍の相対変形に着目することによりモード I (開口型変形)、モード II (面内せん断型変形) およびモード III (面外せん断型変形) の 3 つのモードに分類できる (図-1 参照)。線形弾性論によれば、クラック先端近傍の応力および変形はこれら 3 つの独立な変形モードの和として与えられる。いま、二次元平面においてクラック先端における座標系を図-2 のように表すと、モード I とモード II の混合モードに対するクラック先端近傍の応力分布は、以下のように表すことができる [3]。ただし、 $0(r^0)$ は、 r に関する桁が r^0 以上であることを表す。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \begin{Bmatrix} 1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \\ 1 + \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \cos(3\theta/2) \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin(\theta/2) \{2 + \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2)\} \\ \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \{1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)\} \end{Bmatrix} + 0(r^0) \quad (1) \end{aligned}$$

上式よりクラック先端近傍における応力分布は、 $r^{-1/2}$ の特異性を示すことがわかる。つまり、応力分布はクラック先端に近づくほど大きくなり、先端部において無限大となる。また、式中の K_I および K_{II} は、モード I およびモード II の変形に対応する応力の特異性の強さを表す量であり、それぞれ、モード I およびモード II の応力拡大係数 (stress intensity factor) という。し

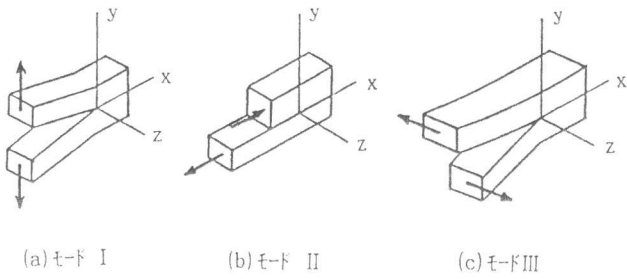


図-1 クラックの変形モード

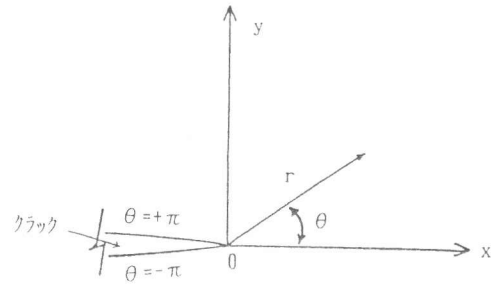


図-2 クラック先端の極座標系

たがって、応力拡大係数が求められるとクラック先端近傍の応力分布が一意的に定まる。なお、応力拡大係数は、 $[\text{応力}] \times [(\text{長さ})^{-1/2}] = [\text{力}] \times [(\text{長さ})^{-3/2}]$ の次元を持つ。

また、クラック先端近傍における変位分布も応力の場合と同様に表され、以下のようになる。ここで、 $\theta(r)$ は、 r に関する桁が r^{-1} 以上であることを表す。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \frac{K_I}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} (2\kappa-1) \cos(\theta/2) - \cos(3\theta/2) \\ (2\kappa+1) \sin(\theta/2) - \sin(3\theta/2) \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{K_{II}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} (2\kappa+3) \sin(\theta/2) + \sin(3\theta/2) \\ (2\kappa-3) \cos(\theta/2) + \cos(3\theta/2) \end{Bmatrix} + \theta(r) \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 K_I 、 K_{II} ：モードIおよびモードIIに対する応力拡大係数、 v ： y 方向の変位、 u ： x 方向の変位、平面ひずみの場合： $\kappa = (3-4\nu)$ 、平面応力の場合： $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ 、 G ：せん断弾性係数、 ν ：ポアソン比

2.2 変位法による応力拡大係数の決定

クラック先端近傍における応力分布は、(1)式からわかるように $r^{-1/2}$ の特異性を示し、クラック先端部において無限大となる。このような特異性を表現できる有限要素の一つに、Barsoumの提案した特異アイソパラメトリック要素がある[4]。この要素は、図-3(a)に示すような通常の8節点アイソパラメトリック要素において、同図(b)に示すように要素の一辺(節点1,2,5)をクラック先端に移動して合体させ、中間節点(節点6,8)をクラック先端方向に1/4だけ移動したものである。この要素をクラック先端に配置することによって、クラック先端近傍の変位分布が表現できる。ここで用いた特異要素は、形状関数を変えずに節点の移動だけによって特異性を表現できるので、通常アイソパラメトリック要素を使用したFEM解析プログラムを修正することなしに利用できる利点がある。有限要素法による応力拡大係数の解析方法[9]としては、直接法やエネルギー法などが提案されている。直接法は、解析より求めたクラック先端近傍の応力あるいは変位から、理論式に基づき応力拡大係数を決定する方法であり、応力を用いるか変位を用いるかによってそれぞれ応力法と変位法とに分けられる。エネル

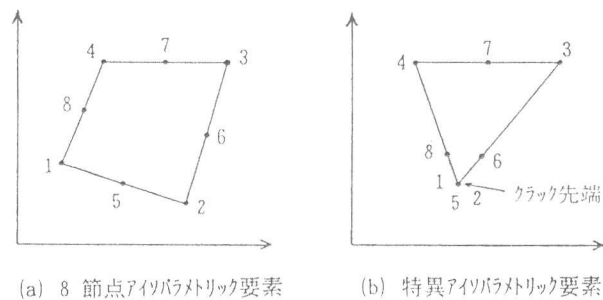


図-3 クラックの解析に用いた特異要素

ギー法は、有限要素法によりエネルギー解放率を計算し、弾性体におけるクラック進展に伴うエネルギー解放率と応力拡大係数との対応関係より応力拡大係数を決定する方法であり、全エネルギー法やJ積分法などがある。ここでは応力拡大係数の決定方法として変位法を採用し、クラック先端部に配置した特異要素の節点変位より応力拡大係数を決定する方法について述べる。

(1) Shihらの方法

特異要素を用いて表現されるクラック面の変位分布と理論式による変位分布を比較することにより、応力拡大係数を決定する。この方法は、最初、ShihらによりモードIクラックに対して提案され、その後、混合モードクラックに適用できるように拡張されたものである[7],[8]。式の導き方の説明は省略し、応力拡大係数の決定式だけを示せば次式のようなになる(図-4参照)。

$$K_I = \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{G}{\kappa+1} [4(v_B' - v_D') + v_E' - v_C']$$

$$K_{II} = \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{G}{\kappa+1} [4(u_B' - u_D') + u_E' - u_C'] \quad (3)$$

ただし、 K_I 、 K_{II} ：モードIおよびモードIIに対する応力拡大係数、 L ：クラックに接した特異要素の辺長、 v_B' 、 v_C' ：節点B,Cにおける y' 方向変位、 u_B' 、 u_C' ：節点B,Cにおける x' 方向変位、平面ひずみの場合： $\kappa = (3 - 4\nu)$ 、平面応力の場合： $\kappa = (3 - \nu)/(1 - \nu)$
 G ：せん断弾性係数、 ν ：ポアソン比

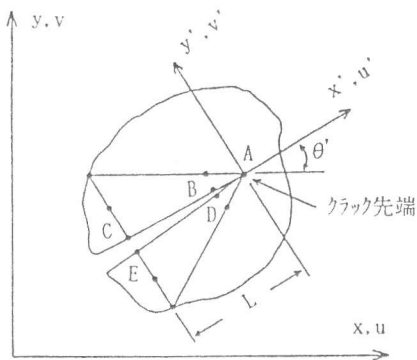


図-4 クラック先端近傍の特異要素

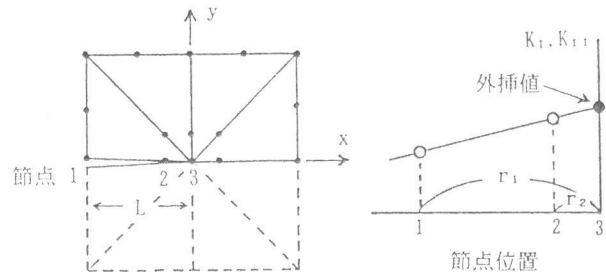


図-5 応力拡大係数の外挿

(2) 変位外挿法

クラック先端近傍の開口およびすべり変位は、(2)式において $\theta = \pm\pi$ としたときの特異項の相対変位として求められる。これらの変位より、応力拡大係数 K_I および K_{II} は以下のように与えられる。ただし、 r_i はクラック先端からクラック面上の点 i までの距離、 v_i および u_i は、それぞれ、節点 i における開口変位およびすべり変位を表す。

$$K_I = \frac{(\kappa+1)}{2G} \sqrt{\frac{2\pi}{r_i}} v_i, \quad K_{II} = \frac{(\kappa+1)}{2G} \sqrt{\frac{2\pi}{r_i}} u_i \quad (4)$$

クラック面において節点1(節点C,E)および節点2(節点B,D)の2点を考えると(図-4参照)、これらの節点における開口変位からモードIの応力拡大係数 K_{I1} 、 K_{I2} が、また、すべり変位からモードIIの応力拡大係数 K_{II1} 、 K_{II2} が上式より計算できる。そして、これら2節点より求めた各モードの応力拡大係数の値を用いて外挿によって K_I および K_{II} を決定する。これは、クラック先端近傍での直接解の精度低下を避けるために、周囲の節点変位から応力拡大係数を求め、 $r \rightarrow 0$ へ外挿する方法である[10]。変位を用いているので変位外挿法と呼ばれている。いま、

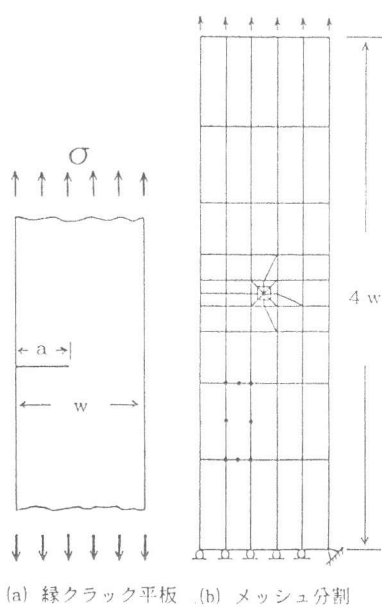
図一5に示すような直線外挿を考えると、応力拡大係数 K_I および K_{I1} は、次式によって与えられる。ただし、クラック先端から節点1および節点2までの距離は、 $r_1=L$ および $r_2=L/4$ となる。

$$K_I = \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{G}{3(\kappa+1)} [8(v_B' - v_D') + (v_E' - v_C')]$$

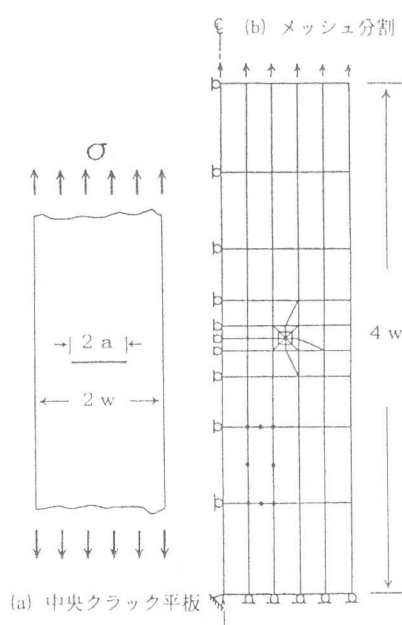
$$K_{I1} = \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{G}{3(\kappa+1)} [8(u_B' - u_D') + (u_E' - u_C')] \quad (5)$$

3. 二次元モードIクラックの解析

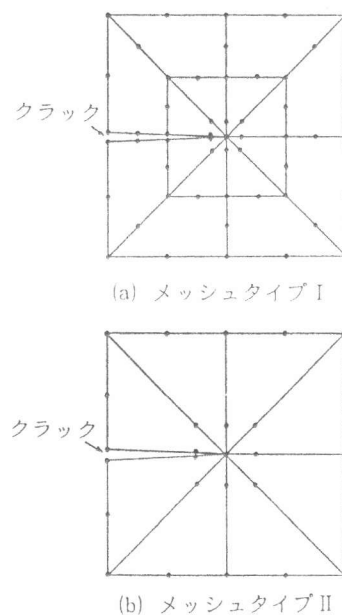
一様な引張応力を受ける縁クラック平板および中央クラック平板を解析対象として、モードIの応力拡大係数を決定した。解析モデルの概略は、図一6および図一7に示すとおりである。解析対象のメッシュ分割に際しては、クラック先端を囲むように8個の特異要素を配置し、それ以外の領域には通常の要素を用いた。また、クラック先端におけるメッシュ分割の細粗の影響について検討するため、クラック先端部における同一面積のメッシュ分割を図一8に示す二通りのメッシュタイプで行った。なお、材料特性としては、弾性係数 21000kgf/mm^2 、ポアソン比0.3を仮定し、平板の厚さ 1.0mm として平面ひずみ弾性解析を行った。



図一6 一様引張を受ける縁クラック平板



図一7 一様引張を受ける中央クラック平板



図一8 クラック先端近傍のメッシュ分割

縁クラック平板および中央クラック平板の応力拡大係数は、それぞれ、表一1および表一2に示すとおりである。ここでは、石田の解析解に対する有限要素法による数値解の相対誤差をカッコ内に示し、精度の目安とした。なお、有限要素法による数値計算は、単精度により行った。

これらの解析結果より以下のことがわかった。1) (3) 式および(5) 式ともにメッシュタイプIを適用した場合の精度がよい、すなわちクラック先端部のメッシュ分割を細かくするほうが精度よく応力拡大係数を決定できる。2) メッシュタイプの相違による応力拡大係数の差異は、(5) 式よりも(3) 式のほうが大きくなる。つまり、(3) 式は、(5) 式に比較してクラック先端部のメッシュ分割の影響が大きい。3) メッシュタイプIを用いた場合、(3) 式の精度は、-6% から9%であり、(5) 式の精度は $\pm 1.5\%$ 以内である。

表一 1 縁クラック平板における応力拡大係数 *

クラックの長さ a/w	解 析 解					有 限 要 素 法			
	石田	Bueckner	Chatterjee	Keer	Cardew	(3) 式		(5) 式	
						メッシュタイプ I (誤差%)	” II	メッシュタイプ I (誤差%)	” II
0.1	0.3761	0.3755	0.375	0.3760	0.376	0.383 (1.8)	0.382 (1.6)	0.372 (-1.1)	0.367 (-2.4)
0.3	0.9092	0.9083	0.9071	0.9092	0.909	0.909 (0.0)	0.904 (-0.6)	0.906 (-0.4)	0.900 (-1.0)
0.5	1.998	1.984	1.982	1.998	2.00	1.956 (-2.1)	1.917 (-4.1)	1.986 (-0.6)	1.975 (-1.2)
0.7	5.323	-----	5.14	-----	5.33	5.030 (-5.5)	4.788 (-10.1)	5.253 (-1.3)	5.213 (-2.1)

* 解析解は文献[6]による。表中の数値は $K_I/\sigma\sqrt{\pi}$ の値を表す。誤差(%)は石田の解との比較を表す。

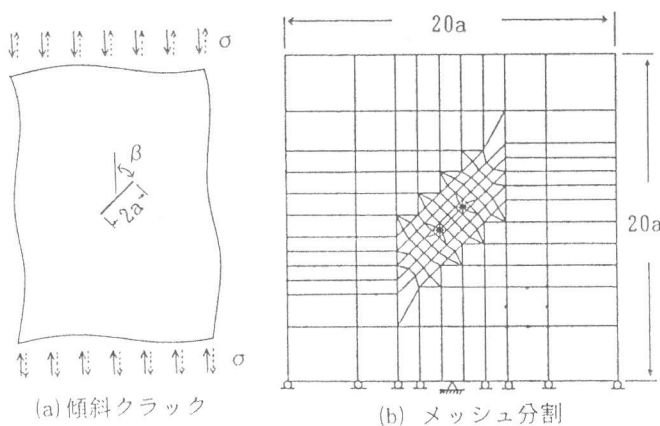
表一 2 中央クラック平板における応力拡大係数 *

クラックの長さ a/w	解 析 解					有 限 要 素 法			
	石田	Brown	Feddersen	Koiter	多田	(3) 式		(5) 式	
						メッシュタイプ I (誤差%)	” II	メッシュタイプ I (誤差%)	” II
0.1	1.0060	1.011	1.0062	1.0048	1.0060	1.093 (8.6)	1.214 (20.7)	1.017 (1.1)	1.035 (2.9)
0.3	1.0577	1.054	1.0594	1.0510	1.0574	1.085 (2.6)	1.109 (4.9)	1.059 (0.1)	1.058 (0.0)
0.5	1.1867	1.183	1.1892	1.1757	1.1862	1.204 (1.5)	1.217 (2.6)	1.187 (0.0)	1.183 (-0.3)
0.7	1.4882	1.472	1.4841	1.4779	1.4873	1.503 (1.0)	1.514 (1.7)	1.486 (-0.1)	1.481 (-0.5)

* 解析解は文献[5]による。表中の数値は $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ の値を表す。誤差(%)は石田の解との比較を表す。

4. 二次元混合モードクラックの解析

一様な引張応力を受ける無限板中の傾斜クラックおよび一様な圧縮応力を受ける無限板中の傾斜クラックを解析対象として、モード I およびモード II の応力拡大係数を決定した。解析モデルの概略を図一 9 に示す。クラック先端のメッシュ分割には、メッシュタイプ I を適用した。解析に用いた材料特性および解析条件は、モード I クラックの解析におけるそれらと同じである。図のような一様な引張応力に対して、無限板中の傾斜クラックの応力拡大係数の解析解は、 $K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \cdot \sin^2 \beta$ 、 $K_{II} = \sigma\sqrt{\pi a} \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta$ となる。種々の β に対する解析解と (5) 式より求めた数値解の比較結果を表一 3 に示す。ここでは有限要素解析領域をクラック長さの 10 倍の範囲としてモデル化したが、数値解と解析解はよく一致している。



図一 9 一様応力を受ける無限板中の傾斜クラック

表一 3 引張を受ける傾斜クラックの応力拡大係数 *

β (°)	解 析 解		数 値 解	
	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
15	0.067	0.250	0.068	0.253
30	0.250	0.433	0.254	0.438
45	0.500	0.500	0.506	0.505
60	0.750	0.433	0.759	0.437
75	0.933	0.250	0.944	0.252

* $F_I = K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ 、 $F_{II} = K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$

一様な圧縮応力を受ける傾斜クラックの応力拡大係数は、 $K_{I1}=0$ 、 $K_{I1}=\sigma\sqrt{\pi a}\cdot\sin\beta(\cos\beta-\mu\cdot\sin\beta)$ として与えられる[11]。ただし、 μ はクラック面の摩擦係数である。この式は、作用せん断力から摩擦抵抗力を差引いた有効せん断力が、モードIIの変形に寄与するとして導かれたものである。

有限要素法による数値解析では、クラックの特性を Goodman らの用いたジョイント要素（長さL、幅が零の4節点長方形要素）によりモデル化した[12]。クラックの特性は、 $k=21000\text{kgf/mm}^2$ を基本定数として、クラックの垂直剛性 $k_n=100k$ 、せん断剛性 $k_s=\alpha k$ と仮定した。ただし、 α については、0.1/100, 1/20, 1/10, 1/5, 1/2, 1の7ケースについて解析した。

図-10に示した $\mu=0$ の解析解と $\alpha=0$ の数値解は、よく一致している。一方、 $\alpha\neq 0$ の数値解は、どのケースについても $\beta=45^\circ$ で最大値をとり、 $\mu\neq 0$ の解析解の傾向とは異なっている。

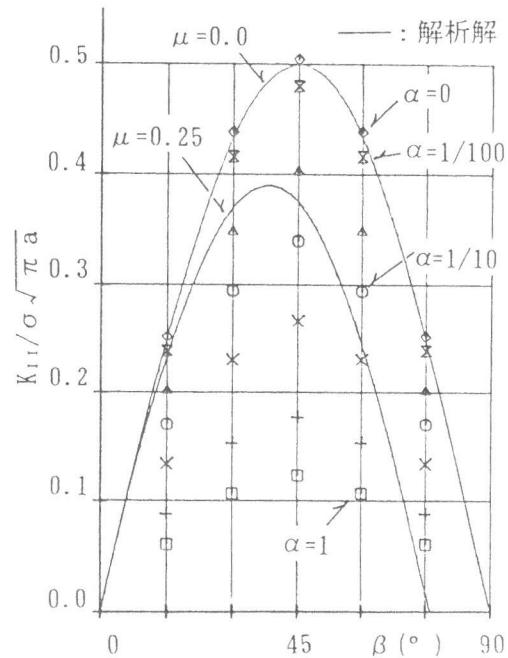


図-10 圧縮を受ける傾斜クラックの応力拡大係数

5. まとめ

本論文では特異要素を用いた応力拡大係数の決定方法を示し、代表的な二次元クラック問題の数値解析によりその適用性を検証した。これらの検討結果より以下の結論が得られた。

- 1) クラック先端近傍に8個の特異要素を配置し、特異要素の節点変位より決定した応力拡大係数に対して外挿法を適用することにより、簡便かつ精度よく応力拡大係数を決定できた。
- 2) Shihらの方法(3)式よりも変位外挿法(5)式を適用した方が、二次元クラック問題の応力拡大係数を精度よく決定できた。
- 3) 圧縮を受ける無限板中の傾斜クラックに対しては、クラックの特性をジョイント要素を用いてモデル化することにより、引張を受ける場合と同様に応力拡大係数を決定できた。

<参考文献>

- 1) 三橋博三：コンクリートの破壊力学の現状と展望，コンクリート工学，Vol.25.No.2, pp.14~25, 1987
- 2) 日本コンクリート工学協会：コンクリート構造の破壊力学に関するコロキウム・委員会報告，pp.98~103, 1990
- 3) 岡村弘之：線形破壊力学入門，培風館，pp.15~30, 1989
- 4) 矢川元基：破壊力学，培風館，pp.241~247, 1988
- 5) 石田 誠：き裂の弾性解析と応力拡大係数，培風館，pp.144~145, 1976
- 6) 石田良平・慶田由紀雄：縁き裂平板の弾性解析と熱応力拡大係数の過渡的挙動，日本機械学会論文集（A編）54巻506号，pp.1872~1878, 1988
- 7) G.C.Sih and A.Ditommaso: Fracture mechanics of concrete, Martinus Nijhoff Publishers, pp.183~192, 1985
- 8) C.F.Sih et al: Crack extension modeling with singular quadratic isoparametric elements, Int. J. Fract., pp.647~651, 1976
- 9) 白鳥正樹 他：数値破壊力学，実教出版，pp.48~77, 1980
- 10) 鷺津久一郎 他：有限要素法ハンドブックII，培風館，pp.468~470, 1981
- 11) P.H.Melville：Fracture mechanics of brittle materials in compression, Int. J. Fract., pp.532~534, 1977
- 12) 川本眺万・林 正夫：地盤工学における有限要素解析，培風館，pp.252~287, 1978