

## 論文

## [2012] 非線形ロッド要素を用いたコンクリートはりの曲げ強度寸法効果解析

二羽淳一郎\*

## 1. はじめに

コンクリートの破壊力学に関する研究が各所で精力的に進められてきている [1]. コンクリートの破壊力学は, 無筋コンクリートはりの曲げ破壊, せん断補強されていないはりの斜め引張破壊, アンカーボルトの引抜き破壊等, 基本的にコンクリートのひびわれが構造全体の破壊に直結するような破壊形態を解析的にシミュレートする際に極めて有効であると考えられる.

これらの破壊形態では, 単位面積当たりの破壊強度, いわゆる公称強度が部材の寸法とともに低減していくことが実験的に明かとなっている. この寸法効果は, 部材に発生する応力とコンクリートの引張強度を単純に比較する, いわゆる強度規準では, 決して説明できない現象である. そして, コンクリート構造強度の寸法効果を解析的に評価していく手法として, コンクリートの引張軟化挙動やコンクリートの破壊エネルギーを考慮した破壊力学的なアプローチが非常に有望視されているのである.

破壊力学に基づくコンクリートのひびわれ進展の解析方法には各種のものがある. この内のひとつが, Hillerborgにより提唱された「仮想ひびわれモデル」である [2]. これは, マイクロクラックの集合体であるコンクリートのひびわれを一つの離散的なひびわれにモデル化するものである. この方法に関する具体的な計算の手順は, 例えば JCIの破壊力学研究委員会の委員会報告書に詳しく説明されている [3]. すなわち, コンクリート部材内に, あらかじめこの離散的なひびわれ位置を設定しておく. ひびわれ位置には, 節点を2つ設けておき, 等価節点力がコンクリートの引張強度に対応する値を超えた場合には, 節点を切り離す. 以後, あらかじめ実験から定めておいたひびわれ幅とコンクリートの引張軟化応力の関係を切り離された節点間に与えることにより, 解析を進めていく. 節点間では, 通常の応力-ひずみ関係に代わって, 応力-変位(ひびわれ幅)関係が使用される点が, 大きな特徴である. 内田, 六郷らは, 本手法により無筋コンクリートはりや切欠きはりの曲げ解析を行い, 有用な知見を提示している [4][5].

この他のひびわれ進展の解析方法として, Bazantらが提唱した「ひびわれ帯モデル」がある [6]. ひびわれ進展規準に応力規準を用いると, 有限要素解析におけるメッシュサイズに, 発生する応力が依存することから, 客観的な結果が得られないとして, 有限要素解析にエネルギー規準を組み込んでいる. ひびわれ帯モデルでは, ひびわれを離散的に捉えず, ひびわれ帯内に微細なひびわれが一様に分布すると仮定している. この二つの解析方法は, ひびわれを離散的に捉えるか, あるいはある幅内で一様に分布すると仮定するかが異なるだけであり, コンクリートの引張軟化挙動およびコンクリートの破壊エネルギーの取扱いは同様である.

本研究では, このうち, ひびわれを離散的に捉える「仮想ひびわれモデル」を用いることとした. これは, 現実の破壊進行領域の状態をかなり簡易にモデル化したものであるが, 概念的には非常に明快である. そしてその際に, 仮想ひびわれ位置の両節点間に, コンクリートの非線形挙

\* 名古屋大学助教授 工学部土木工学科, 工博(正会員)

動，すなわちコンクリートの引張軟化挙動とコンクリートの破壊エネルギーを代表する，非線形ロッド要素を配置することとした．これにより，コンクリートの非線形挙動を通常の応力-ひずみ関係で表示することができ，増分解析が可能となる．参考文献[3]に示された解析方法は，基本的にはひびわれ進展位置を入力データとした割線解析であり，また部材内に複数のひびわれを設定することが困難である．しかし，本手法によれば，複数のひびわれを仮定することも可能であり，例えば曲げひびわれとせん断ひびわれが共存する場合にも拡張可能である．

## 2. 非線形ロッド要素

コンクリートの引張軟化挙動は，図1のように示される．引張応力が引張強度  $f_t$  に達するまでは，図1(a)のように応力-ひずみ関係で与えられるが，引張強度到達後は，図1(b)のように引張応力がひびわれ幅  $w$  の増加とともに低下していく．したがって，既往の仮想ひびわれモデルの解析では，このひびわれ幅と軟化応力の関係が解析に組み込まれていた．図1(b)の軟化曲線下の面積が，コンクリートの破壊エネルギー  $G_F$  である．コンクリートの材料特性である  $G_F$  や軟化曲線を，あらかじめ実験により

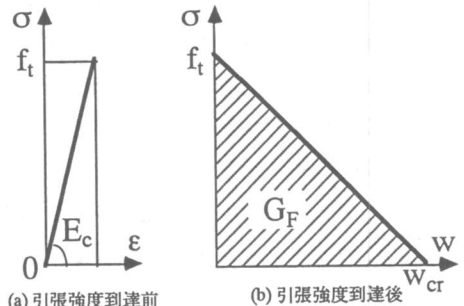


図-1 応力-ひずみおよび応力-ひびわれ幅関係

求めておき，これらを組み込んで有限要素解析を行うことになる．しかし，一般的な有限要素解析の手順では，要素内のひずみベクトル  $\{\epsilon\}$  は，要素の節点変位ベクトル  $\{u\}$  から，ひずみ-変位マトリクス  $[B]$  を介して求められる．すなわち，

$$\{\epsilon\} = [B]\{u\} \quad (1)$$

さらに，応力ベクトル  $\{\sigma\}$  や剛性マトリクス  $[k]$  も次のように求められる．

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}, [k] = \int_v [B]^T [D] [B] dv \quad (2), (3)$$

したがって，仮想ひびわれ位置のコンクリートの非線形性が，応力-変位（ひびわれ幅）関係ではなく，応力-ひずみ関係で与えられるならば，コンクリートの引張軟化挙動を全体系の剛性マトリクスにそのまま組み込むことができる．そこでここでは，ひびわれ位置におけるコンクリートの非線形性を表すものとして，図2に示すような非線形ロッド要素を用いることとした．ここで，非線形ロッド要素は，概念的に単位長さ  $L = 1$  を有するものと仮定している．引張強度到達後，直線的な軟化を仮定するとすれば，非線形ロッド要素の応力-ひずみ関係は，次式のように与えられる．

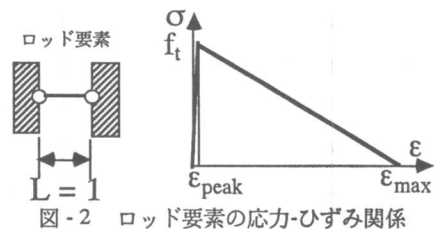


図-2 ロッド要素の応力-ひずみ関係

引張強度到達前：  $\sigma = E_R \epsilon \quad (4)$

$$\text{引張強度到達後： } \sigma = \frac{\epsilon_{\max} - \epsilon}{\epsilon_{\max} - \epsilon_{\text{peak}}} f_t \quad (5)$$

ただし、 $E_R = 100 E_C$ 、 $\epsilon_{\max} = W_{cr} / L$ 、 $W_{cr}$ ：限界ひびわれ幅、 $\epsilon_{\text{peak}}$ ：引張強度に対応するひずみである。図2の曲線下の面積が破壊エネルギーに対応するが、引張強度到達までの弾性領域におけるエネルギーを無視しうる程度に小さくするため、応力が $f_t$ に達するまでの剛性は意図的に増加させてある。これは、現象的には、ひびわれ発生までは、コンクリートを連続体と見なし、解析上は、2重節点を分離しないことに対応している。このようにして得られた非線形ロッド要素の応力-ひずみ関係、および接線剛性をプログラムに組み込んで解析を行う。

なお、実際の計算には、軟化曲線として、図2に示したような直線形の軟化モデルではなく、2直線形のいわゆる1/4モデルを使用している。

### 3. 要素分割の検討

曲げ解析では、断面の高さ方向に曲げ応力に変化するので、高さ方向の要素分割数すなわち配置するロッド要素数について検討しておく必要がある。本解析では、ひびわれ位置に設定した非線形ロッド要素以外のコンクリートはすべて弾性体とし、これを4節点アイソパラメトリック要素によりモデル化している。

曲げ解析において必要十分な分割数を検討するために、図3に示すような各種の要素分割を行い、無筋コンクリートはりの曲げ解析を実施した。試験体の寸法は、せん断スパン40cm、高さ24cm、厚さ1cmとした。要素分割に対応して、スパン中央のひびわれ位置におけるロッド数を5本～17本まで変化させた。なお、解析対象が、はりの半分であることを考慮し、この際のロッド要素の長さは1/2としてある。

図4に、解析より得られた曲げ強度とロッド数の関係を示した。図4より、曲げひびわれに沿うロッド数が9本程度以上配置されていれば、解析結果はほぼ同様の結果を与えることが認められる。したがって、以後の解析では、この結果に基づき、ひびわれ面にはロッド要素を9本程度以上使用することとした。

### 4. 切欠きはりの曲げ解析

続いて解析方法の妥当性を検証するため、実験データとの比較を行った。実験は、六郷・内田らが行った切欠きはりの曲げ試験である[4]。表1にはりの諸元を示す。図5に示す要素分割により、リガメ

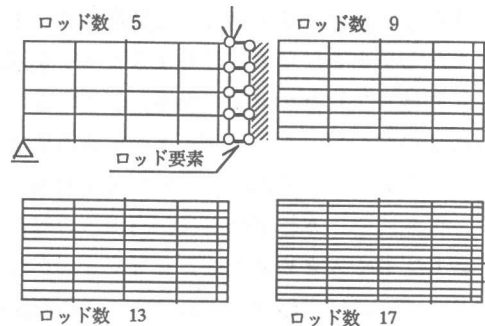


図-3 要素分割の種類

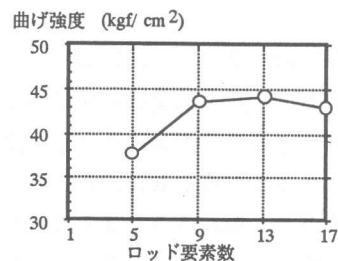


図-4 ロッド要素の増加に伴う曲げ強度の変化

表-1 切欠きはりの諸元

材令	圧縮強度 (kgf/cm <sup>2</sup> )	引張強度 (kgf/cm <sup>2</sup> )	破壊エネルギー $G_F$ (kgf/cm)
3日	195	17.6	0.134
7日	292	26.7	0.144
28日	407	34.3	0.160

供試体寸法=10x10x84cm(載荷スパン=80cm)、中央1点載荷、切欠き深さ=5cm



図-5 切欠きはりの要素分割

ント部にロッド要素を9本配置して、解析を行った。

材令3日、7日、および28日の切欠きはりの曲げ試験結果から得られる荷重-スパン中央変位関係を解析結果と比較した(図6)。図6中の細かい実線と破線は実験結果の上下限值、太い破線は内田らの解析結果であり、本解析結果は太い実線で示してある。なお、このような小型供試体では、試験結果に及ぼす自重の影響が無視できないと判断されたので、コンクリートの単位重量を $2.3\text{gf/cm}^3$ として、解析上、自重の影響を考慮している。

図6より、本解析結果は、内田らの解析値に比較して若干大きめの抵抗力を与えることが認められるが、ほぼ実験データのバラツキの範囲内にあり、妥当な結果を与えるものであることが確認された。

### 5. 曲げ強度の寸法依存性

曲げ強度の寸法効果を解析的に明らかにするために、はりの高さを変化させて曲げ強度解析を行った。はりの高さ $h$ は、1, 10, 50, 100, 500cmと変化させた。載荷スパンは $3h$ とし、3等分点載荷とした。はりの幅は単位幅とした。曲げ強度に影響を及ぼすと考えられるパラメータとして、①コンクリートの破壊エネルギー、②コンクリートの引張強度、③ヤング係数を選び、表2に示すように変化させた。

解析は、通常の変位制御解析である。解析から得られる曲げ耐力を基に、曲げ強度を算定した。図7は、使用した要素分割図である。ロッド要素は、はりの中央断面に21本配置した。

図8に、解析より得られた曲げ強度の寸法効果を示す。これらは、それぞれヤング係数、引張強度、破壊エネルギーが寸法効果にどのように影響するかを示すものである。なお、図中には、式(6)で表される CEB-FIP MC90[7]の曲げ強度の寸法効果式も示している。

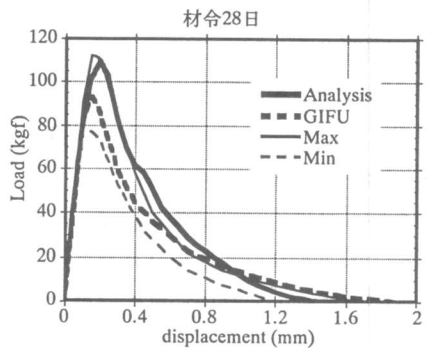
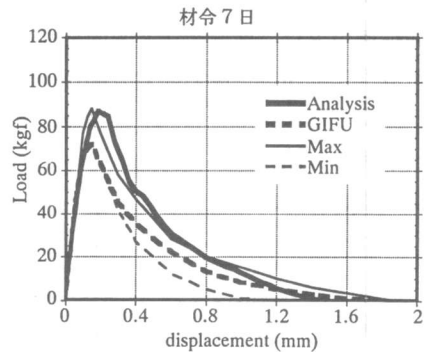
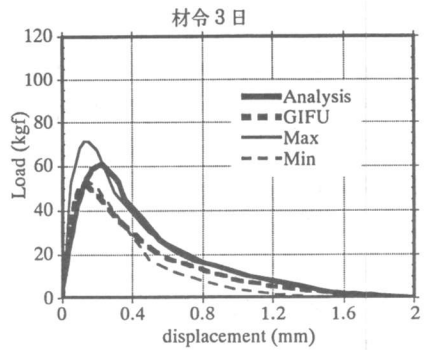


図-6 切欠きはりの荷重-変位曲線

表-2 解析の種類とパラメータ

解析 ケース	ヤング係数 $E_c$ kgf/cm <sup>2</sup>	引張強度 $f_t$ kgf/cm <sup>2</sup>	破壊エネルギー $G_F$ kgf/cm
No.1	$2.0 \times 10^5$	30.0	0.1
No.2	$3.0 \times 10^5$	30.0	0.1
No.3	$4.0 \times 10^5$	30.0	0.1
No.4	$3.0 \times 10^5$	10.0	0.1
No.5	$3.0 \times 10^5$	50.0	0.1
No.6	$3.0 \times 10^5$	30.0	0.05
No.7	$3.0 \times 10^5$	30.0	0.3

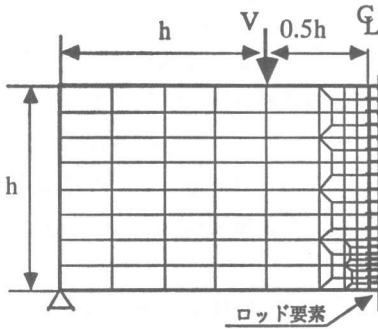


図-7 寸法効果解析のための要素分割

$$\frac{f_b}{f_t} = \frac{1 + 2(h/h_0)^{0.7}}{2(h/h_0)^{0.7}} \quad (6)$$

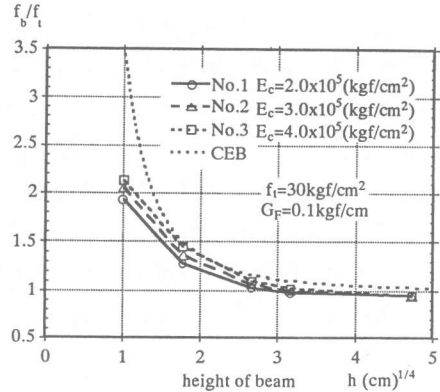
ただし、 $h_0 = 10\text{cm}$ である。CEB-FIP MC90の寸法効果式は、曲げ強度の寸法効果をはりの高さのみの関数として与える非常にシンプルな評価式である。図8は、それぞれヤング係数、引張強度、破壊エネルギーのみを変化させた場合の曲げ強度の寸法効果であるが、予想されるように、はりの高さのみを含む式(6)では予測精度が低下している。

エネルギー的に考察すれば、中央に荷重を受ける単純はり（高さ $h$ 、スパン $2h$ 、幅 $b$ ）のスパン中央下縁の曲げ応力が引張強度に達した際に、はりに蓄積されるひずみエネルギー $U$ は式(7)で算定できる。

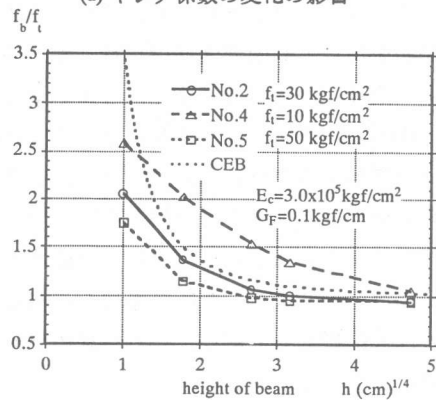
$$M_{cr} = \frac{f_t \cdot I}{h/2} = \frac{f_t b h^2}{6} = V_{cr} h \text{ を考慮すると, } U = \int_V \frac{1}{2} \sigma \epsilon dV = \frac{V_{cr}^2}{2EI^2} \int_V (xy)^2 dV = \frac{V_{cr}^2}{EI^2} \int_h x^2 dx \int_A y^2 dA = \frac{f_t^2 b h^2}{9E} \quad (7)$$

一方、破壊に要するエネルギーは $G_F b h$ である。したがって、その比率は式(8)となる。

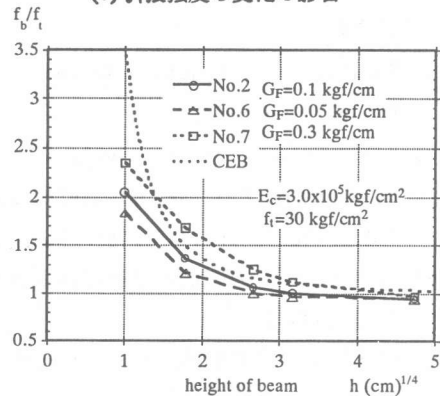
$$\frac{U}{G_F b h} = \frac{f_t^2 b h^2}{9E G_F b h} = \frac{f_t^2 h}{9E G_F} = \frac{h}{9 l_{ch}} \quad (8)$$



(a) ヤング係数の変化の影響



(b) 引張強度の変化の影響



(c) 破壊エネルギーの変化の影響

図-8 曲げ強度の寸法効果

ここに、 $l_{ch}$ は特性長さである。式(8)より、はり高さの増加とともに供給されるひずみエネルギーが増加し、急激に破壊が進行することが確認できる。またその際のパラメータとしてコンクリートの特性長さが関係してくることも理解できる。

図8によれば、ヤング係数の影響は、引張強度や破壊エネルギーの影響に比較して小さいことが認められる。曲げ強度が、引張強度を上回る理由は、縁応力が引張強度に到達した後の引張側コンクリートの塑性化であることは明らかである。したがって、引張強度が低くて軟化しやすい場合、および破壊エネルギーが大きくて軟化曲線下の面積が大きい場合ほど、引張強度からの曲げ強度の増加は著しいことになる。

## 6. 結論

曲げ強度の寸法効果を数値的に評価するために、コンクリートの破壊特性を組み込んだロッド要素を用いて有限要素解析を行った。使用したロッド要素の妥当性を切欠きはりの実験データにより検証した後、曲げ強度の寸法効果に関するパラメトリックスタディーを行った。

検討の結果、寸法効果をはりの寸法のみで評価するのは不十分であることが確認された。内田らが提案するように[5] パラメータを増加させていく方が当然精度は向上すると思われる。また、その裏付けもエネルギー的な考察に求めることができる。

ただし、実務上は、実験により破壊エネルギーを求めることが困難な場合も多いと思われる。したがって、より一般的で簡便な指標として、例えばコンクリートの圧縮強度を破壊エネルギーの代替指標として選び、これを含めた形で、寸法効果を評価していくことも一つの方策ではないかと思われる。

## 参考文献

- 1) Bazant, Z.P.: Fracture Mechanics of Concrete Structures, Elsevier Applied Science, 999pp., June 1992
- 2) Hillerborg, A. et al.: Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Element, Cement and Concrete Research, Vol.6, No.6, pp.773 ~782, Nov. 1976
- 3) コンクリートの破壊力学研究委員会: コンクリート構造の破壊力学に関するコロキウム, JCI, 1990.2
- 4) 内田裕市, 六郷恵哲, 小柳 治: 曲げ試験に基づく引張軟化曲線の推定と計測, 土木学会論文集, No.426, V-14, pp.203~212, 1991.2
- 5) 内田裕市, 六郷恵哲, 小柳 治: コンクリートの曲げ強度の寸法効果に関する破壊力学的検討, 土木学会論文集, No.442, V-16, pp.101~107, 1992.2
- 6) Bazant, Z.P., Oh, B.H.: Crack Band Theory for Fracture of Concrete, Materials and Structures, Vol.16, No.93, pp.155 ~177, 1983
- 7) CEB: CEB-FIP MODEL CODE 1990, Bulletin d'information, No.203, July 1991