

論 文

[2048] 曲げを受ける鉄筋コンクリート梁の疲労寿命に関する信頼性解析

正会員 吉川弘道(武藏工業大学土木工学科)

正会員○大井祥之(武藏工業大学大学院)

1. まえがき

疲労強度は、コンクリート部材の限界状態の一つとして区分される重要な照査項目であるが、ばらつきの大きいことが設計作業の大きな障害となっている。本研究は、曲げ荷重を受ける鉄筋コンクリート梁を対象とし、引張主鉄筋の疲労寿命を確率量としたときの破壊確率について考察するものである。数値シミュレーションに際しては、疲労損傷に関する線形被害則を適用するとともに、モンテカルロ法により、主鉄筋の逐次破断の再現および破壊確率の算出を試みるものである。

2. 解析対象の設定と疲労特性

2.1 問題の設定

次のような条件に基づいて、繰返し荷重を付与することにより、引張鉄筋を逐次、疲労破断させ、最終的に梁部材としての崩壊に至る疲労回数を求めるものである。

- ①繰り返し荷重を受ける複鉄筋の鉄筋コンクリート梁(以下RC梁)を考える。
- ②引張鉄筋は複数本(m本)を有し、その疲労寿命を確率変数とする。
- ③載荷荷重は、最大P_{max}、最小P_{min}を終始一定とし、従って、荷重振幅P_r=P_{max}-P_{min}も一定の片振りとする。
- ④m本の鉄筋は最弱のものから逐次破断し、残存する鉄筋にて、全荷重を平均的に分担するものとする。
- ⑤従って、個々の鉄筋の応力負荷は徐々に増大し、その疲労寿命の算定に対して線形被害則(Palmgren-Miner則)を適用する。

これをモンテカルロ法により数値シミュレーションを実行し、RC梁部材としての疲労寿命を求め、その平均値、分散を考察する。

2.2 対象とする鉄筋コンクリート断面の応力

図-1に示す断面を有する複鉄筋のコンクリート梁(弾性係数比n=15)を考える。この梁に、最大載荷荷重P_{max}、最小載荷荷重P_{min}が作用した時に発生する最大、最小曲げモーメントをそれぞれM_{max}、M_{min}とし、これに対応する引張鉄筋の最大、最小応力をそれぞれσ_{max}、σ_{min}とする。このような複鉄筋のコンクリート断面に曲げモーメントMが作用したときの、中立軸の位置X_c、コンクリートの圧縮応力σ_c、引張鉄筋の応力σ_sは通常のRC断面算定式に従うものとする。

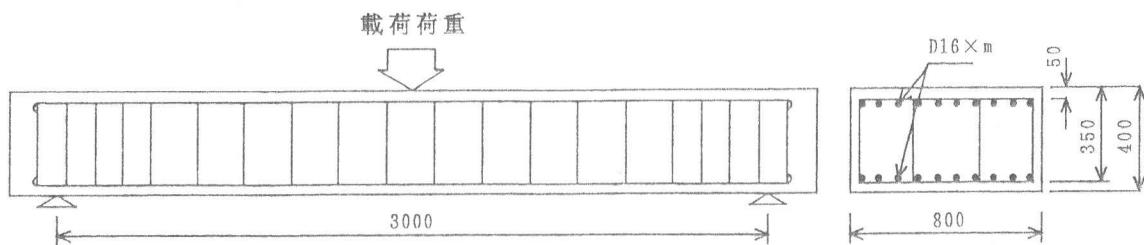


図-1 RC梁の側面図と断面図

2.3 単体鉄筋の疲労特性(S-N線図)

本研究においては、松本^{1),2)}らが行った異形鉄筋の単純引張空中疲労試験から導いた式ならび

に土木学会示方書の鉄筋疲労強度算定式を用いることにし、これら両算定式は以下のように示される。

$$\log N = 20.13 - 4.188 \log S_r \quad (1)$$

$$S_r = 1900 \left(1 - \frac{\sigma_{\min}}{f_u} \right) \left(\frac{10^\alpha}{N^k} \right) \quad (2)$$

ただし、N:疲労寿命, S_r :応力振幅, f_u :鉄筋の引張強度(6143kgf/cm^2), $\alpha = 0.82 - 0.003\phi$, ϕ :鉄筋直径(mm), $k=0.12$ なお、式(2)においては、安全率を考慮していない。

これらによって、算出される疲労寿命Nは定量的に異なるものであるが、定性的には、式(1)が応力振幅 S_r のみの関数として表されているのに対して、式(2)(土木学会式)は下限応力 σ_{\min} を含むものである。これら両算定式を採用した理由は、下限応力を含むS-N線式の相違がRC梁の疲労寿命および本数効果にどのような影響を与えるかについて考察するためである。

3. 線形被害則に基づく疲労寿命の算定手法

3.1 基本モデルと算定手順

RC梁中に配置してあるm本の鉄筋を線形被害則を適用し、最弱鉄筋から逐次破断させていく、梁全体が破壊するに至るまでの過程を並列システムの破壊現象と考える。以下にそのモデル化と算定手順を示す。

- ①最大載荷荷重 P_{max} 、最小載荷荷重 P_{min} が梁にそれぞれ交番荷重として作用したとき、m本の鉄筋には均一の最大応力 σ_{max} 、最小応力 σ_{min} が発生する。すなわち荷重は鉄筋が等分に分担する。もし、k本の鉄筋が破断したならば、それらの鉄筋が分担していた荷重は、残りの $m-k$ 本の鉄筋に再分配されるものとする。
- ②i-1本の鉄筋が破断した状態をi段階($i=1, 2, 3, \dots, m$)とし、i段階における鉄筋の最大、最小応力をそれぞれ σ_{maxi} 、 σ_{mini} とする。従ってこのときの応力振幅 S_{ri} は $S_{ri} = \sigma_{maxi} - \sigma_{mini}$ によって与えられる。
- ③この応力振幅 S_{ri} に対して、所定のS-N線図より、鉄筋が $m-i+1$ 本ある時の平均疲労寿命 N_{fi} が求まる。
- ④残存する $m-i+1$ 本の鉄筋の疲労寿命 N_{fij} は、logスケール上にて正規分布するものとし、与えた平均値 $m(\log N_{fij})$ 、変動係数 $V_r(\log N_{fij})$ に従うものとする。そして、最弱の疲労寿命のものから、 $j=i, i+1, \dots, m$ のように番号付けを行う図-2。
- ⑤i段階における繰返し回数を n_i とし、i段階が終了したときのj番目鉄筋の累積損傷量を M_{ij} 、損傷量の増分を ΔM_{ij} とし次式のような線形被害則を適用する。

$$M_{i,j} = \sum_{k=1}^i \Delta M_{k,j} = \sum_{k=1}^i \left(\frac{n_k}{N_{f,k,j}} \right) \quad (3)$$

- ⑥i段階において、 $M_{ij}=1$ が成立した最弱の疲労寿命をもつ鉄筋を破壊させる。これによって、i段階は終了し、次の $i+1$ 段階に進む。

以上、①～⑥がi段階における1つのループを示すもので、各段階で鉄筋を1

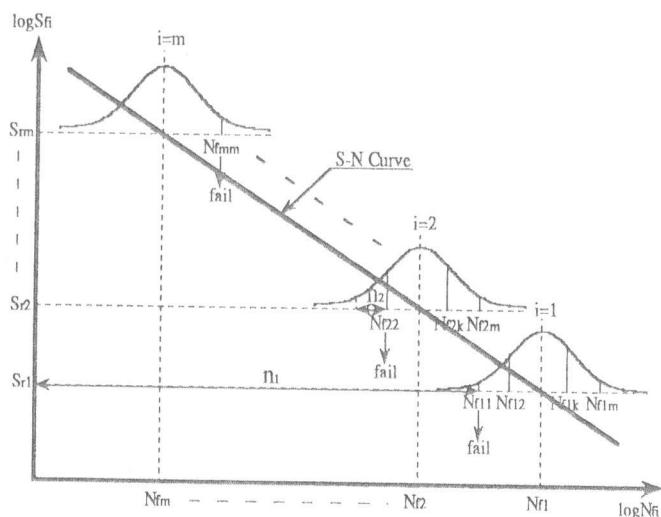


図-2 逐次破壊モデルの概念図

本づつ破壊させて、m段階まで繰り返す。なお、 σ_{maxi} が降伏点を超えても計算を打ち切らず、 $i=m$ が最終ループであり、これが完了したとき、すなわち、全鉄筋が疲労破壊したとき、RC梁としての疲労寿命Nfbeamとする。以上をとりまとめ、表-1に一覧化する。

3.2 線形被害則の適用

i段階において、残存している鉄筋のうち最弱(最小の疲労寿命)の鉄筋の破壊によって、 $i+1$ 段階に移行するが、このときの繰り返し回数 n_i とする。i段階における最弱鉄筋は $j=i$ 番目の鉄筋で、このときの疲労破壊に至る条件は、累積損傷量(式(3))を1に等値させることで表される。すなわち

$$M_{i,j} \left|_{i=j} = \sum_{i=1}^j \left(\frac{n_i}{N_{f,i,j}} \right) \right|_{i=j} = 1 \quad (4)$$

のように記述することができこれは、m個の連立一次方程式を意味する。

$$\begin{aligned} M_{1,1} &= \frac{n_1}{N_{f,1,1}} = 1 \\ M_{2,2} &= \frac{n_1}{N_{f,1,2}} + \frac{n_2}{N_{f,2,2}} = 1 \\ &\vdots \\ M_{m,m} &= \frac{n_1}{N_{f,1,m}} + \frac{n_2}{N_{f,2,m}} + \frac{n_3}{N_{f,3,m}} + \dots + \frac{n_m}{N_{f,m,m}} = 1 \end{aligned} \quad (5)$$

表-1 i段階におけるj番目鉄筋の疲労寿命

i段階	繰り返し回数	損傷量	$j=1$	2	---	j	---	m
1	n_1	$\Delta M_{1,j}$	$\frac{n_1}{N_{f,1,1}}$	$\frac{n_1}{N_{f,1,2}}$	---	$\frac{n_1}{N_{f,1,j}}$	---	$\frac{n_1}{N_{f,1,m}}$
		$M_{1,j}$	$M_{1,1}=1$	$M_{1,2}$	---	$M_{1,j}$	---	$M_{1,m}$
2	n_2	$\Delta M_{2,j}$		$\frac{n_2}{N_{f,2,2}}$	---	$\frac{n_2}{N_{f,2,j}}$	---	$\frac{n_2}{N_{f,2,m}}$
		$M_{2,j}$		$M_{2,2}=1$	---	$M_{2,j}$	---	$M_{2,m}$
i	n_i	$\Delta M_{i,j}$				$\frac{n_i}{N_{f,i,j}}$	---	$\frac{n_i}{N_{f,i,m}}$
		$M_{i,j}$				$M_{i,j}$	---	$M_{i,m}$
m	n_m	$\Delta M_{m,j}$						$\frac{n_m}{N_{f,m,m}}$
		$M_{m,j}$						$M_{m,m}=1$

これをマトリックス表示し

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{N_{f,1,1}} & & & & & & \\ \frac{1}{N_{f,1,2}} & \frac{1}{N_{f,2,2}} & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ \frac{1}{N_{f,1,m}} & \frac{1}{N_{f,2,m}} & \frac{1}{N_{f,3,m}} & \dots & \frac{1}{N_{f,m,m}} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6-1)$$

とおくと、これは次式のように略記することができる。

$$[A]\{\alpha\} = [I] \quad (6-2)$$

4. モンテカルロ法による数値シミュレーション

4.1 基本値の割付けと相関特性の導入

配置されるm本の鉄筋の疲労寿命は、各鉄筋に潜在している寿命(運命)によって決まる仮定する。そこで、本研究では、まず $X_{j(RND)}(j=1,2,3,\dots,m)$ なる、疲労寿命の基本値の割付けから出発する。基本値は、標準正規分布 $N(0,1)$ に従う、相互に独立な実現値(サンプリング値)m個とする。ここで、標準正規分布に従う乱数の作成には中心極限定理を用いる。このようにして得られたm本の鉄筋の疲労寿命の順番は、小さいものより付番する。すなわち

疲労寿命に関する基本値： $X_{j(RND)}$ ($X_1 < X_2 < X_3 < \dots < X_m$)

このような実現値m個の値は相互に相関性をもつことが考えられる。これは、実際の場合を考

えたとき、 m 本の鉄筋が同一の会社(メーカー)の製品であつたり、同じロットから切り出されたものであれば、それらの鉄筋の性能(特性)は大小の違いはあれ、そこには相関性が存在するはずである。そこで、基本値に相関をもたせることによって、 m 本の鉄筋の疲労寿命にどのような影響を与えるか、独立な場合と比較してみることにする。

相互に相関をもつ m 個の基本値 $Y_{j(RND)}$ は、独立な基本値 $X_{j(RND)}$ を用いて次のように抽出される³⁾。ただし、このときの共分散を $\text{cov}[Y_i, Y_j]$ ($i=1, 2, 3, \dots, m$, $j=1, 2, 3, \dots, m$)とする。

共分散 $\text{cov}[Y_i, Y_j]$ を要素とする共分散マトリックス C_Y をコレスキー法を用いて次のような三角行列 C_{ij} の積に分解する。 $\text{var}[\cdot]$ は分散値 $\text{var}[Y_i] = \text{cov}[Y_i, Y_i]$ を表す。

$$\begin{bmatrix} \text{var}[Y_1] & \cdots & \text{cov}[Y_1, Y_m] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}[Y_m, Y_1] & \cdots & \text{var}[Y_m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & & & \\ C_{21} & C_{22} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & \cdots & \cdots & C_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{m1} \\ C_{22} & C_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & C_{mm} \end{bmatrix} \quad (7-1)$$

あるいは、略記して次のように記述する。

$$[C_Y] = [C_{ij}][C_{ij}]^T \quad (7-2)$$

このようにすることにより、相互に相関をもつ m 個の基本値 $Y_{j(RND)}$ は、相互に独立な基本値 $X_{j(RND)}$ を用いて次式で求められる。

$$Y_{i(RND)} = \sum_{j=1}^m C_{ij} X_{j(RND)} = \sum_{j=1}^m C_{ij} X_{j(RND)} \quad (8-1)$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & & & \\ C_{21} & C_{22} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & \cdots & \cdots & C_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \quad (8-2)$$

となる。

4.2 i段階j番目鉄筋の疲労寿命と繰り返し回数

i段階における平均値 N_{fi} に対するj番目鉄筋の実現値 N_{fij} は、基本値を一次変数変換することによって次式で与えられる。

$$\log N_{fij} = (V_r \cdot Y_{j(RND)} + 1) \cdot \log N_{fi} \quad (\text{ただし、 } Y_{j(RND)}: N(0, 1), \log N_{fi}: N(\log N_{fi}, V_r \cdot \log N_{fi}))$$

$$\therefore N_{fij} = N_{fi}^{(V_r \cdot Y_{j(RND)} + 1)} \quad (9)$$

ここで、前述 $[A]\{\alpha\} = [I]$ の両辺に A の逆マトリックス A^{-1} をかけると

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} [I] \quad (10)$$

となり、未知数 $\{\alpha\}$ が求まる。この $\{\alpha\}^T = \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_m\}$ より、i段階における繰返し回数 n_i が求まる。よって、梁としての疲労寿命 N_{beam} は次式より求められる。

$$N_{beam} = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m = \sum_{i=1}^m n_i \quad (11)$$

表-2 各種パラメータ

パラメータ		数値
Pmax	最大載荷荷重	25t($m=10$ 本のとき)
Pmin	最小載荷荷重	3t($m=10$ 本のとき)
ρ	相関係数	0, 0.5, 0.9999
Vr	変動係数	2, 4, 6, 8, 10 %
m	鉄筋本数	10, 5, 3, 1 本
T	試行回数	10000 回

5. 数値シミュレーション

5.1 数値シミュレーション

以上のような算定手順に従い、数値シミュレーションを行う。ここでは、 $Y_{j(RND)}$ を唯一の確率的な変動値とし、他のパラメータは全て確定値として扱うものとする。各種パラメータを表-2に示す。

5.2 シミュレーション結果

(1) 変動係数がRC梁の疲労寿命に与える影響

式(1)のもとで、各変動係数に対するRC梁の疲労寿命の度数分布を図-3に示す。ただし、相関は考へない。得られた疲労寿命の分布形を正規分布と仮定した場合、その平均値は、式(1)より求まる確定値(変動係数0%の場合)、すなわち応力振幅 S_{f1} に対する平均疲労寿命 N_{f1} (図中の鎖線)をすべて下回った。このことは、式(2)あるいは、相関特性を導入したときにも同様のことことが認められた。さらに、鉄筋単体のばらつきである変動係数を大きくしていくと、RC梁の疲労寿命の平均値はより低下し、変動も増加した。

(2) 相関特性がRC梁の疲労寿命に与える影響

次に、相関特性を導入したときのRC梁の疲労寿命を図-4に示す($\rho=0, 0.5, 0.9999$)。図-4.(c)は変動係数6%における逐次破断の様子を示すものである。横軸は、j番目鉄筋の疲労寿命を梁の疲労寿命で除して無次元化した値である。図-4.(a)より、相関性の強いものほど梁の疲労寿命は大きくなり、より確定値に近づく。しかし、図-4.(c)より、その破壊のしかたは1本の鉄筋が破断すると、たちまちすべての残存鉄筋が破断するといった連鎖破壊型の現象がみられる。図-4.(b)は、鉄筋単体のばらつきが梁の疲労寿命のばらつきに、どのような影響を与えるか示したものである。これより、相関性の強いものほど、鉄筋単体のばらつきがそのまま梁の疲労寿命のばらつきに反映しており、 ρ

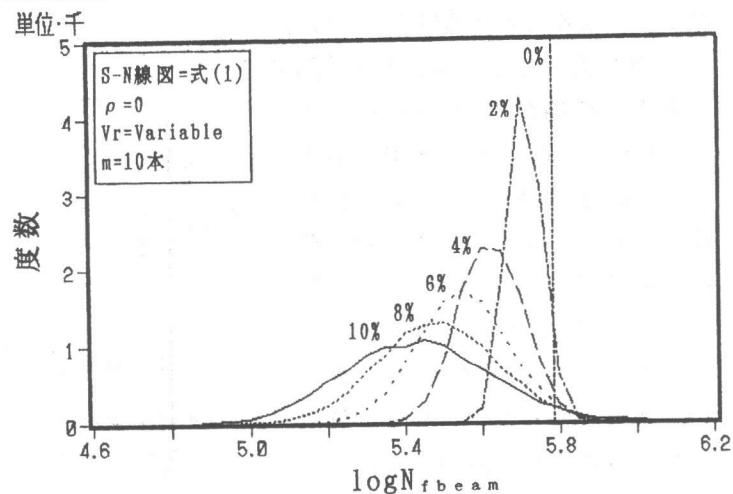


図-3 変動係数がRC梁の疲労寿命に与える影響

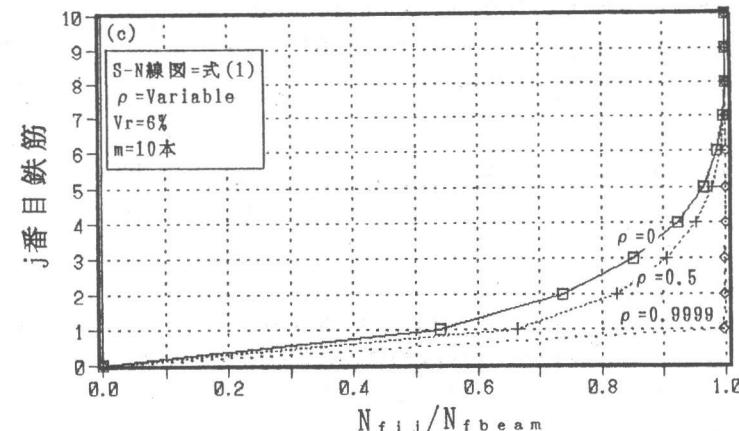
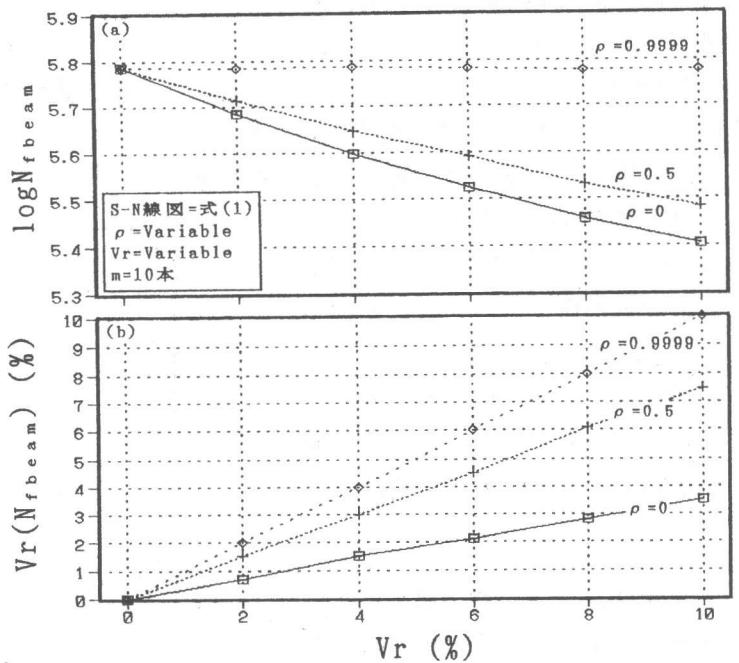


図-4 相関係数がRC梁の疲労寿命に与える影響

=0.9999のときは両者の変動係数は合致している。すなわち、 $V_r(N_{fij})=V_r(N_{fbeam})$ 。これは、配置される鉄筋の相関係数が大きい程、確定量として算出された疲労寿命に近づくが、逆に変動係数は大となることを意味している。

(3) 梁の疲労寿命に対する本数効果

梁中の鉄筋の本数を $m=10$ 本から、5本、3本、1本、と減らしたときのRC梁の疲労寿命を図-5に比較した。 $m=10$ 本のときの載荷荷重、RC断面の大きさを1とし、鉄筋の本数が5本、3本、1本と減るにつれて、それぞれの大きさも0.5、0.3、0.1と変化させて、算出したものである。同図より、本数が $m=1$ のとき一定値をとり、かつ確定値($\log N_{f1}=5.787$)と合致し、本数 m が増加するに従って、RC梁の疲労寿命が低下していることがわかる。これは、疲労寿命に対する本数効果を示すもので、松本らの指摘^{1), 2)}を異なる手法で追認するものである。

(4) 下限応力が梁の疲労寿命に与える影響

単体鉄筋のS-N線図として式(1)および式(2)の両者を用い、RC梁の疲労寿命を求め、これを図-6に示す。式(2)から求められる梁の疲労寿命は安全側の値をとるとともに、下限応力を含むため、変動係数 V_r に対する影響が大きい。

6. あとがき

本文は、RC梁の疲労寿命を信頼性理論の立場から数値解析的に考察したもので、今後は、設計法における安全率の評価や耐久性評価

への展開を考える必要があると思われる。本研究は、文献^{1), 2)}の著者である松本氏(鉄道総合技術研究所)とのディスカッションによるところが大きく、また、信頼性理論の適用に際しては、武藏工業大学 星谷教授、清水建設(株) 石井氏(本学講師)にご教示を受けた。併せて謝辞を申し上げます。

参考文献

- 1) 松本信之, 山住克巳, 宮本征夫: 多本数の引張鉄筋を配置したRC梁の疲労寿命, コンクリート工学会年次論文報告集, 13-2, pp321-326, 1991
- 2) 松本信之, 山住克巳, 宮本征夫: 多本数の引張鉄筋を有するコンクリート梁の疲労寿命, 鉄道総研報告, Vol.4.No.7, pp22-29, 1990
- 3) 星谷 勝, 石井 清: 構造物の信頼性設計法, 鹿島出版会, 1986

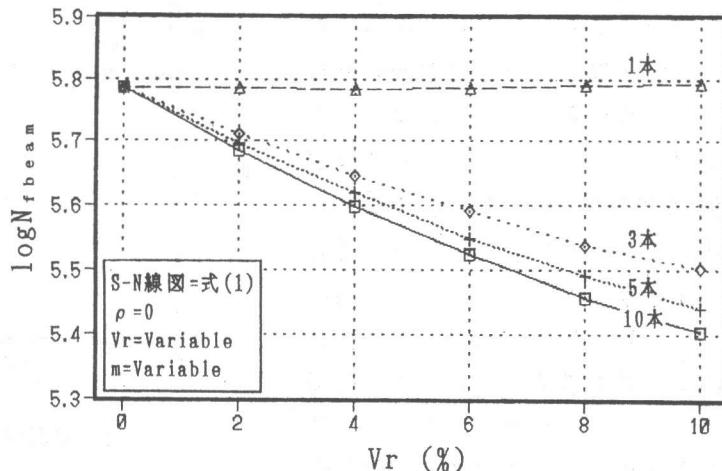


図-5 梁の疲労寿命に対する本数効果

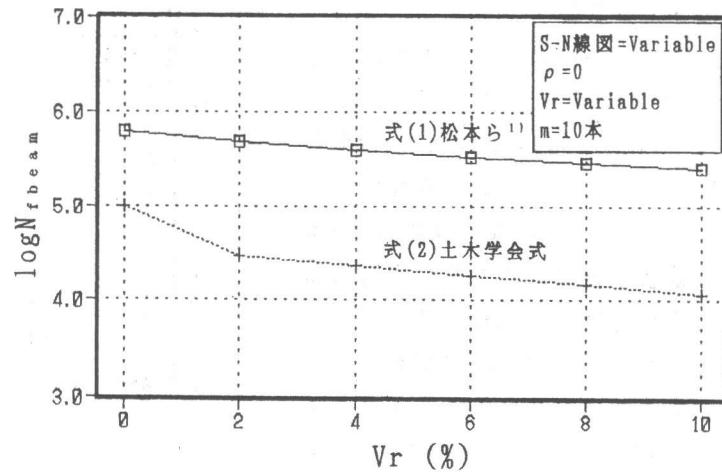


図-6 下限応力が梁の疲労寿命に与える影響