

論文

[2010] コンクリートのひずみの局所化と安定/不安定条件に関する解析的研究

服部 尚道*1・吉川 弘道*2

1. まえがき

コンクリートなどの準脆性材料は、塑性変形過程にひずみが局所化すること(strain localization)が知られており、寸法効果(size effect)を引起こす要因となっている[1]。

そこで、本研究では、昨年における基礎的な考察[2]に基づき、①変形の適合条件について非局所モデル[3]の導入、②ポテンシャルエネルギーの第2変分による安定/不安定条件[4]の導出、についてさらに検討を加えるものである。

2. 問題の設定および変形に関する適合条件

圧縮荷重を受ける単軸部材を対象とし、ひずみが局所化している部材を考える。ただし、部材軸の任意断面における応力は一定であると仮定する。また、諸記号の変数定義については、前報[2]と同じものとする。部材全体の長さをLとし、軟化領域の長さを ΩL 、残りの除荷領域の長さを $(1-\Omega)L$ とし、材料は同じであるが、2つの異なる構成関係式を定義する。

$$\text{軟化領域} : \dot{\sigma} = E_t \dot{\epsilon}_t, E_t = E_t(\epsilon_t) < 0 \tag{1}$$

$$\text{除荷領域} : \dot{\sigma} = E_u \dot{\epsilon}_u, E_u = E_u(\epsilon_u) > 0 \tag{2}$$

ここで、応力がコンクリートの圧縮強度に到達すると局所化が開始するものと考え、軟化領域の長さを表現する無次元値 Ω は、0~1の範囲で与えられる。また、 E_t と $\dot{\epsilon}_t$ は軟化領域における弾性係数とひずみ速度を示し、 E_u と $\dot{\epsilon}_u$ は除荷領域のそれらを示す。応力が $\dot{\sigma} = 0$ の状態ではひずみの局所化が開始するものと考え、2つの異なる弾性係数を $E_t < 0$ 、 $E_u > 0$ と仮定する。それゆえ、 $\dot{\epsilon}_t > 0$ 、 $\dot{\epsilon}_u < 0$ である。

局所化した材料の構成方程式を誘導するためには、次に適合条件を考える必要がある。まず、部材全体の長さLに対し、全変形速度 \dot{u} を与える。この変形速度 \dot{u} は、非局所モデル(nonlocal model)の概念[3]を用い、重み関数 $\phi(z)$ により、次式のように表されるものとする。

$$\frac{d\dot{u}}{dx} = \int_L \dot{\epsilon}(x+z) \phi(z) dz \tag{3}$$

上式において、 $\dot{\epsilon}(x)$ は、部材軸に沿った局所ひずみ速度である。ここで、図-1は、局所化した部材のひずみ分布を示したものである。さらに、単軸部材は軟化領域と除荷領域を含むので、 $\dot{\epsilon}(x)$ は次式のように表される。

$$\dot{\epsilon}(x) = \begin{cases} \dot{\epsilon}_t(x; \Omega L) \\ \dot{\epsilon}_u(x; (1-\Omega)L) \end{cases} \tag{4}$$

*1 武蔵工業大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (正会員)

*2 武蔵工業大学助教授 工学部土木工学科、工博 (正会員)

ここで、式(4)は、部材における軟化領域と除荷領域の実際の位置は関係せず、それらの占める領域の大きさが重要であることを表している。一方、 $\dot{\epsilon}^*$ は平均化したひずみ速度として導入され、次式のように明解に定義される。

$$\dot{u}(x=L) = \int_L \dot{\epsilon}^*(x) dx = \int_{\Omega L} \dot{\epsilon}_t(x) dx + \int_{(1-\Omega)L} \dot{\epsilon}_u(x) dx \quad (5)$$

ここで、簡略化のため、重み関数は、対応する領域の範囲内で一様であると仮定する。従って、平均化したひずみ速度 $\dot{\epsilon}^*$ について最終的に次式を導く。

$$\dot{\epsilon}^* = \Omega \dot{\epsilon}_t + (1-\Omega) \dot{\epsilon}_u \quad (\because \dot{u} \equiv \dot{\epsilon}^* L) \quad (6)$$

この方程式は、局所化した単軸部材における、簡略化した変形の適合条件として解釈される。上式は、結果的に前報と同じ表現となったが、 $\phi(z)$ に非線形関数を導入することにより、より精緻な解析が可能となる。

3. 等価構成方程式と数値計算例

以上の条件に基づき、応力 σ ～平均的なひずみ速度 $\dot{\epsilon}^*$ 関係式を定式化する。このような構成方程式は、実験観測の解釈とsnapback挙動の表現に際して重要となり、適合条件である式(6)と、式(1)、(2)を用い、次式のような単軸部材全体としての増分形式による構成関係式を導出した。また、ここに示す応力 σ は、載荷荷重 P を断面積 A にて除した($\sigma = P/A$)のものである。

$$\dot{\sigma} = \frac{E_t}{(1+k)\Omega - k} \dot{\epsilon}^* \quad (7-1)$$

ただし、除荷時の正勾配 E_u と軟化時の負勾配 E_t との弾性係数の比を $k = -E_t / E_u > 0$ と定義する。また、式(7-1)は、次式のように書き換えられる。

$$\dot{\sigma} = E^* \dot{\epsilon}^*, \quad E^* = \frac{E_t}{(1+k)\Omega - k} \quad (7-2)$$

ここで、弾性係数 E^* は、軟化領域と除荷領域の全部材に対する等価な値を表している。また、等価な弾性係数 E^* は、次ような2つの極値を持つことも、容易に判断される。

$$\Omega = 1 \rightarrow E^* = E_t \text{ (全域塑性)}, \quad \Omega = 0 \rightarrow E^* = E_u \text{ (全域弾性除荷)} \quad (8)$$

次に、定式化した構成則、式(7-1)に基づき、軟化領域の比 Ω をピーク応力以降0.4, 0.6, 0.8, 1.0と変化させた数値計算結果を図-2に示す[2][6]。これにより、 E^* の大きさは、 Ω と k の値に影響することがわかる。また同図より、 $\Omega = 0.4$ の時、最もひずみが局所化した状態の例を示しており、急激な応力の低下がみられる。

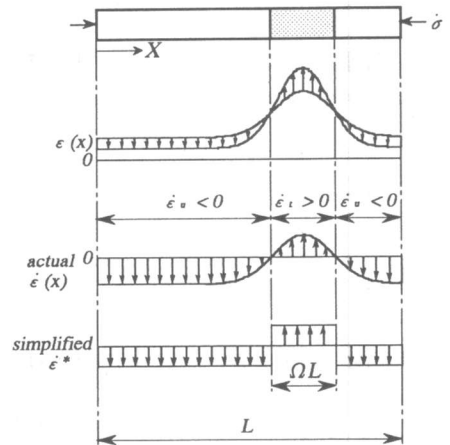


Fig.1 Strain Distribution along the Localized Member

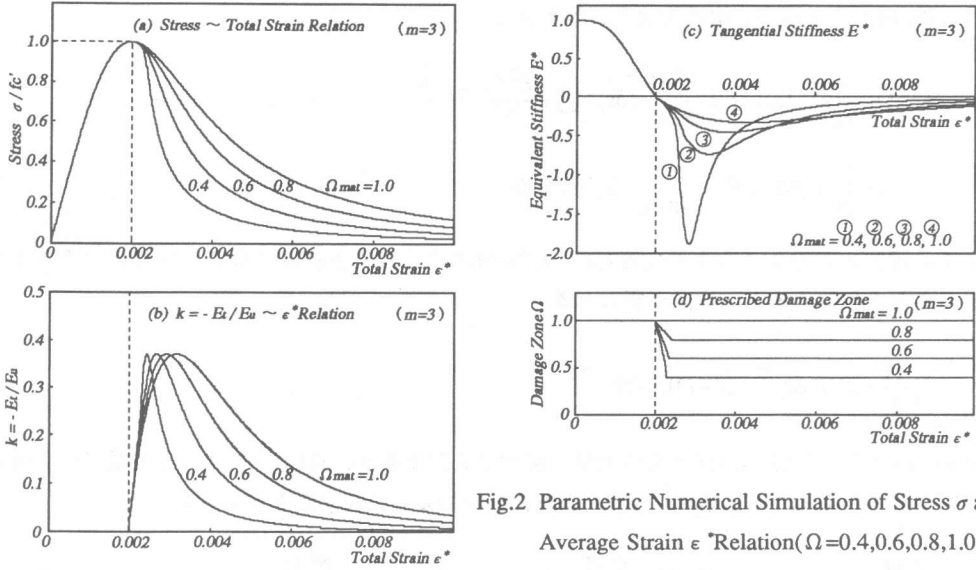


Fig.2 Parametric Numerical Simulation of Stress σ and Average Strain ϵ^* Relation ($\Omega=0.4,0.6,0.8,1.0$)

4. 安定/不安定条件の導出

次に、ピーク応力以降における圧縮部材の安定/不安定条件を導出するため、まず、3次元場におけるポテンシャルエネルギーの第2変分[4]を提示する。ここで、平衡状態にある部材の全ポテンシャルエネルギー Π は、内部エネルギー U と外部エネルギー V_E の和として、一般的に次式のように表される。

$$\begin{aligned}
 U &= \int_V \int_{\epsilon_{ij}^*} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^* dV = \int_{\Omega V} \int_{\epsilon_{ij}^t} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^t dV + \int_{(1-\Omega)V} \int_{\epsilon_{ij}^u} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^u dV \\
 V_E &= -\sum P_k u_k \\
 \Pi &= U + V_E = \int_{\Omega V} \int_{\epsilon_{ij}^t} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^t dV + \int_{(1-\Omega)V} \int_{\epsilon_{ij}^u} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^u dV - \sum P_k u_k \quad (9)
 \end{aligned}$$

上式を単純な単軸問題に帰着させると、部材の体積 $V=LA$ (A :部材の断面積)により、次式を得る。

$$\Pi = LA \left(\Omega \int_0^{\epsilon_t} \sigma d\epsilon_t + (1-\Omega) \int_0^{\epsilon_u} \sigma d\epsilon_u \right) - Pu \quad (10)$$

ここで、ポテンシャルエネルギーの変化 $\Delta\Pi$ は、両ひずみに対する変分 $\delta\epsilon_t$ と $\delta\epsilon_u$ を用い、次式のように書き表せる。

$$\begin{aligned}
 \Delta\Pi(\delta\epsilon_t, \delta\epsilon_u) &= \delta\Pi + \frac{1}{2!} \delta^2\Pi + \dots \\
 &= \left(\frac{\partial\Pi}{\partial\epsilon_t} \delta\epsilon_t + \frac{\partial\Pi}{\partial\epsilon_u} \delta\epsilon_u \right) + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2\Pi}{\partial\epsilon_t^2} (\delta\epsilon_t)^2 + 2 \frac{\partial^2\Pi}{\partial\epsilon_t \partial\epsilon_u} (\delta\epsilon_t \delta\epsilon_u) + \frac{\partial^2\Pi}{\partial\epsilon_u^2} (\delta\epsilon_u)^2 \right] + \dots \quad (11)
 \end{aligned}$$

ここで、ポテンシャルエネルギーの第1変分は、平衡状態において零であるので、上式の符号は、ポテンシャルエネルギーの第2変分により決定する。よって、ポテンシャルエネルギーの第2変分は、

上式の第2項のみを用い、次式のように書き表せる。

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon_i^2} (\delta \varepsilon_i)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_u} (\delta \varepsilon_i \delta \varepsilon_u) + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon_u^2} (\delta \varepsilon_u)^2 \\ &= \int_{\Omega V} E_i (\delta \varepsilon_i)^2 dV + \int_{(1-\Omega)V} E_u (\delta \varepsilon_u)^2 dV \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、ポテンシャルエネルギーの第2変分を体積LAで正規化するとともに、各領域でのひずみが一定であると仮定すると、次式が得られる。

$$\frac{\delta^2 \Pi}{LA} = \Omega E_i (\delta \varepsilon_i)^2 + (1-\Omega) E_u (\delta \varepsilon_u)^2 \quad (13)$$

式(13)において、 $\delta^2 \Pi / LA$ が正を得た時、部材は安定であり、逆に、 $\delta^2 \Pi / LA$ が負の時、部材は不安定になる。従って、安定/中立/不安定条件を次のように表すことができる。

$$\frac{\delta^2 \Pi}{LA} > 0 \rightarrow \text{安定 } (\Delta \Pi > 0), \quad \frac{\delta^2 \Pi}{LA} = 0 \rightarrow \text{中立 } (\Delta \Pi = 0), \quad \frac{\delta^2 \Pi}{LA} < 0 \rightarrow \text{不安定 } (\Delta \Pi < 0) \quad (14)$$

図-3は、第2変分 $\delta^2 \Pi$ を、両ひずみに対する変分 $\delta \varepsilon_i$ と $\delta \varepsilon_u$ の2自由度問題として解釈した時、 $\delta^2 \Pi / LA$ の(a)ピーク応力前と(b)ピーク応力後の変化を示したものである。同図から、点aにおいては、すべての領域において $\delta^2 \Pi > 0$ であるのに対して、点bでは、正負領域が混在しているのがわかる。ここで、独立である2成分 $\delta \varepsilon_i$ と $\delta \varepsilon_u$ を持つ $\delta^2 \Pi / LA$ が、全ての場合正であるための必要十分条件[7]は、次式で与えられる。

$$\Theta = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon_i^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon_u^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_u} \right) \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_u} \right) > 0 \quad (15)$$

上式の左辺は、式(12)、(13)により次式のように書き表せられる。

$$\Theta = (1-\Omega)\Omega E_i E_u = -(1-\Omega)\Omega k (E_u)^2 \quad (16)$$

ここで、ピーク応力以降、 E_i は負に、 k は正となり、式(16)は常に負となるので、式(15)を満足せず、不安定であることを示している。これは、二つの異なるひずみの変分 $\delta \varepsilon_i$ と $\delta \varepsilon_u$ が、独立に変化できるので応力制御に相当し、ピーク応力以降、常に不安定となることを示唆している(図-4(a))。一方、変位制御の場合、式(13)は次のような1自由度問題に変換される。ここで、部材端部の変位 u を $\delta u = 0$ で変位制御すると、

$$\delta u \equiv \int_{\Omega L} \delta \varepsilon_i dx + \int_{(1-\Omega)L} \delta \varepsilon_u dx = 0 \quad (17)$$

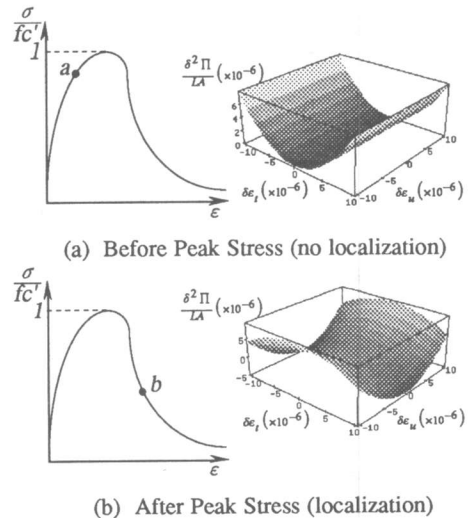


Fig.3 The Characteristic of Surfaces of Second Variation of Potential Energy

となり、これを整理すると次式の適合関係を導くことができる。

$$\delta \varepsilon_u = -\frac{\Omega}{(1-\Omega)} \delta \varepsilon_i \quad \text{または、} \quad \delta \varepsilon_i = -\frac{(1-\Omega)}{\Omega} \delta \varepsilon_u \quad (18)$$

上式を式(13)に代入すると、最終的に次式を定式化することができる。

$$\frac{\delta^2 \Pi}{LA} = \frac{(1-\Omega)\{(1+k)\Omega-k\}}{\Omega} E_u (\delta \varepsilon_u)^2 = -\frac{\Omega\{(1+k)\Omega-k\}}{k(1-\Omega)} E_i (\delta \varepsilon_i)^2 \quad (19)$$

従って、 $\delta^2 \Pi$ の符号から、安定/中立/不安定条件を次のように表すことができる。。

$$\Omega > \frac{k}{1+k} \rightarrow \text{安定} (\delta^2 \Pi > 0), \quad \Omega = \frac{k}{1+k} \rightarrow \text{中立} (\delta^2 \Pi = 0), \quad \Omega < \frac{k}{1+k} \rightarrow \text{不安定} (\delta^2 \Pi < 0) \quad (20)$$

以上の条件は、式(7-2)における弾性係数 E^* の符号と等価となり、 $E^* < 0 \rightarrow$ 安定、 $E^* = 0 \rightarrow$ 中立、 $E^* > 0 \rightarrow$ 不安定という結果になる(図-4(b))。このことはまた、軟化 \rightarrow 安定、snapback \rightarrow 不安定という帰結を意味するものである。ただし、これは、変位制御された状態(式(17))の時のみ有効である。

図-5(a)および(b)は、snapbackを生じない時および生じる時の応力 \sim ひずみ関係を表し、また、そのときの Ω と $k/(1+k)$ とがどのような関係にあるかを、横軸を軟化ひずみに換えて示したものである[5][6]。

5. 数値シミュレーション

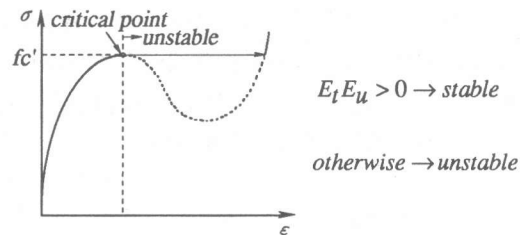
本手法の適用に際し、材料の特性に応じた軟化領域の比 Ω を合理的に評価するため、次式のような簡易的なモデル化を仮定した。

$$\Omega = 1 - (1 - \Omega_{mat}) \left(\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_c}{\varepsilon_{mat} - \varepsilon_c} \right) \quad (21)$$

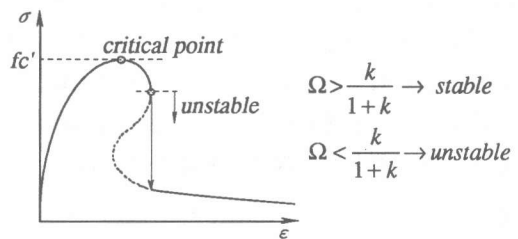
ここで、 Ω_{mat} は材料ごとに定まる局所化領域の最小値を示し、 ε_{mat} はこれに至るときのひずみを表す。すなわち、式(21)は、ピーク強度時($\varepsilon_i = \varepsilon_c'$)にて、軟化領域の局所化(分岐)が進行し、 Ω は徐々に減少するが、 Ω_{mat} は下回らないことを表現したものである(図-2(d)参照)。また、局所化領域の最小値 Ω_{mat} を次式のように仮定した。

$$\Omega_{mat} = nG_{max} / L \quad \left(G_{max} : \text{骨材の最大寸法}, n : \text{定数} \right) \quad (22)$$

図-6は、材料は同じであるが、部材長さが異なるa, b, cの3種類について、応力と部材端部の変位 $u (= \varepsilon \cdot L)$ との関係を表したものである[5][6]。これらは、局所化領域の長さ $\Omega_{mat} L (nG_{max})$ が同一



(a) Force-Controlled Mode



(b) Deformation-Controlled Mode
(under the restriction of $\delta u = 0$)

Fig.4 Stable/Unstable Criteria for Uniaxial Member Under Two Controlled Modes

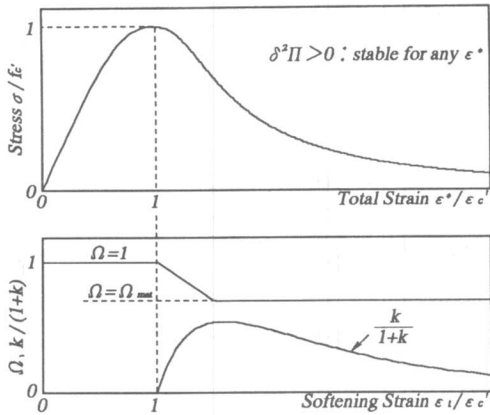


Fig.5(a) $\Omega_{mat} > \left(\frac{k}{1+k}\right)_{max} \rightarrow$ not snapback

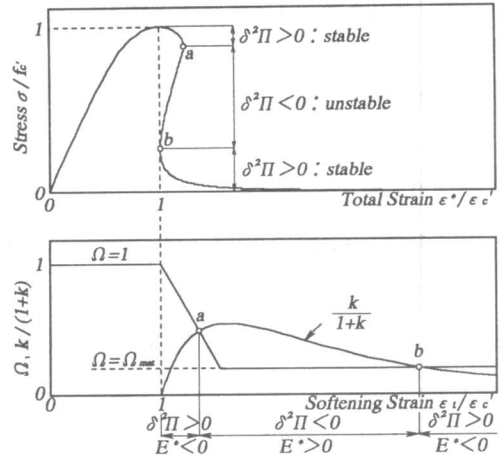


Fig.5(b) $\Omega_{mat} < \left(\frac{k}{1+k}\right)_{max} \rightarrow$ snapback

で、部材長さLの比が1:2:4の部材である。ただし、骨材の最大寸法 $G_{max}=1.6\text{cm}$ 、定数 $n=0.25$ を仮定した。同図より、圧縮強度に至るまで3曲線は寸法比の変形量をとるが、ピーク応力以降は、異なる降下曲線を呈することがわかる。特に、cのように部材に占める局所化領域が小さいほど、変位制御下では、ピーク応力以降snapbackを起こし、不安定状態になることがわかる。

6. あとがき

本文は、準脆性材料において、寸法効果を引き起こす要因となるひずみの局所化と、ポテンシャルエネルギーの第2変分による安定条件について理論的考察を行ったものである。一般応力場における定式化、局所帯が傾斜している場合の局所化の進行条件などを次の課題と考えている。

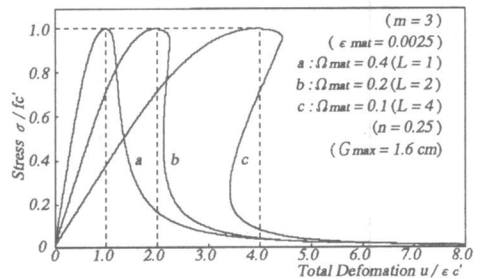
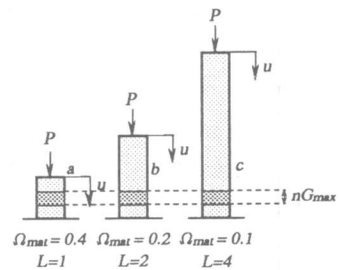


Fig.6 Stress σ and Total Deformation u Relation

参考文献

- 1) Bazant,Z.P.:Instability,Ductility,and Size-Effect in Strain-Softening Concrete,ASCE,Vol.102, No.EM2 ,pp.331-344,Apr. 1976
- 2) 吉川弘道、西村尚朋：局所化したひずみを有するコンクリートの構成則と安定条件、コンクリート工学年次論文報告集、Vol.14、No.2、pp.903-908、1992
- 3) Bazant,Z.P.:鉄筋コンクリートの有限要素法解析に関する第2回日米セミナー報告集、社団法人 日本コンクリート工学協会、pp.68-75、1991
- 4) Tauchert,T.R.(鷲津・岩本訳)：構造力学とエネルギー原理、ブレイン図書出版、1979
- 5) 小柳治、六郷恵哲、大野定俊：コンクリート供試体の下降域を含む荷重-変位曲線の自動計測システム、土木学会論文集、第354号/V-2、pp.119-126、1985-2
- 6) Popovics,s.:A Numerical Approach to the Complete Stress-Strain Curve of Concrete,Cement and Concrete Research,Vol.3,pp.585-599,1973
- 7) 川井忠彦、藤谷義信：座屈問題解析、培風館、1991