

論文

[1068] 動的粘塑性解析手法によるフレッシュコンクリートの流動シミュレーション

正会員 谷川 恭雄(名古屋大学建築学科)  
 正会員 森 博嗣(名古屋大学建築学科)  
 正会員 ○黒川 善幸(名古屋大学建築学科)  
 小高 茂央(名古屋大学大学院)

1. まえがき

有限要素法による粘性流体の流動解析は、各分野で広く利用され実績を上げているが、降伏値をもつ粘塑性流体を対象とした解析手法はまだ確立されていない。筆者らは、既に、静的な釣合に動的挙動の近似補正を行う手法によって、粘塑性体の流動・変形挙動を求める有限要素解析手法を提案し、フレッシュコンクリートの流動シミュレーションに適用してきた[1,2]。しかしながら、この解析手法は、基本的には瞬間的な等速度運動を仮定した定常解であり、振動下の流動シミュレーションなどのように、速度変化の激しい問題に対しては精度に限界がある。

一方、振動解析等に用いられる運動方程式に基づく解析手法は、離散化された質点系モデルに数多く適用されており[3]、上記の降伏問題が解決されれば、動的な粘塑性流動解析方法として静的解析では得られない精度が期待できる。そこで、本報では、サスペンション要素法[4]、および粘塑性有限要素法に運動方程式を組み込む動的解析の計算手法について検討を行った。

2. 基本原理

2.1 降伏値を考慮した運動方程式

ビンガムモデルのような降伏値をもつ粘塑性材料の挙動は、以下のような運動方程式に従う。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [C'] \operatorname{sgn}(\dot{u}) + [K]\{u\} = \{f\} \quad (1)$$

ここに、 [M]：質量マトリックス [K]：剛性マトリックス  
 [C]：粘性マトリックス [u]：変位ベクトル  
 [C']：降伏値による減衰マトリックス {f}：物体力ベクトル

式(1)の記号sgnは符号であり、{u}の同方向に降伏値による抵抗力が左辺に加算される。線形加速度法によって離散化される速度および変位は、加速度によって以下のように表される。

$$\{\dot{u}_n\} = \{\dot{u}\} + \frac{\Delta t}{2}\{\ddot{u}\} + \frac{\Delta t}{2}\{\ddot{u}_n\}, \quad \{u_n\} = \{u\} + \Delta t\{\dot{u}\} + \frac{\Delta t^2}{3}\{\ddot{u}\} + \frac{\Delta t^2}{6}\{\ddot{u}_n\} \quad (2)$$

ここに、 {u}, {u<sub>n</sub>}：時刻 t および t+Δt における変位ベクトル

ここで、表現を簡便にするため、中間速度{u'}および中間変位{u''}を以下のように定義し、さらに、質量マトリックス[M]を既知の値を用いて以下のように補正する。

$$\{\dot{u}'\} = \{\dot{u}\} + \frac{\Delta t}{2}\{\ddot{u}\}, \quad \{u''\} = \{u\} + \Delta t\{\dot{u}\} + \frac{\Delta t^2}{3}\{\ddot{u}\} \quad (3)$$

$$[M'] = [M] + \frac{\Delta t}{2}[C] + \frac{\Delta t^2}{6}[K] \quad (4)$$

式(2)~(4)を式(1)に代入して整理すると、以下のような式が得られる。

$$[M'] \{\ddot{u}_n\} + \frac{\Delta t}{2} [C'] \text{sgn}\{\ddot{u}_n\} = \{f_n\} - [C] \{\dot{u}'\} - [C'] \text{sgn}\{\dot{u}'\} - [K] \{u'\} \quad (5)$$

$$\{\dot{u}_n\} = \{\dot{u}'\} + \frac{\Delta t}{2} \{\ddot{u}_n\}, \quad \{u_n\} = \{u'\} + \frac{\Delta t^2}{6} \{\ddot{u}_n\} \quad (6)$$

ここに、  $\{f_n\}$  : 時刻  $t + \Delta t$  における物体力ベクトル

式(5)の右辺は既知であるが、左辺の  $\text{sgn}$  中の  $\{\ddot{u}_n\}$  は未知量である。しかし、 $\{\dot{u}_n\}$  に与える  $\{\ddot{u}_n\}$  の影響は、 $\Delta t$  が充分小さければ無視できると仮定し、これを右辺に移項すると、粘性抵抗を次のようにまとめることができる。

$$[M'] \{\ddot{u}_n\} = \{f_n\} - [C] \{\dot{u}'\} - [C'] \text{sgn}\{\dot{u}_n\} - [K] \{u'\} \quad (7)$$

$$[M'] \{\ddot{u}_n\} = \{f_n\} - [C^*] \{\dot{u}'\} - [K] \{u'\} \quad (8)$$

ここに、  $[C^*]$  : 降伏値を含む粘性マトリックス

式(8)の左辺の補正された質量マトリックス  $[M']$  には、式(4)から明らかなように、粘性だけの減衰マトリックス  $[C]$  が含まれている。このように、右辺と左辺に異なる粘性減衰マトリックスを用いる解法では、解は不安定になりやすい。これに対して、左辺の粘性マトリックスにも  $[C^*]$  を用いる近似は、図-1 に示すように、原点を通る割線粘性を用いていることと同義であり、誤差は大きくなるが、大きな降伏値をもつ材料に対しても安定した解が得られる。

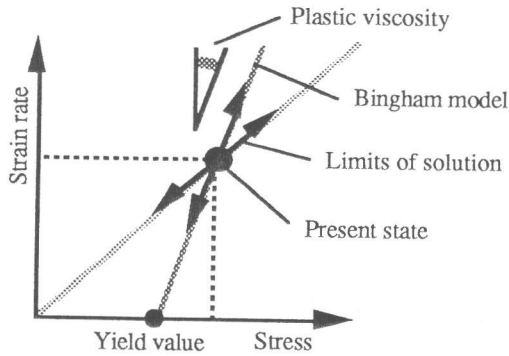


図-1 接線粘性と割線粘性による解の範囲

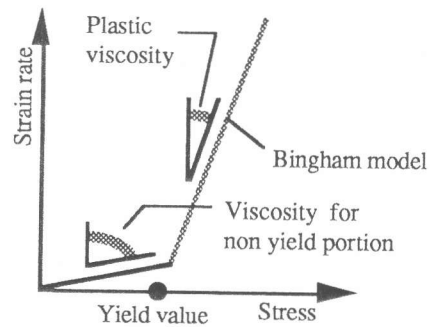


図-2 非降伏領域の粘性

## 2.2 粘性の構成方程式

温度変化のない等方粘性材料のひずみ速度と応力の関係を表現するNewtonの構成方程式は、一般に次の式のようになる[5]。

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\alpha} = 3\eta_K \dot{\epsilon}_{\alpha\alpha} \\ \sigma'_{ij} = 2\eta_G \dot{\epsilon}'_{ij} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \frac{1}{3} \dot{\sigma}_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \\ \dot{\epsilon}'_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \end{cases} \quad (9)$$

$$\sigma_{ij} = \left( \eta_K - \frac{2}{3} \eta_G \right) \dot{\epsilon}_{\alpha\alpha} \delta_{ij} + 2\eta_G \dot{\epsilon}_{ij} \quad (10)$$

ここに、  $\sigma_{ij}$  : 応力テンソル  $\eta_K$  : 体積粘性係数  
 $\sigma'_{ij}$  : 偏差応力テンソル  $\eta_G$  : せん断粘性係数

$\dot{\epsilon}_{ij}$  : ひずみ速度テンソル                       $\delta_{ij}$  : クロネッカデルタ  
 $\dot{\epsilon}'_{ij}$  : 偏差ひずみ速度テンソル

### 2.3 降伏関数

筆者らが使用している降伏関数は、既に報告したように、Binghamのそれを任意応力状態に拡張したHohenemser・Pragerのモデルである[5]。

$$2\eta_G V_{ij} = \begin{cases} 0 & (F < 0) \\ F\sigma'_{ij} & (F \geq 0) \end{cases} \quad F = 1 - \frac{\tau_y}{\sqrt{\sigma^2_2}} \quad (11)$$

ここに、  
 $F$  : せん断粘性変形の降伏関数                       $V_{ij}$  : 変形速度テンソル、  
 $\tau_y$  : 降伏値     $\sigma^2_2$  : 偏差応力の2次不変量

変形速度テンソルは、微小変形においてはひずみ速度テンソルに一致する。式(11)は、非圧縮性の構成則であり、体積粘性に関する情報を含んでいない。ここで、降伏が起こっている状態を仮定すると、より厳密な構成則は、体積粘性変形の降伏関数  $F_K$  を導入し、式(10)を考慮して、以下のように表現できる。

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{\eta_K}{F_K} - \frac{2\eta_G}{3F} \right) \dot{\epsilon}_{\alpha\alpha} \delta_{ij} + \frac{2\eta_G}{F} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (12)$$

$F_K$  は、0から1までの値をとり得るが、体積粘性変形がせん断粘性変形に比較して非常に小さい（すなわち、 $\eta_G$  に比べて  $\eta_K$  が非常に大きい）場合には、 $F_K$  の影響は小さいと考えることができる。本解析では、体積粘性変形の降伏が、せん断粘性変形の降伏と同時に発生すると仮定し、以下の式を用いることとした。

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{F} \left( \eta_K - \frac{2}{3}\eta_G \right) \dot{\epsilon}_{\alpha\alpha} \delta_{ij} + \frac{2\eta_G}{F} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (13)$$

これを偏差応力の2次不変量  $\sigma^2_2$  および偏差ひずみの2次不変量  $\dot{\epsilon}^2_2$  を用いて表現する。

$$\sigma^2_2 = \frac{1}{2} \left( \sigma'^2_{11} + \sigma'^2_{22} + \sigma'^2_{33} \right) + \sigma^2_{12} + \sigma^2_{23} + \sigma^2_{31} \quad (14)$$

$$\dot{\epsilon}^2_2 = \frac{1}{2} \left( \dot{\epsilon}'^2_{11} + \dot{\epsilon}'^2_{22} + \dot{\epsilon}'^2_{33} \right) + \dot{\epsilon}^2_{12} + \dot{\epsilon}^2_{23} + \dot{\epsilon}^2_{31} \quad (15)$$

$$\therefore \sqrt{\sigma^2_2} = \frac{2\eta_G}{F} \sqrt{\dot{\epsilon}^2_2} \quad (16)$$

であり、式(11)の  $F$  の定義より、

$$\frac{1}{F} = 1 + \frac{\tau_y}{F\sqrt{\sigma^2_2}} = 1 + \frac{\tau_y}{2\eta_G\sqrt{\dot{\epsilon}^2_2}} \quad (17)$$

となる。式(17)を式(13)に代入した構成則が降伏関数を含んだ一般式となる。

以上は、降伏状態を仮定して導かれたが、非降伏状態では、 $F$  は0であり、 $1/F$  は無限大とな

って、方程式を安定して解くことができない（非降伏領域付近で解が振動する）ので、計算では、図-2に示すように、塑性粘度に比較して充分大きい粘性（ $\alpha=100$ 倍程度）を、非降伏状態の粘性として与える。この場合、降伏の判定は、2本の直線の交点の縦座標の値 $\sqrt{\dot{\epsilon}J_2}$ で行われる。交点の $(\sqrt{\dot{\epsilon}J_2})_{\text{yield}}$ は、次式で与えられる。

$$(\sqrt{\dot{\epsilon}J_2})_{\text{yield}} = \frac{\tau_y}{2(\alpha-1)\eta_G} \quad (18)$$

## 2.4 境界条件

本解析手法における境界条件は、物体力ベクトル{f}または加速度ベクトル{ü}に対する処理によって適用される。すなわち、自然境界条件は、力の次元をもち、物体力ベクトル{f}に加算される。これによって、外力の他に、重力や強制振動力が考慮される。また、基本境界条件は、加速度ベクトル{ü}内の特定の成分を固定することによって実現される。すなわち、加速度を拘束しても、位置座標による拘束を与える必要がない。このことは、境界に接しない試料の、自由落下運動や放物運動だけでなく、試料の境界への接触や剥離などの考慮にも有効である。

変位制御を行う場合には、加速度を0として、速度および変位の初期条件により処理する。この方式の利点は、境界そのものが、ある速度または加速度で移動するような環境下（移動境界問題）での流動シミュレーションを可能にすることにある。

## 3. 解析結果とその考察

### 3.1 スランプ試験

図-3に粘塑性有限要素法を用いた、スランプ試験のシミュレーション結果の一例を示す（図中の $\eta$ は $\eta_G$ を意味する）。この問題は既に、静的解析によるシミュレーションを過去に行っている[1,6]。また、図-4は、解析結果より得られたスランピング曲線（スランプ試験時のコンクリート上面高さと時間の関係）を比較したものである。図-4より明らかなように、動的解析であるため、スランピング開始直後に、重力加速度によって速度が上昇し、スランピング曲線は逆S字型の形状となる。スランピング曲線の曲率は、レオロジー定数の塑性粘度に支配されている。

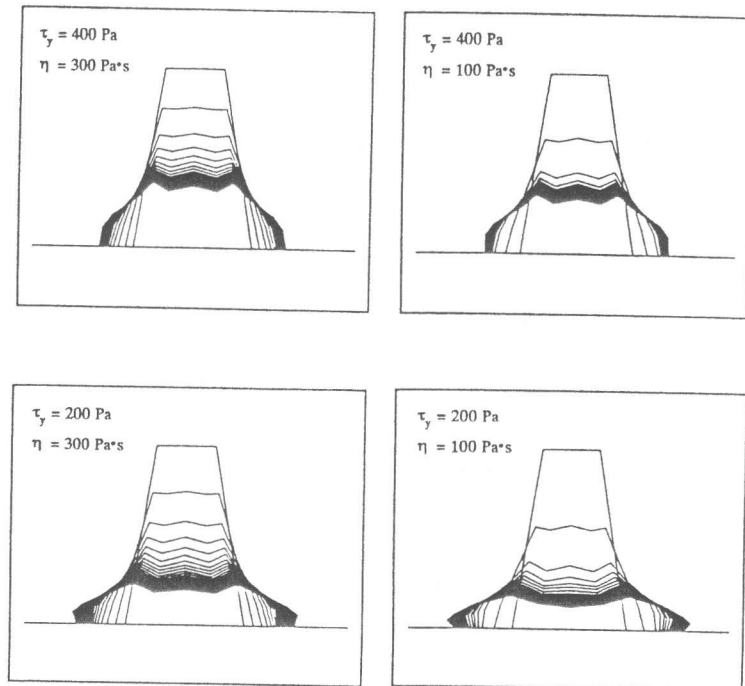


図-3 スランプ試験のシミュレーション結果の一例

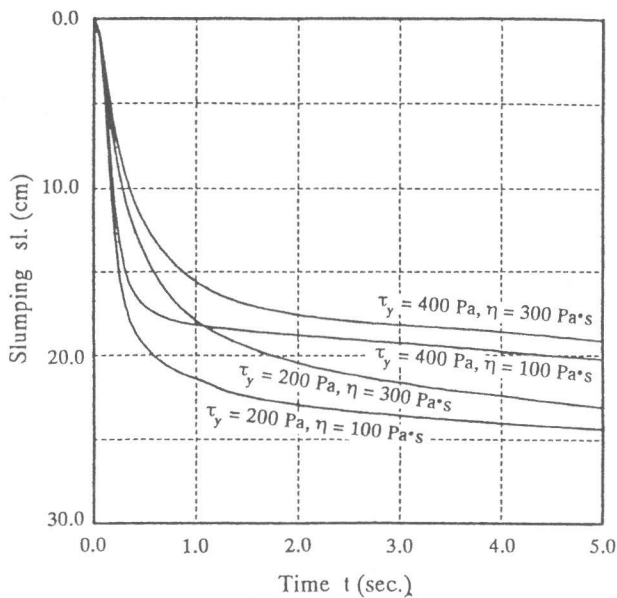


図-4 シミュレーションによる  
スランピング曲線

また、最終的なスランプ値は、降伏値によってほぼ決定されるが、解析結果からわかるように、スランプ値が大きく、降下速度が速くなるほど、慣性力によって静的釣合い状態を超えても変形が止まらず、最終的なスランプ値は、粘性の小さいものほど僅かに大きくなる結果となる。

### 3. 2 フロー試験

フロー試験のシミュレーションにおいては、テーブルの落下による衝撃力の考慮が不可欠であり、静的解析で精度の良い解を得ることは困難である。既に報告した静的解析によるシミュレーション[6]では、テーブルの落下による位置エネルギーの損失が変形に消費されるという仮定の基に収束計算を行ったが、本解析手法では、1秒毎の1cmの落下による衝撃を境界条件として取り入れ、1回の計算で精度の良い解を得ることができる。図-5に15秒までの1秒毎の変形状況を示す。また、図-6は、フローの変化状況を示したものである。図-6(a)から明らかなように、塑性粘度の比較的大きい試料では、テーブル落下後の1秒ではフローが停止せず、ある程度のフロー速度をもったまま次のテーブル落下が行われることがわかる。さらに変形が進むと、図-6(b)に示すように、テーブル落下直後に大きくフローするようになる。

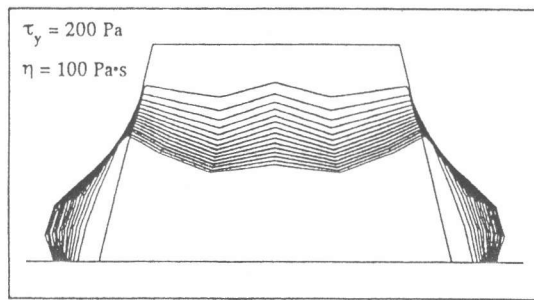
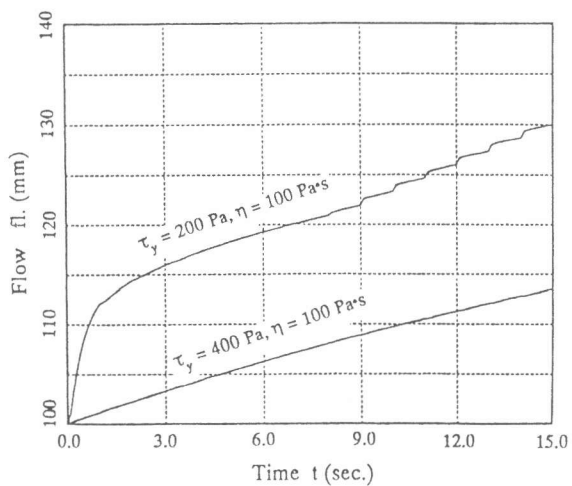
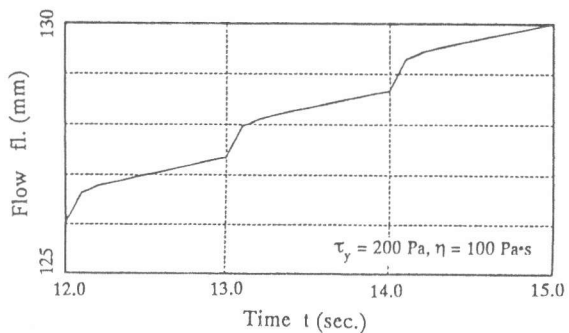


図-5 フロー試験のシミュレーション結果の一例



(a) 0~15秒の変化



(b) 12~15秒の変化

図-6 フローの変化状況

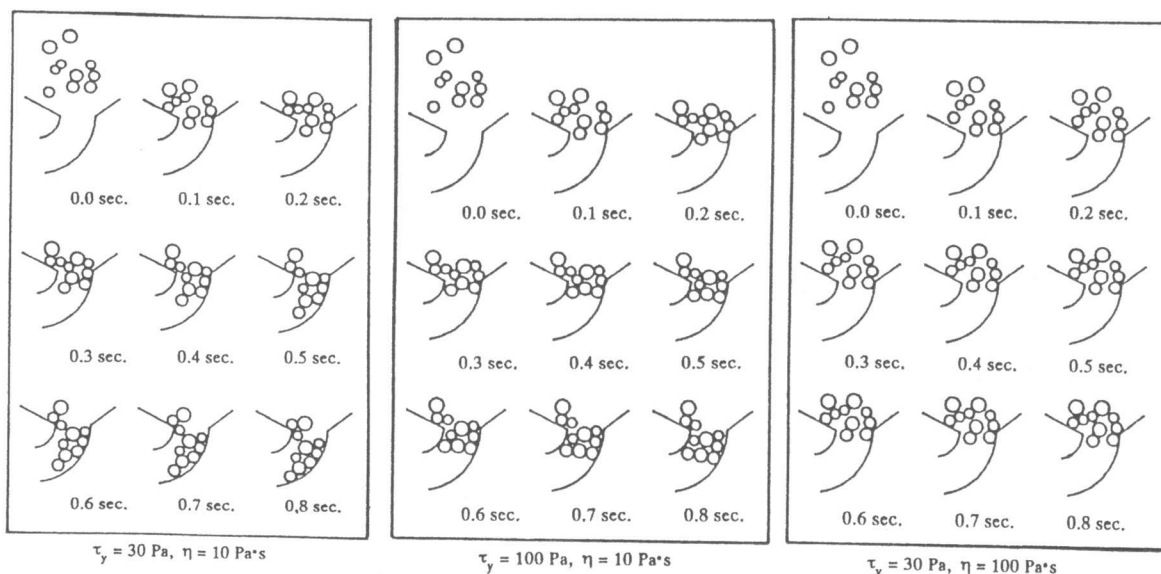


図-7 落下するコンクリートのシミュレーション結果の一例

### 3.3 落下するコンクリート

図-7に、粘塑性サスペンション要素法[4]によるシミュレーション結果の一例を示す。サスペンション要素法では、粗骨材の間に存在するモルタルのレオロジー定数が入力データとなるが、降伏値や塑性粘度が大きくなると、落下後の停止が早くなったり、ロート内で閉塞が生じやすくなる。また、図に示すことはできないが、粘性の小さい場合の解析では、粗骨材同士の直接の接触によって、粗骨材が跳ね上がる現象が見られた。このような速度変化の激しい運動のシミュレーションは、静的な解析では実現することができない。

### 4. まとめ

本研究では、運動方程式に基づいた粘塑性解析手法に関する基本原理を示し、数例の解析結果を提示した。本解析手法は、筆者らが既に提案した従来の静的解析手法と比較して、以下に示すような特徴を有している。

- 1) 振動・衝撃・落下など、速度変化の激しい問題に対して精度のよい解が得られる。
- 2) 変位制御の問題を収束計算を行わないで解くことができる。
- 3) 境界条件の対処が柔軟であり、移動境界問題などを取り扱うことができる。

なお、本報では国際単位系 (SI) を用いた ( $1 \text{ Pa} = 0.0102 \text{ gf/cm}^2$ ,  $1 \text{ Pa}\cdot\text{s} = 10 \text{ poises}$ )。

【謝辞】本研究費の一部は、平成3年度文部省科学研究費・奨励研究 (A)、同一般研究 (B)、およびセメント協会奨励金によった。付記して謝意を表する。

#### 【引用文献】

- 1) 森博嗣・谷川恭雄：日本建築学会構造系論文報告集, No.374, pp.1-9, 1987.4.
- 2) Tanigawa, Y. and Mori, H.: Jour. of Engineering Mechanics, Proc. of ASCE, Vol.115, No.3, pp.493-508, 1989.3.
- 3) 戸川隼人：有限要素法による振動解析, 185pp., サイエンス社, 1975.
- 4) 森博嗣・渡辺健治・梅本宗宏・谷川恭雄：日本建築学会構造系論文報告集, No.427, pp.11-21, 1991.9.
- 5) Y.C.ファン：連続体の力学入門, 333pp., 培風館, 1974.
- 6) 森博嗣・谷川恭雄：日本建築学会構造系論文報告集, No.377, pp.16-26, 1987.7.