

## 論 文

## [2014] 2方向入力を受ける鉄筋コンクリート造柱の弾塑性解析

正会員○北嶋 圭二（日大大学院、青木建設研究所）

同 上 安達 洋（日本大学理工学部海洋建築工学科）

同 上 神田 亮（日本大学生産工学部建築工学科）

同 上 小泉 達也（日大大学院）

## 1. はじめに

2方向入力を受ける鉄筋コンクリート造（以下、RC）柱の弾塑性挙動は、2軸曲げ相互作用により複雑な挙動を示すことが、既往の実験的研究及び解析的研究により指摘されている。また、これまでに行なった水平2方向の地震動を再現できる2軸振動台実験結果においても、2方向入力時には部材は複雑な挙動を示し、耐力の低下が著しかった。この2軸相互作用によるRC柱の複雑な挙動を、構造物の応答解析上で考慮する解析モデルとしては、柱断面を数少ないバネの組合せで構成したモデル等が提案されている。また、柱単体の解析モデルとしては、ファイバー法が有効であり、断面でのモーメント・曲率関係を積分し部材としての荷重変形関係を求める方法、または、危険断面での曲率のみから部材の変形を求める方法などが提案されている。

本研究は、材料の非線形な応力-ひずみ関係に基づく柱部材の2軸曲げ弾塑性解析法を開発し、2方向入力を受けるRC柱の弾塑性履歴性状を解析的に把握することを目的とする。ここでは、材料の非線形応力を弾性応力と不釣合い応力の和と仮定した材料構成則に基づく解析手法の定式化を示し、解析結果と実験結果を比較・検討することにより解析手法の妥当性を検証した。

## 2. 解析手法

本研究で採用した解析手法は、曲げ挙動が卓越する部材の解析に有効な1次元有限要素法による1軸曲げ弾塑性解析[1]（ファイバー法・分割要素法と呼ばれる）を、2軸曲げ弾塑性解析に拡張したものである。本手法は、図1、図2に示すように部材を材軸方向にn領域、Y方向をm個、Z方向をn個に分割したモデルについて考える。座標軸、材端力及び材端変位、断面変形を図1のように仮定し、断面の平面保持が成立するものとする。また、各要素は剛性が一定の1次元材とし、その応力-ひずみ関係は、非線形な構成則に従うものとする。なお、コンクリート及び鉄筋の構成則は、エンドクロニック理論[2]及びCiampiの

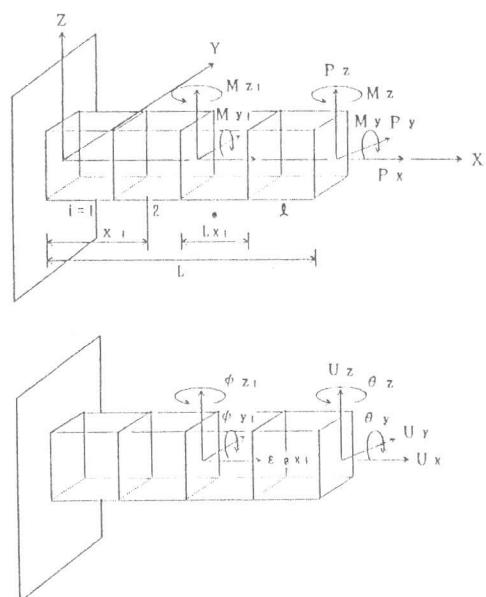


図1 部材の要素分割

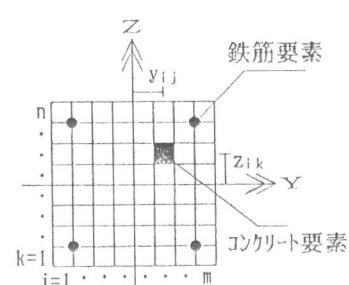


図2 断面の要素分割

モデル[3]を採用した。

要素ijkにおいて、増分応力  $\Delta\sigma_{ijk}$  と増分ひずみ  $\Delta\varepsilon_{ijk}$  との関係を、次式のように仮定する。

$$\Delta\sigma_{ijk} + \Delta\sigma_{ijk}'' = E_{ijk} \cdot \Delta\varepsilon_{ijk} \quad (1)$$

ここに、 $E_{ijk}$  はその要素の接線剛性を、 $\Delta\sigma_{ijk}''$  は不釣合い力を、添え字ijkは要素番号を表し、iを材軸方向の領域、jをY方向の層番号、kをZ方向の層番号とした。

これより、あるスライス内にあって固定端より  $x_i$  の距離にある i 領域中央断面の軸方向力、Y、Z軸回りの曲げモーメントのそれぞれの増分量を、 $\Delta P_{xi}$ 、 $\Delta M_{Yi}$ 、 $\Delta M_{Zi}$  とすればこれらは次式のように表される。

$$\Delta P_{xi} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (A_{ijk} \cdot \Delta\sigma_{ijk}) \quad (2.a)$$

$$\Delta M_{Yi} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (A_{ijk} \cdot \Delta\sigma_{ijk} \cdot z_{ik} + E_{ijk} \cdot I_{y_{ijk}} \cdot \Delta\phi_{yi}) \quad (2.b)$$

$$\Delta M_{Zi} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (-A_{ijk} \cdot \Delta\sigma_{ijk} \cdot y_{ij} + E_{ijk} \cdot I_{z_{ijk}} \cdot \Delta\phi_{zi}) \quad (2.c)$$

ここに、Aは要素の断面積、 $z_{ik}$ は i 領域 Z 方向 k 番目要素の Y 軸からの距離、 $y_{ij}$ は i 領域 Y 方向 j 番目要素の Z 軸からの距離、 $I_y, I_z$ は Y 及び Z 軸回りの断面2次モーメント、 $\Delta\phi_y, \Delta\phi_z$ は Y 軸、Z 軸回りの増分曲率である。

断面が、それぞれY、Z軸に関し平面保持が成り立つとしているため要素ijkの増分ひずみ量  $\Delta\varepsilon_{ijk}$  は次式のように表現できる。

$$\Delta\varepsilon_{ijk} = \Delta\varepsilon_{0xi} + \Delta\phi_{yi} \cdot z_{ik} - \Delta\phi_{zi} \cdot y_{ij} \quad (3)$$

ここに、 $\Delta\varepsilon_{0xi}$  は Y、Z 両軸の交点の位置での材軸方向増分ひずみ量である。

式(2.a)、(2.b)、(2.c)に式(1)、(3)を代入しマトリックスで表現すると次式のように表せる。

$$\{\Delta P_i + \Delta P_i''\} = [K_i] \cdot \{\Delta\delta_i\} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに、} \quad & \{\Delta P_i + \Delta P_i''\} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta P_{xi} + \Delta P_{xi}'' \\ \Delta M_{Yi} + \Delta M_{Yi}'' \\ \Delta M_{Zi} + \Delta M_{Zi}'' \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} \Delta P_{xi}'' = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (A_{ijk} \cdot \Delta\sigma_{ijk}'') \\ \Delta M_{Yi}'' = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (A_{ijk} \cdot \Delta\sigma_{ijk}'' \cdot z_{ik}) \\ \Delta M_{Zi}'' = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (-A_{ijk} \cdot \Delta\sigma_{ijk}'' \cdot y_{ij}) \end{array} \\ & \{\Delta\delta_i\} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta\varepsilon_{0xi} \\ \Delta\phi_{yi} \\ \Delta\phi_{zi} \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} K_{i11} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (A_{ijk} \cdot E_{ijk}) \\ K_{i12} = K_{i21} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (A_{ijk} \cdot E_{ijk} \cdot z_{ik}) \\ K_{i13} = K_{i31} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (-A_{ijk} \cdot E_{ijk} \cdot y_{ij}) \end{array} \\ & [K_i] = \begin{bmatrix} K_{i11} & K_{i12} & K_{i13} \\ & K_{i22} & K_{i23} \\ \text{sym.} & & K_{i33} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} K_{i22} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (A_{ijk} \cdot E_{ijk} \cdot z_{ik}^2 + E_{ijk} \cdot I_{y_{ijk}}) \\ K_{i23} = K_{i32} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (-A_{ijk} \cdot E_{ijk} \cdot y_{ij} \cdot z_{ik}) \\ K_{i33} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (A_{ijk} \cdot E_{ijk} \cdot y_{ij}^2 + E_{ijk} \cdot I_{z_{ijk}}) \end{array} \end{aligned}$$

$[F_i] = [K_i]^{-1}$  とすれば式(4)は次式のように表される。

$$\{\Delta\delta_i\} = [F_i] \{\Delta P_i + \Delta P_i''\} \quad (5)$$

次に、断面増分力  $\{\Delta P_i\}$  を力の釣合によって材端増分力  $\{\Delta P\}$  で表すと次式のようになる。

$$\{\Delta P_i\} = [b_i] \{\Delta P\} \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta P_{xi} \\ \Delta M_{yi} \\ \Delta M_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(L-x_i) & 1 & 0 \\ 0 & (L-x_i) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta P_x \\ \Delta P_y \\ \Delta P_z \\ \Delta M_y \\ \Delta M_z \end{Bmatrix}$$

ここに、 $x_i$  は  $i$  領域中央部の材端からの距離、 $L$  は部材長さである。

ここで、部材に対し仮想仕事の定理を適用すれば、次式のように表される。

$$\{\Delta P\}^T \{\Delta\delta\} = \sum_{i=1}^8 \int_b^a \{b_i\}^T [F_i] [b_i] \{\Delta P\} + [b_i]^T [F_i] \{\Delta P_i''\} dx \quad (7)$$

式(7)に式(5)、(6)を代入し整理すると次式のようになる。 $(a=x_i+0.5 \cdot Lx_i, b=x_i-0.5 \cdot Lx_i)$

$$\begin{aligned} \{\Delta\delta\} &= \sum_{i=1}^8 \int_b^a ([b_i]^T [F_i] [b_i] \{\Delta P\} + [b_i]^T [F_i] \{\Delta P_i''\}) dx \\ \{\Delta\delta\} &= [F] \{\Delta P\} + \{\Delta P''\} \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)の両辺に  $[K]$  ( $= [F]^{-1}$ ) を乗じると、次式のような部材の剛性方程式を得る。

$$\{\Delta P\} + [K] \{\Delta P''\} = [K] \{\Delta\delta\} \quad (9)$$

$\{\Delta P\} + \{\Delta P''\} = [K] \{\Delta\delta\}$  となる。ただし、

$$\{\Delta P''\} = \{\Delta P_x'', \Delta P_y'', \Delta P_z'', \Delta M_y'', \Delta M_z''\}^T$$

ここに、左辺第2項は材端の不釣合い力増分である。

コンクリートの構成則は、エンドクロニック理論に基づいた構成則を採用した（図3）。この構成則は圧縮時の応力-ひずみ関係が連続的な関数として表現されているため、多数回の繰返しにも安定した解が得やすいこと、非線形性を主に不釣合い力を評価しているためひずみ軟化域でも追跡可能なことなどが特徴である。

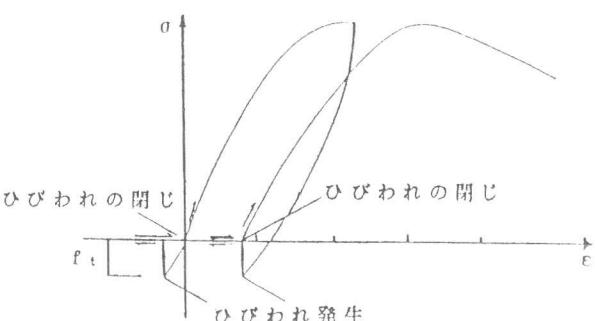


図3 コンクリートの応力-ひずみ関係

鉄筋の構成則はCiampiのモデルを採用した(図4)。これは、応力がひずみに対し陽な関数で表現されているため、応力算定にニュートン-ラプソン法などを用いて収束計算を行う必要がないことなどが特徴である。

### 3. 実験結果との比較

本節では、2方向静的載荷実験[4]・[5]のRC柱について解析を行う。解析の対象とした試験体は、2軸振動台実験で得られた応答変位と同経路の変位履歴を与えたSXYとSXY12、四つ葉載荷を行ったSXY4Dとした。試験体の断面形状及びコンクリート・鉄筋要素のモデル化は、試験体の構造諸元及び材料試験結果に従った。試験体の形状を図5、材料諸強度を表1、試験体一覧を要素分割数とともに表2に示す。材軸方向のモデル化は、部材の応力状態が実験では逆対称であるから、スパン中央の反曲点位置に集中荷重を加えた片持ち柱形式とした。要素の分割方法は、1軸曲げ解析で行った要素分割法検討結果[1]を参考にして定めた。解析は、はじめに目標軸力まで軸力を増分させたのち、実験で得られた水平変位を変位増分で与えた。ただし、解析モデルを片持ち柱形式としているので、与える水平増分変位は実験値の1/2とした。また、実験では、質点として柱頭に取り付けた重りの上下方向の回転を拘束するために設置したピンサポートにより、試験体の軸変位が拘束され軸力が変動した。解析ではこれを考慮して、式(9)として求めた部材の剛性マトリックスにピンサポートの軸剛性を重ね合わせた架構全体の剛性方程式によって解析を行った。

SXY、SXY12、SXY4Dの

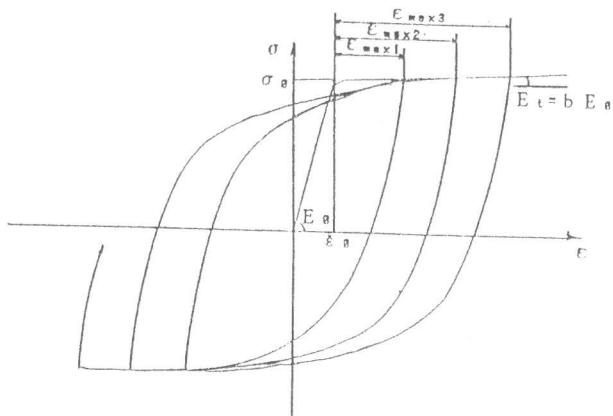


図4 鉄筋の応力-ひずみ関係

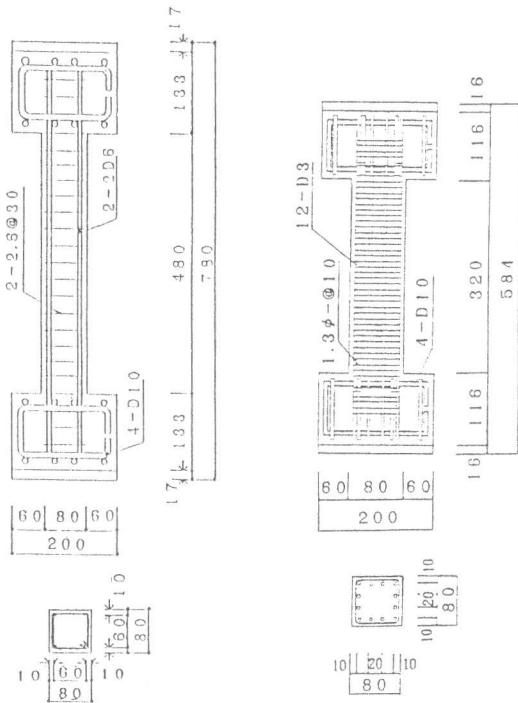


図5 試験体形状

表1 材料強度

\*UNIT kg/cm<sup>2</sup>

試験体名	鉄筋		コンクリート
	降伏強度*	降伏歪(μ)	圧縮強度*
SXY	4333	2083	264
SXY12	2911	1471	230
SXY4D			

NS、EW 各方向の荷重変位曲線を、実験結果と解析結果を比較してそれぞれ図6、図7、図8に示す。SXY、SXY12の解析結果の履歴性状は、両試験体とも全体的には実験結果を良く再現している。しかし、SXYではループの膨らみに差がみられる。これは、実験では部材角の小さな時点で付着割裂ひび割れが発生し、実験初期の段階で付着裂化が生じていることに起因していると考えられる。SXY12では解析の方が耐力低下が激しく、変形の大きなレベルでは耐力に差が生じている。これは、試験体の変形成分を曲げ変形だけで評価している本解析モデルに対し、試験体のシアスパン比が2であること、鉄筋のひずみが解析の方が著しく大きいことなどから、実験ではせん断変形の影響が比較的大きかったものと推測される。四つ葉載荷を行ったSXY4Dの解析結果では、実験結果同様、変位が一定に保たれる方向の耐力が直交方向の変位によって低下する2軸曲げ相互作用が確認できる。

解析の対象とした実験結果は、SXYでは付着割裂を伴った破壊形式を示したこと、SXY12ではシアスパン比が2と比較的小さかったためにせん断変形がかなりの比率を占めていると考えられることなど、本解析モデルでは十分表現できていない。したがって、既往の2軸曲げの実験結果の中から曲げ挙動が卓越したと考えられる青山らによ

表2 試験体一覧

試験体名	載荷経路	要素分割数	
		材軸方向 (a) cm	断面 (B*D) cm
SXY	振動台実験 応答変位	3 (2*4)	4 (8*8)
SXY12		2	4 (8*8)
SXY4D	四つ葉載荷	(16)	

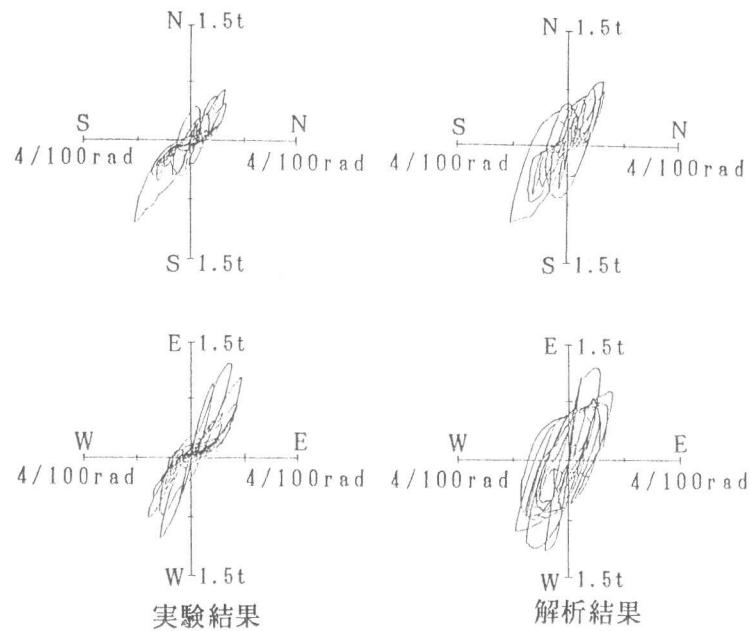


図6 荷重変位曲線 (SXY)

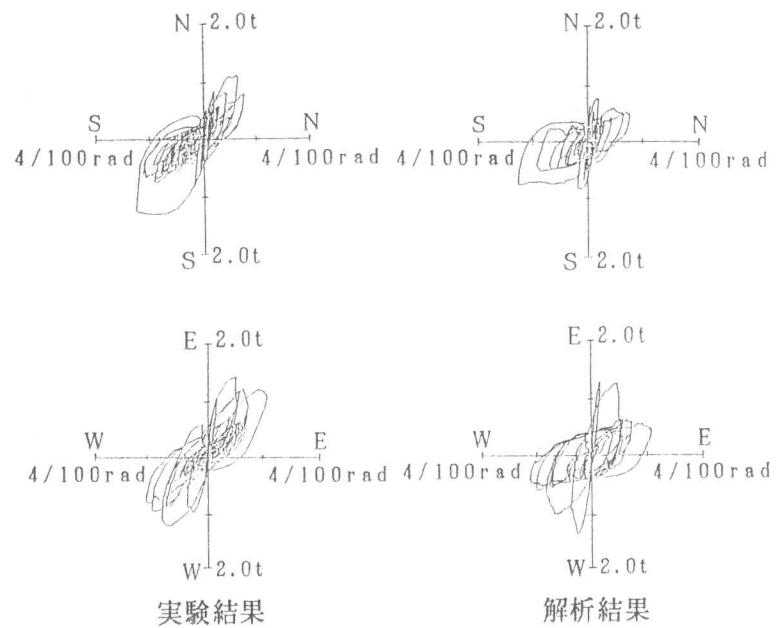


図7 荷重変位曲線 (SXY12)

る実験結果[6]を解析し、解析モデルの妥当性を検証した。実験はシアスパン比3の片持ち柱形式の実験で、8の字型の載荷経路を変位制御で与えている。解析の対象とした試験体は一定軸力の試験体B8-0とした。

解析のパラメーターを表3に示す。解析で得られた荷重変位曲線と実験結果を比較して図9に示す。解析結果は実験結果と良く一致しており、曲げ挙動の卓越した部材に関して本解析モデルの妥当性が検証できたと言える。

#### 4.まとめ

- 1) RC柱の1軸曲げ問題を扱った1次元有限要素法による手法を2軸曲げに拡張した。本解析モデルは、曲げの卓越する2軸曲げ実験の履歴性状を再現出来た。
- 2) 2方向静的載荷実験でのRC柱の履歴性状を解析を通して把握することができた。

#### 参考文献

- [1]神田亮、白井伸明、安達洋他”鉄筋コンクリート部材の弾塑性応答性状に関する研究”  
コンクリート工学年次論文報告集 1988 PP313-318
- [2]Bazant,Z.P.etal,:Endochronic Theory of Inelasticity and Failure of Concrete,  
Proe.of the ASCEvol 102,No EM4 August,1976
- [3]Ciampi,V.etal,: Analytical Model for Concrete Anchorages of reinforcing Bars under  
Generalized Excitation,  
Report No.UCB/EERC-82/23.University of California,Berkeiey,Nov/1982
- [4]安達洋、中西三和他：2方向入力を受ける鉄筋コンクリート柱の応答性状に関する研究  
(その3・静的実験概要及び実験結果) 日本建築学会大会学術講演梗概集 1990 PP879-880
- [5]安達洋、中西三和他：2方向入力を受ける鉄筋コンクリート造柱の実験的研究  
コンクリート工学年次論文報告集 1991
- [6]李康寧”鉄筋コンクリート造立体骨組の弾塑性地震応答に関する研究”  
昭和63年度 東京大学学位論文



図8 荷重変位曲線 (SXY4D)

表3 解析モデルのパラメータ

試験体名	要素分割数		材料諸強度			軸力(kg)	*UNIT kg/cm <sup>2</sup>		
	材軸方向	断面 (B*D)cm	鉄筋 : D 6	降伏強度*					
				降伏歪(μ)	圧縮強度*				
B 8 - 0	3	6*6 (20*20)	4260	1976	276	8000			

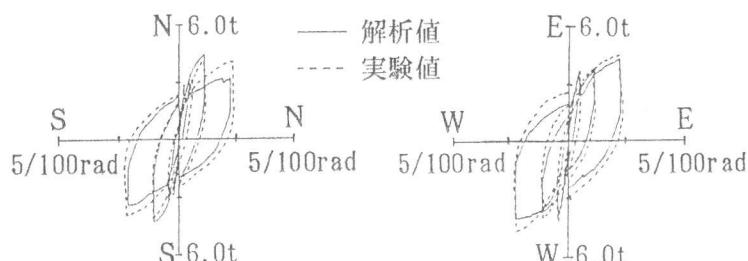


図9 荷重変位曲線 (B8-0)