

論文

[2045] RCはりの終局挙動に関する解析的研究

正会員 ○中村 光 (名古屋大学大学院)

正会員 二羽淳一郎 (名古屋大学土木工学科)

正会員 田辺 忠顕 (名古屋大学土木工学科)

1. 序

鉄筋コンクリート (RC) 構造物の破壊パターンを詳細に追跡し、その挙動を理解することは、安全性を十分に考慮した上で経済的な設計を行うために大変有用である。そこで本研究では、有限変形理論を用い面内変形をする RC はりを対象とした定式化を行った。そして、有限変形理論に基づく RC はりの有限要素解析を行うことで、RC はり構造のより正確な非線形挙動の追跡を試みた。さらに RC 構造物の終局状態での挙動と構造物の不安定性を結び付け、RC 構造物の多様な破壊現象に対する理論的洞察の可能性について考察した。

2. 仮想仕事の原理による有限変形理論の定式化

面内変形を行う平面要素を対象とする。増分理論に基づいて有限変形問題の定式化[1]を行うため、ある荷重状態における応力、ひずみ、表面力、変位をそれぞれ $(\sigma_x^{(0)}, \sigma_y^{(0)}, \tau_{xy}^{(0)})$, $(\varepsilon_x^{(0)}, \varepsilon_y^{(0)}, \gamma_{xy}^{(0)})$, $(f_x^{(0)}, f_y^{(0)})$, $(u^{(0)}, v^{(0)})$ で表す。この時、微小な荷重増分により生じる各増分を $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$, $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$, (f_x, f_y) , (u, v) とする。最終的に増分理論に基づく有限変形理論の仮想仕事方程式は、次式となる。

$$\begin{aligned} & \iiint \left[\left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \sigma_x + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial y} \right)^T \sigma_y + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} \right)^T \tau_{xy} + \left(\delta \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T \tau_{xy} \right] dV \\ & + \iiint \left[\left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \sigma_x \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} \right) + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} \right)^T \sigma_x \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} \right) + \left(\delta \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T \sigma_y \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} \right) + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial y} \right)^T \sigma_y \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} \right) \right. \\ & + \left. \left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \tau_{xy} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} \right) + \left(\delta \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T \tau_{xy} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} \right) + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} \right)^T \tau_{xy} \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} \right) + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial y} \right)^T \tau_{xy} \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} \right) \right] dV \\ & + \iiint \left[\left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \sigma_x^{(0)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} \right)^T \sigma_x^{(0)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\delta \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T \sigma_y^{(0)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial y} \right)^T \sigma_y^{(0)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right. \\ & + \left. \left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \tau_{xy}^{(0)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\delta \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T \tau_{xy}^{(0)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} \right)^T \tau_{xy}^{(0)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial y} \right)^T \tau_{xy}^{(0)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dV = \delta W_r \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \delta W_r = & - \iiint \left[\left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \sigma_x^{(0)} + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial y} \right)^T \sigma_y^{(0)} + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} \right)^T \tau_{xy}^{(0)} + \left(\delta \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T \tau_{xy}^{(0)} \right] dV \\ & - \iiint \left[\left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \sigma_x^{(0)} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} \right) + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} \right)^T \sigma_x^{(0)} \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} \right) + \left(\delta \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T \sigma_y^{(0)} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} \right) + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial y} \right)^T \sigma_y^{(0)} \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} \right) \right. \\ & + \left. \left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \tau_{xy}^{(0)} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} \right) + \left(\delta \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T \tau_{xy}^{(0)} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} \right) + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial x} \right)^T \tau_{xy}^{(0)} \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} \right) + \left(\delta \frac{\partial v}{\partial y} \right)^T \tau_{xy}^{(0)} \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} \right) \right] dV \\ & + \int \int [(\delta u)^T f_x + (\delta v)^T f_y] dS + \int \int [(\delta u)^T f_x^{(0)} + (\delta v)^T f_y^{(0)}] dS = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、3次の微小量は無視して線形化している。(1)式の第一項が微小変形理論におけるひずみエネルギーの変分で応力がなす仮想仕事項を表し、第2項は変形の進行にともなって生じる付加応力成分の仮想仕事項、第3項は初期応力のなす仮想仕事項である。また、(2)式は前段階における釣合方程式が完全に満たされないために生じる不平衡力がなす仮想仕事である。

有限変形理論を支配する仮想仕事方程式を導いたので、増分理論に基づく解析の形に書き改める。有限要素解析に用いる増分形の剛性方程式を次式に示す。

$$([K] + [K_0] + [K_g])\{\Delta d\} = \{\Delta F\} + \{F_0\} - ([\tilde{K}] + [\tilde{K}_0])\{d_0\} \quad (3)$$

ここに $[K]$ は接線剛性マトリクス, $[K_0]$ は初期ひずみマトリクス, $[K_g]$ は幾何剛性マトリクス, $\{F_0\} - ([\tilde{K}] + [\tilde{K}_0])\{d_0\}$ は釣合方程式が完全に満足されないために生じる不平衡力である。 $[K]$, $[K_0]$, $[K_g]$ の具体的な形を以下に示す。

$$[K] = \int \int \int [B]^T [D] [B] dV \quad (4)$$

$$[K_0] = \int \int \int [B]^T [D] [\xi^{(0)}] [G] dV + \int \int \int [G]^T [\xi^{(0)T}] [D] [B] dV + \int \int \int [G]^T [\xi^{(0)T}] [D] [\xi^{(0)}] [G] dV \quad (5)$$

$$[K_g] = \int \int \int [G]^T [\sigma^{(0)}] [G] dV \quad (6)$$

長方形双一次要素を対象としたため、 $[G]$, $[\xi^{(0)}]$, $[\sigma^{(0)}]$ は次のように書き表される。

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A]^{-1} & [0] \\ [0] & [A]^{-1} \end{bmatrix}$$

$$[\xi^{(0)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} & \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} \\ \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} & \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad [\sigma^{(0)}] = \begin{bmatrix} \sigma_x^{(0)} & \tau_{xy}^{(0)} & 0 & 0 \\ \tau_{xy}^{(0)} & \sigma_y^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x^{(0)} & \tau_{xy}^{(0)} \\ 0 & 0 & \tau_{xy}^{(0)} & \sigma_y^{(0)} \end{bmatrix}$$

なお、 $[B]$ は線形のひずみ-変位マトリクス, $[D]$ は材料の構成マトリクス, $[A]$ は一般化座標マトリクスである。

3. 解析方法

3.1 材料の構成式

コンクリートは直交異方性材料と仮定し、クラックの発生していないコンクリートの増分形の構成関係式として次式を用いた。

$$[D_{c1}] = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{E_{c1}}{\nu\sqrt{E_{c1}E_{c2}}} & \nu\sqrt{E_{c1}E_{c2}} & 0 \\ \nu\sqrt{E_{c1}E_{c2}} & E_{c2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{c1}+E_{c2}-2\nu\sqrt{E_{c1}E_{c2}}}{4} \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで、添え字1, 2は異方性の主軸を示す。 ν はポアソン比である。

一方、ひび割れ後のコンクリートの構成関係式は、ひび割れが第一主応力に直角に生じると仮定し、次式のように表した。

$$[D_{c2}] = \begin{bmatrix} E_{c1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{c2} & 0 \\ 0 & 0 & E_{c3} \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここで、コンクリートの主軸方向の材料特性は図-1のように仮定した。(7), (8)式中の E_{c1} , E_{c2} は主軸方向の接線ヤング係数であり、図-1に示す材料特性の接線勾配により決定している。

鉄筋に対しては、bi-linear型の材料特性を仮定している。

3. 2 数値計算プログラム

有限要素解析は、(3)式

に示した増分形の剛性方程式を用い、変位増分法により行っている。各変位段階において生じる不平衡力に対する収束計算は、Newton-Raphson法を用いた。

$$\begin{aligned} \varepsilon < \varepsilon_{cr} & \quad \sigma = f_t \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon} \right)^{0.4} \\ \varepsilon_{cr} \leq \varepsilon < 0 & \quad \sigma = E_c \varepsilon \\ 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0 & \quad \sigma = -f'_c \left\{ 2 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right\} \\ \varepsilon_0 \leq \varepsilon < \varepsilon_m & \quad \sigma = \frac{-f'_c}{\varepsilon_0 - \varepsilon_m} (\varepsilon - \varepsilon_m) \\ \varepsilon_m \leq \varepsilon & \quad \sigma = 0 \end{aligned}$$

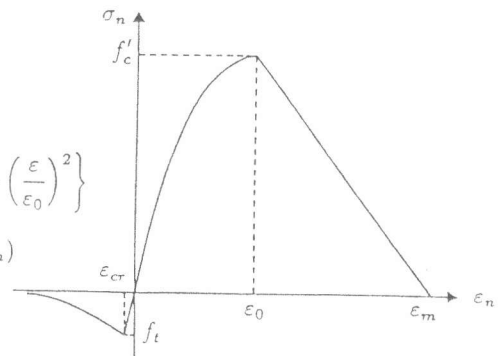


図-1 コンクリートの材料特性

また各変位段階では、構造物の接線剛性マトリクス

$([K] + [K_\theta] + [K_g])$ の固有値・固有ベクトルを求めている。本解析はupdated lagrangean法に基づいており、材料の特性も各釣合段階における接線剛性を用いているため、固有値・固有ベクトルは、各変位段階の釣合状態での構造物固有の特性を表すものと考えられる。

4. 構造物の不安定性[2]

構造不安定性は、構造物の破壊を定義する一つの重要な尺度と考えられる。構造物が死荷重を受ける場合、安定性の条件は、構造物の接線剛性マトリクス $([K] + [K_\theta] + [K_g])$ より得られる全ての固有値 (λ_i) が正であることで定義できる。

$$\lambda_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

また、中立平衡の臨界状態の条件としては、接線剛性マトリクスの固有値 (λ_i) の内、少なくとも一つが零であることで表現できる。

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = 0 \quad (10)$$

(10)式により定義される時点は、一般に臨界点と呼ばれ、臨界点で構造物には不安定な状態に移行する可能性が生じる。

臨界点は、limit pointとbifurcation pointの二つに分類することができる。

$$\mu = 0 \quad (11)$$

$$\{v_i\}^T \{f\} = 0 \quad (12)$$

ただし、(11)、(12)式中の、 $\{v_i\}$ は零の固有値に対応する固有ベクトルであり、 μ は荷重パラメータの増分、 $\{f\}$ は荷重ベクトルである。(11)式で定義される時点がlimit pointである。limit pointの典型的な例としては構造物に荷重を作用させた場合の荷重-変位曲線で、荷重降下を生じる場合の最大荷重点である。(12)式で定義される時点がbifurcation pointである。(12)式より、bifurcation pointでは、零の固有値に対応する固有ベクトルが、構造物に作用する荷重ベクトルに直交することが分かる。またbifurcation pointは、複数の平衡状態に移行する分岐点という意味を持ち、この点で構造物には今までと全く異なる変形状態に移行する可能性が生じる。

臨界点では構造物の剛性マトリクスは特異であり、少なくとも一つの零の固有値を持ち、構造

物が安定な状態であれば、接線剛性マトリクスは正定値であり全ての固有値が正であることは既に述べた。したがって、構造物が不安定な状態は接線剛性マトリクスが正定値でない、つまり少なくとも一つの負の固有値を構造物が持つことで定義できる。それゆえ、数値計算上では構造物の接線剛性マトリクスの負の固有値の存在によって、安定・不安定の判別を行うことができる。

しかしここで注意しなければならないことは、負の固有値に対して2つの状態が存在するということである。一つはlimit point後の釣合経路であり、もう一つはbifurcation point後の釣合経路である。変位制御法を用いれば、数値解析上limit pointを越えることは可能であり、limit point後の釣合経路も唯一求まる。一方先に述べたように、bifurcation point後では釣合経路は幾つも存在する。そのため、構造物がbifurcation point後どの経路を選択するかが重要となる。

5. 解析結果および考察

解析に用いた供試体は、池田ら[3]が行った実験と同様なものとした。供試体の形状および配筋図を図-2に示す。供試体は $a/d=1.3$ の比較的短いディーブピーム状のはりである。実験は対称2点集中荷重による単調載荷で行われたものである。一方、解析は実験の荷重作用点の変位を制御することにより行った。解析条件としては、コンクリートは圧縮強度 $264(\text{Kgf}/\text{cm}^2)$ 、引張強度 $26.9(\text{Kgf}/\text{cm}^2)$ とし、鉄筋は降伏強度 $3540(\text{Kgf}/\text{cm}^2)$ 、初期剛性 $1.99 \times 10^6(\text{Kgf}/\text{cm}^2)$ とした。

解析により得られた結果を図-3に示す。図中実線は有限変形理論に基づく結果で、破線は微小変形理論に基づく結果である。併せて実験値を図中 Δ で示している。

解析結果は終局時に至るまで実験値を非常によく追跡している。有限変形理論によるものと微小変形理論による結果を比べると、最大荷重点近傍までは両者はほぼ一致した。しかしながら、最大荷重点

近傍で荷重載荷点近くのコンクリートひずみが圧縮軟化領域に入ると、有限変形理論による解析値は微小変形理論による解析値より若干上昇することが分かった。今回の解析では両者の差はそれほど大きく現れなかったが、この理由としては解析の対象としたRCはり比較的短いものであり、その変形量も小さかったためと考えられる。

構造不安定性とRCはり構造の終局時の挙動の関係を考察する。さきに述べたように構造不安定性は、構造物の負の固有値の存在により調べることができる。

解析では、図中●印を越えたところで二つの負の固有値が発生し、その後■印までは、構造物

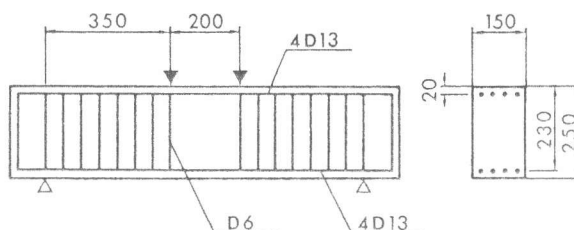


図-2 解析モデル

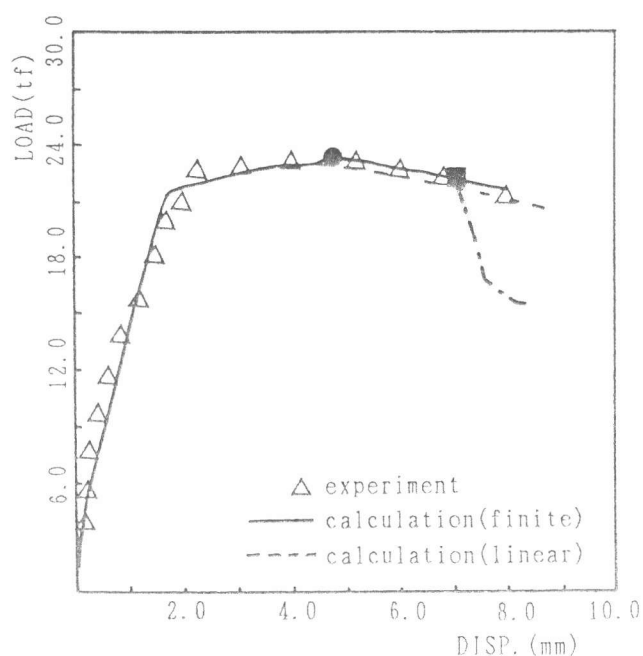


図-3 荷重-変位関係

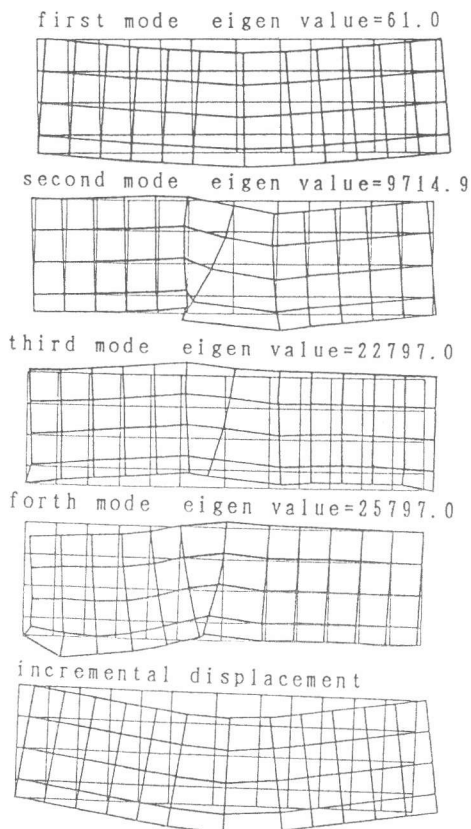


図-4 固有値・固有モードおよび変形増分

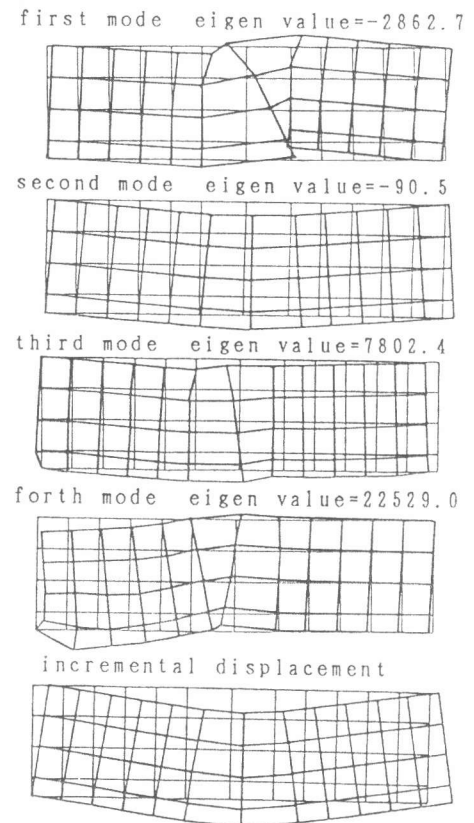


図-5 固有値・固有モードおよび変形増分

は二つの負の固有値を持ったままであった。そして●印を越えると、構造物には四つの負の固有値が発生した。図-4に●印手前での四次までの固有値・固有モードとその時の変形増分を、図-5に●印直後の四次までの固有値・固有モードと変形増分を、また図-6に■印直後の実線上の固有値・固有モードと変形増分を示す。

図-2中●印は荷重変位曲線の最大荷重点に対応しており、limit pointであると思われる。limit pointに対する推察は次のようにもできる。limit point後、構造物に作用する荷重は低下していき、構造物は荷重に対して不安定となる。しかし変位制御を行えばlimit pointを容易に越えることが可能であることから分かるように、変位に対しては不安定とならない。そのため接線剛性マトリクスの荷重作用点位置の行および列を削除したマトリクスは、正定値となる。実際●印以後■印までは、縮小したマトリクスでは負の固有値は発生していない。また、●印前後の固有値・固有モードを見れば●印以後2つの負の固有値が発生しているが、その固有モードに変化

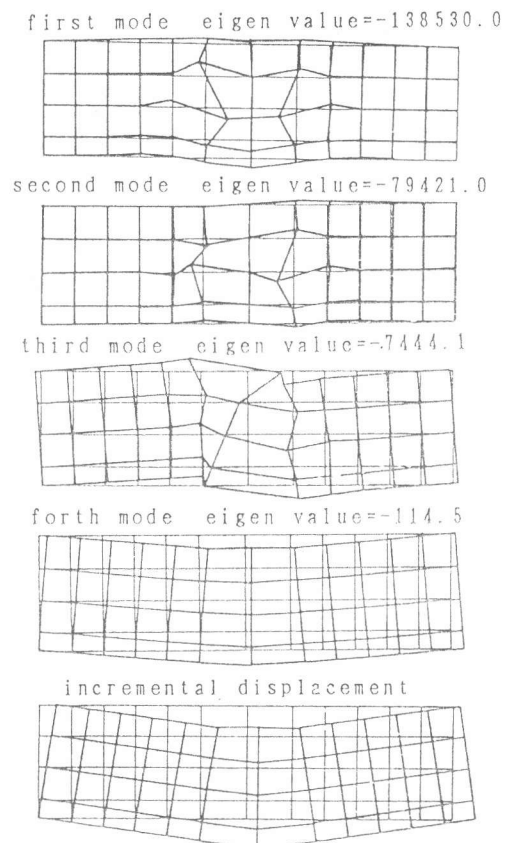


図-6 固有値・固有モードおよび変形増分

はなく、構造物は連続した釣合曲線上を移動している事が分かる。

さらに計算を進めると、■印以後で構造物には4つの負の固有値が生じた。この時、先ほどの縮小したマトリクスにも同時に2つの負の固有値が生じた。この時の固有モードを見ると、

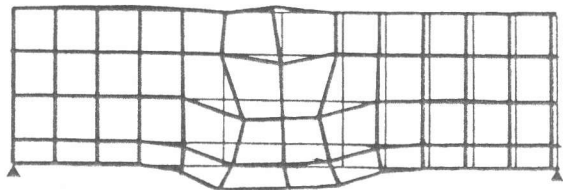


図-7 分岐枝上の構造物の変形増分

一次・二次モードに今までと全く無関係のように思われる固有モードが現れていることは非常に興味深い。この■印で構造物には、bifurcation pointが発生したと考えられる。bifurcation pointで零の固有値に対する構造物の固有モードは荷重ベクトルに直交するが、■印以後新たに生じた一次・二次の固有モードと荷重ベクトルの内積を調べると、limit point(●印)での一次・二次の固有モードのそれに比べ非常に小さく殆ど零に近くなっていた。

bifurcation pointが■印で生じたことにより、この点で構造物には新たな釣合経路が発生する。■印以後の実線上の変形増分を調べると、実線上では変形増分は■印以前と大きく変わることはなかった。実線で示される釣合経路は、■点前後でも連続な釣合経路と考えられる。

次に、■点で図-6に示す1次モードを初期変位とする解析を行うと、図-3の一点鎖線となる釣合経路を解析上得ることができた。これがbifurcation point後に生じる新たな釣合経路の一つであり、この釣合経路により、荷重が急激に低下していき、解析上構造物が破壊に至る性状を表現し得たと考えられる。図-7にbifurcation pointで発生する新たな釣合経路上の構造物の変形増分を示す。図によれば、RCはり荷重載荷点下部に局所的な変形の集中を生じる変形挙動を示すことで、荷重が急激に低下し構造物が破壊に至る性状を示していることが分かる。しかしながら、本解析ではコンクリートのひずみがsoftening領域にあるため、得られた結果は要素分割などの影響を受けると考えられる。本解析では、その影響の程度についての検討はしておらず、今後より詳細な検討が必要と考えている。

5. 結論

RCはり構造を対象として有限変形理論に基づく有限要素解析を行い、構造物の終局時の挙動を構造不安定性を考慮して詳細に調べ、以下の結論を得た。

1. 構造不安定性に対する考察を行いbifurcation pointがRC構造物の破壊に密接な関係があることが分かった。また、bifurcation point後の任意の釣合経路を選択することで、RC構造が終局時に破壊に至る挙動を解析上明確に表せた。
2. 微小変形理論に基づく解析と有限変形理論に基づく解析との比較を行った結果、構造物内のコンクリートひずみが圧縮応力低下領域に入るまでは両者の差は殆ど見られなかったが、圧縮応力低下領域に入った後は、若干両者の間に違いが生じた。

参考文献

- [1] 川井忠彦:座屈問題解析、培風館、1970
- [2] 中村光,二羽淳一郎,田辺忠顕:鉄筋コンクリート構造物の終局破壊点予測に関する解析的研究、コンクリート構造物の靱性と配筋方法に関するシンポジウム論文集、1990、pp.181-188
- [3] 池田尚治,南雲広幸:RCおよびPC構造物への有限要素法の合理的適用方法に関する研究、土木学会論文集、第414号/V-12、1990