

論文

[2014] 3次元要素および板要素の異種要素結合と非線形解析

村中健二\*1・具智深\*2・田辺忠顕\*3

1. 序論

板的挙動を示すマット上に構造物が付帯している場合の解析等では、その付帯した構造物の局所的な応力挙動を詳細に捉える必要が生ずる場合がある。例えば、原子炉を支持するベースマットと格納施設の一体的な応力解析の問題等がその一例である。この種の問題では付帯した構造物は局所的に3次元挙動を示すので、単純に構造物全体を板として考えることはできず何らかの形で3次元解析を行う必要がある。しかし、大型の構造物全体に対して3次元解析を行うとすれば、そのデータ作成がきわめて煩雑となり、さらに非線形解析を行おうとすれば、膨大な計算時間の面から実行不可能となる。

そこで本研究においては、ラグランジュの未定乗数法を用いて異自由度を有する板曲げ要素と3次元要素に対する結合の定式化を行い、ある部分を板要素と見なせるRC構造物を大きな板要素とそれを補う局所的な3次元要素の結合体として考え、自由度を大幅に減らす解析方法を検討した。現在、異種要素を結合するために汎用プログラムで用いている結合法では、結合節点、被結合節点のデータ、それら節点の拘束する自由度の選択及び拘束条件として与える変位関数の定義等が特に3次元構造において煩雑となるが、本手法では非常に簡便に板要素と3次元要素の結合が可能となる。

さらに、3次元要素の塑性解析においてDrucker-Pragerの降伏曲面を修正して圧縮と引張で連続した関数となる破壊基準を用い、統一かつ効率的に3次元非線形応力解析を行った。

2. 解析理論

2.1 ラグランジュ未定乗数法による異自由度を有する要素の結合の定式化 [1]

異なった自由度を持つ連続な2つの領域を結合するために、結合される節点間に体積のない仮想の結合要素を考えることで平衡方程式を導く。図-1に示すような仮想の境界面上での両要素の変位差が零になる条件を、ラグランジュ未定乗数法を用いて表すと次の変分式が得られる。

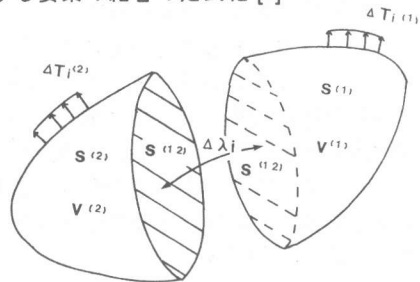


図-1 連続な2つの領域

$$\sum_{\alpha=1}^2 \left[ \int_{V^{(\alpha)}} \Delta \sigma_{ij}^{(\alpha)} \delta(\Delta \varepsilon_{ij}^{(\alpha)}) dV - \int_{S_{\sigma}^{(\alpha)}} \Delta T_i^{(\alpha)} \delta(\Delta u_i^{(\alpha)}) dS \right] - \delta \int_{S^{(12)}} \Delta \lambda_i (\Delta u_i^{(1)} - \Delta u_i^{(2)}) dS = 0 \tag{1}$$

$i, j : i, j = 1, 2, 3$

$\Delta( )$  : 増分量,  $\delta( )$  : 仮定量,  $\sigma_{ij}$  : 応力テンソル,  $\varepsilon_{ij}$  : ひずみテンソル

$u_i, u_i'$  : 変位ベクトル,  $T_i$  : 表面力ベクトル,  $\lambda_i$  : ラグランジュ未定乗数ベクトル

\*1名古屋大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (現 中部電力) (正会員)

\*2名古屋大学助手 工学部土木工学科、工博 (正会員)

\*3名古屋大学教授 工学部土木工学科、工博 (正会員)

ただし、( ) 内の添字  $\alpha = 1, 2$  は結合される 2 つの領域を表し、 $S^{(12)}$  は  $V^{(1)}, V^{(2)}$  の間の仮想境界面、 $S_\sigma^{(\alpha)}$  は表面力  $\Delta T_i^{(\alpha)}$  の作用する面である。

ここで、仮想結合要素の変位  $\Delta u_i^{(\alpha)}$  の補間マトリクスを  $[\Psi^{(\alpha)}]$  とすると、変位ベクトル  $\{\Delta u^{(\alpha)}\}$  は節点変位ベクトル  $\{\Delta q^{(\alpha)}\}$  を用いて次のように表される。

$$\{\Delta u^{(\alpha)}\} = [\Psi^{(\alpha)}]\{\Delta q^{(\alpha)}\} \quad (S^{(12)} \text{ 上において}) \quad (2)$$

2 つの領域の結合境界面  $S^{(12)}$  におけるラグランジュ未定乗数  $\Delta \lambda_i$  はラグランジュ乗数—一般化座標マトリクス  $[\Omega]$  を用いて次の形で表すことができる。

$$\{\Delta \lambda\} = [\Omega]\{\Delta \gamma\} \quad (3)$$

ここで、 $\{\Delta \gamma\}$  は  $S^{(12)}$  上の結合要素に対する一般化座標ベクトルである。

式 (2)、(3) を式 (1) に代入し、任意の  $\delta\{\Delta q^{(\alpha)}\}$  と  $\delta\{\Delta \gamma\}$  に対して変分式が成立することにより、最終的に次のような増分形でのマトリクス表示の平衡方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} [K^{(1)}] & [0] & [\hat{K}^{(1)}] \\ & [K^{(2)}] & [\hat{K}^{(2)}] \\ sym. & & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta q^{(1)}\} \\ \{\Delta q^{(2)}\} \\ \{\Delta \gamma\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\Delta F^{(1)}\} \\ \{\Delta F^{(2)}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$[K^{(\alpha)}] = \int_{V^{(\alpha)}} [B^{(\alpha)}]^T [(D^{ep})^{(\alpha)}] [B^{(\alpha)}] dV \quad (5)$$

$$[\hat{K}^{(1)}] = - \int_{S^{(12)}} [\Psi^{(1)}]^T [\Omega] dS \quad (6)$$

$$[\hat{K}^{(2)}] = \int_{S^{(12)}} [\Psi^{(2)}]^T [\Omega] dS \quad (7)$$

ここで、 $[K^{(\alpha)}]_{(\alpha=1,2)}$  は領域  $V^{(\alpha)}$  の剛性マトリクス、 $[\hat{K}^\alpha]$  は結合に関するマトリクスで領域  $V^{(1)}$  および  $V^{(2)}$  と仮想の結合要素との結合に關与するマトリクスである。

## 2.2 板要素と 3 次元要素の結合

図-2 に示す様な板要素とそれに付帯した 3 次元要素からなるモデルを考え、上記のラグランジュ未定乗数法を用いることで異自由度を有する両要素の結合を試みた。ここで、板要素は Z 方向変位、X, Y 軸回りの回転角の節点自由度をもつ板曲げ要素とし、3 次元要素は X, Y, Z 方向の変位自由度をもつアイソパラメトリック要素とする。

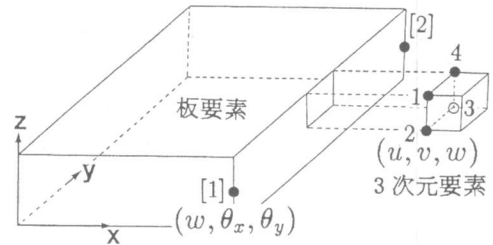


図-2 結合の概念図

仮想結合要素の変位ベクトル  $\{\Delta u^{(\alpha)}\}$  は次に示すように X, Y, Z 方向変位を持つものと仮定すれば、

$$\{\Delta u^{(1)}\} = \{\Delta u^{(2)}\} = \Delta\{u, v, w\}^T \quad (8)$$

従って、板要素と仮想結合要素を結合する補間マトリクスは次の様になる。

$$[\Psi^{(1)}] = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial N_1}{\partial x} & -z \frac{\partial N_2}{\partial x} & -z \frac{\partial N_3}{\partial x} & -z \frac{\partial N_4}{\partial x} & -z \frac{\partial N_5}{\partial x} & -z \frac{\partial N_6}{\partial x} \\ -z \frac{\partial N_1}{\partial y} & -z \frac{\partial N_2}{\partial y} & -z \frac{\partial N_3}{\partial y} & -z \frac{\partial N_4}{\partial y} & -z \frac{\partial N_5}{\partial y} & -z \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここで、 $N_1, N_2, N_3$  は図-2 に示す節点 [1] に対応する板曲げ要素の形状関数であり、 $N_4, N_5, N_6$  は節点 [2] に対応するものである。

一方、3 次元要素と仮想結合要素を結合する補間マトリクスは 2 次元 4 節点のアイソパラメトリック要素の形状関数を用い次のように仮定する。

$$[\Psi^{(2)}] = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \varphi_3 & 0 & 0 & \varphi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \varphi_3 & 0 & 0 & \varphi_4 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \varphi_3 & 0 & 0 & \varphi_4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

次にラグランジュ乗数について考える。ラグランジュ乗数は X, Y, Z 方向に対応する 3 つの量を考え、3 次元要素 1 要素につき 1 2 個の量が仮定される。そしてラグランジュ乗数の補間マトリクス  $[\Omega]$  には 2 次元のアイソパラメトリック要素の形状関数を用いることとした。従って式 (3) 中の  $[\Omega]$  は次のようになる。

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \varphi_3 & 0 & 0 & \varphi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \varphi_3 & 0 & 0 & \varphi_4 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \varphi_3 & 0 & 0 & \varphi_4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

ここで、下添字 1, 2, 3, 4 は 3 次元要素の節点番号を表す。

以上を式 (6)、(7) に代入することにより  $[\hat{K}^{(\alpha)}]$  が求まる。そして、この  $[\hat{K}^{(\alpha)}]$  と各要素の剛性マトリクスから成る式 (4) を通常の剛性マトリクスを解くのと同様に解くだけで板要素と 3 次元要素の節点変位を同時に求めることができる。

### 2.3 統一化塑性モデル [2]

過去の研究 [3] において、呉・田辺らは圧縮荷重を受けるコンクリート材料の硬化及び軟化構成モデルを構築するために Drucker-Prager の降伏曲面を用いた。しかし、同じパラメータで圧縮挙動と同様に引張挙動を完全に表現するには至らなかった。そういった問題を解消するために、本研究では式 (12) で表される修正した Drucker-Prager の降伏曲面を採用することにする。

$$f = J_2 - (k_f - \alpha_f I_1)^2 + (k_f - \alpha_f \eta)^2 = 0 \quad (12)$$

ここに、 $I_1 = \sigma_{kk}$ ,  $J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji}$  は応力テンソルの一次不変量及び偏差応力テンソルの二次不変量である。式 (12) の降伏曲面は Drucker-Prager の降伏曲面に漸近する。しかも、Drucker-Prager の降伏曲面を Mohr-Coulomb の偏差平面における六角形の圧縮子午線及び ( $r$  の値により変化させる) 減少した引張り子午線の双方に合わせるように修正した。ここでは  $\alpha_f, k_f$  を次のように定義した。

$$k_f = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + y \sin \phi_1)}, \quad \alpha_f = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + y \sin \phi_1)} \quad (13)$$

ここに、 $\phi_1$  は定数であり、関数  $y = \sqrt{a(\cos 3\theta + 1.00) + 0.01} - 1.10$ 、さらに  $a = \frac{1}{2} r^2 + 2.1r + 2.2$ 、 $\cos 3\theta = 3\sqrt{3} J_3 / (2J_2^{\frac{3}{2}})$  である。

また、 $\phi, c$  は Mohr-Coulomb における 2 つの強度パラメーター、つまり内部摩擦角及び粘着力であり、それらは一定ではなく損傷パラメーター  $\omega$  を定義する塑性ひずみ履歴に依存する。 $\phi, c$  を以下に示す。

$$c = c_0 \exp [-(m\omega)^2] \quad (14)$$

$$\phi = \begin{cases} \phi_0 + (\phi_f - \phi_0) \sqrt{2\omega - \omega^2} & \omega \leq 1 \\ \phi_f & \omega > 1 \end{cases} \quad (15)$$

ここで、 $m$  は材料定数であり  $c_0, \phi_0, \phi_f$  はそれぞれコンクリートの初期粘着力、初期摩擦角、および最終摩擦角を表す。

また、式 (12) における  $\eta$  は引張強度に影響を与えるパラメータで次のように表される。

$$\eta = \eta_0 \exp \left( -\frac{\omega}{b} \right) \quad (16)$$

式(16)中の $b$ は鉄筋比に関係する値であり、無筋コンクリートでは $b = 0.06$ とする。また、 $\eta$ は一軸引張強度と密接な関係のある静水圧軸上の引張強度である。

### 3. 解析結果

#### 3.1 統一化塑性モデルの検証

まず、統一化塑性モデルの検証として、本モデルを3次元アイソパラメトリック要素に適用し無筋コンクリートの一軸圧縮解析、一軸引張解析を行った。一軸圧縮の解析結果をKupferの実験結果[4]と共に図-3に示し、一軸引張の解析結果をPeterssonの実験結果[5]と共に図-4に示す。この結果より本構成モデルにより塑性化後のハードニング及びソフトニングの挙動を圧縮、引張共に適切に追従できることがわかる。

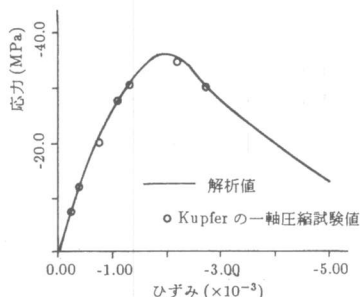


図-3 一軸圧縮解析値と実験値

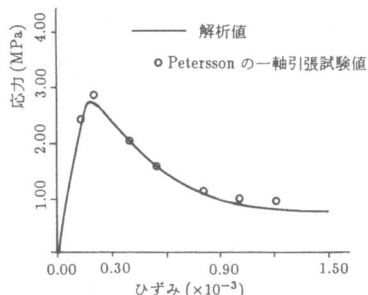


図-4 一軸引張解析値と実験値

次に一方向に鉄筋の配置された鉄筋コンクリートに対して引張解析を行い、実験と比較してテンションスティフニングの考察を行った。解析で鉄筋とコンクリートは完全に付着しているものと仮定した。図-5にRizkalla実験結果[6]と共に解析結果を示す。本構成モデルで鉄筋比に関係のあるパラメータは、式(16)中の $b$ であるが、このパラメータの調整だけで、図からわかるように複雑な鉄筋コンクリートのテンションスティフニングを適格に表現できることがわかる。

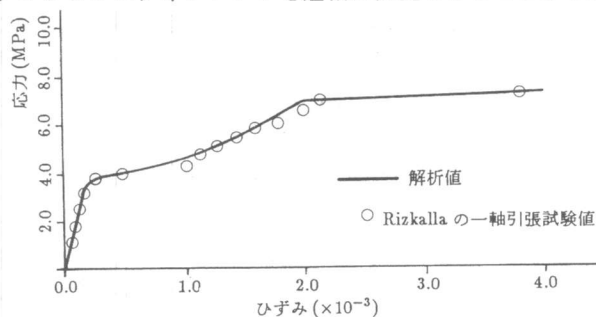


図-5 解析値と実験値のテンションスティフニングの影響の比較

#### 3.2 大型コンクリート構造物の3次元非線形解析

原子力発電所原子炉建屋基礎マットは図-6に示すような形状をしているのが一般的である。このような形状をしたコンクリート構造物は地震荷重を受けた際全体としては板的挙動を示すが、部分的に、例えば基礎立ち上がり部周辺の基礎と外周コンクリート壁との接合部分で、外周コンクリート壁から引張力(あるいは圧縮力)とせん断力が基礎マットに伝達され、接合部は3次元挙動を示し応力が複雑に乱れる。さらに原子力発電所のように最高レベルの安全性を求められる構造物は、相応の精密な解析精度を持つ必要があり従来通りの有限要素解析での要素数は相当な数に上るであろう。その時、基礎マットの大部分を少数の板要素で表し、基礎立ち上がり部周辺を3次元要素で要素分割すれば自由度の減少をはかることができ非常に効果的である。

従って、このような形状の構造物を本結合手法により板要素と3次元要素で図-7のようにモデル化し水平力、鉛直力を加えた非線形解析を行った。図-8に詳細な寸法、拘束条件及び水平、鉛直荷重の作用点を示す。実際の基礎マット構造物に作用する荷重は、平常時には鉛直荷重のみであり、一方、地震時にはこれに加え水平方向、鉛直方向に対して、上部構造物から基礎マット上部表面に伝達される節点力、及び水平方向に対して基礎マット全体に作用する節点力が加わる。本解析では簡単のため水平変位は基礎立ち上がり部の最も高い部分にX軸の負の方向に計4カ所、鉛直変位は $Z = 10m, 14m$ の面に下向きに計8カ所作用させる。モデルの寸法はおおよそ図-6の実際の構造物に合わせ板要素を2要素、3次元要素を87要素で要素分割をした。ただし板要素は弾性体とした。

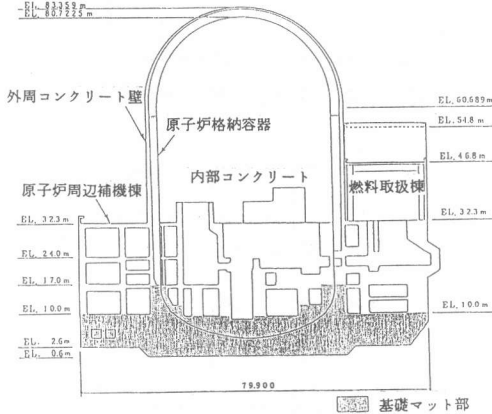


図-6 原子炉建屋の概略断面図

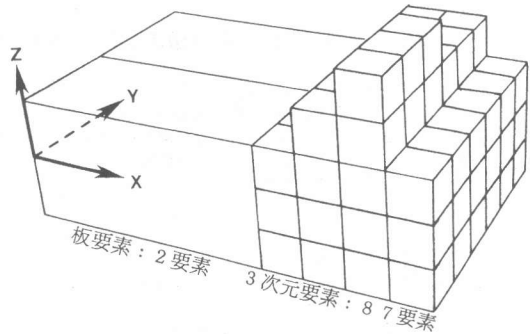


図-7 基礎マットのモデル化

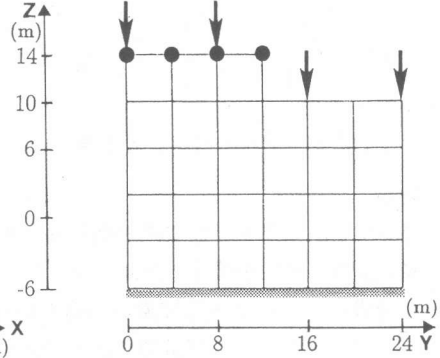
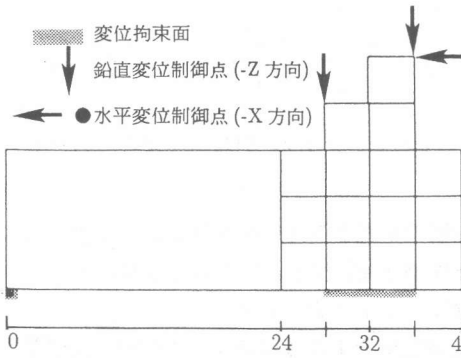


図-8 基礎マットモデルの解析条件

電力中央研究所の報告によれば、図-6に示す原子力発電所の想定するS1水平地震力は、基礎立ち上がり部で対応させるとおおよそ1275tonfとなり、またその時の水平震度は0.73gとされている。本解析によりS1地震時の約75%に相当する荷重時(水平震度でおおよそ0.56g)における結果として、図-9に $Z > 6m$ の3次元要素の降伏した順序、図-10に $Y = 0m$ の断面における変位図、図-11、図-12に、 $Y = 8.845m$ の断面のガウス点での圧縮及び引張ひずみの方向と大きさ及びクラックの方向を示す。

変位図より板要素と3次元要素の変位は滑らかにつながっており精度良く結合されていることがわかる。また、コンクリートに生じるクラックの方向は主引張ひずみと直交する方向であり、図-9より上から第1層と第2層の要素は降伏しているので、図-12に示す方向にクラックが入っている。さらに板要素との境界付近の3次元要素もまだ降伏には至っていないものかなり大きな圧縮及び引張ひずみが発生しており降伏に近い状態にあると言える。

また水平変位は最大で 1.8cm であり、鉛直変位は最大で 0.9cm であった。

以上のような考察により本手法によって十分に終局状態に至るまで解析可能と考えられる。

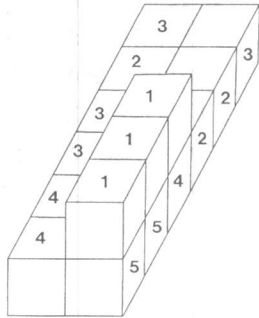


図-9 降伏要素とその順序 ( $Z > 6m$ )

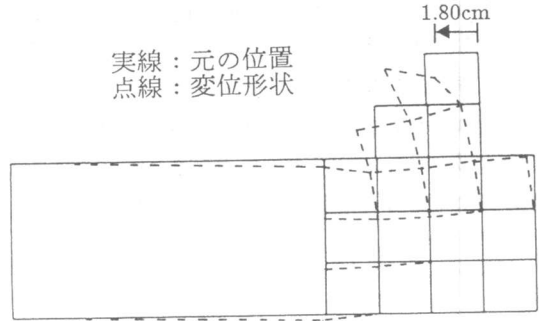


図-10 変位図 ( $Y = 0m$  断面)

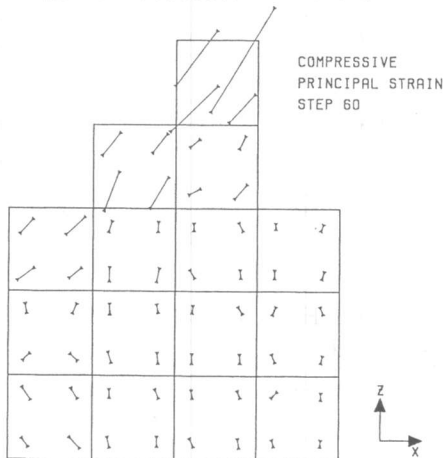


図-11 圧縮主ひずみの方向と大きさ

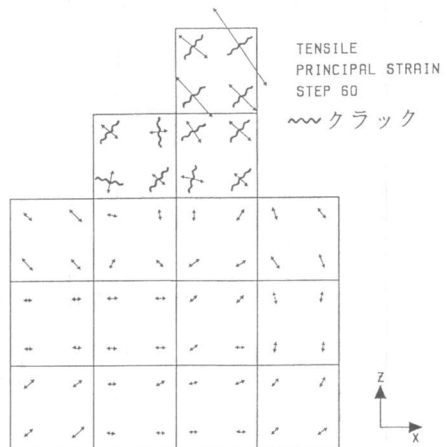


図-12 クラック、引張主ひずみの方向と大きさ

#### 4. 結論

本研究では 3 次元要素と板要素の結合及び 3 次元要素に対する統一化塑性モデルの適用について検討し本手法の妥当性を確認、検証した。得られた成果を要約すると以下ようになる。

1. 統一化塑性モデルの 3 次元要素への適用が可能であることがわかった。
2. ラグランジュ乗数により多数の 3 次元要素と板要素を結合する事ができ、この種の異種要素の結合体を 3 次元非線形解析することが可能であることがわかった。
3. 本結合手法を用いることにより、大規模で非常に大きい建造物の自由度を大幅に減らすことができ、従来手法では不可能であった 3 次元非線形解析が可能となったものと思われる。

#### 参考文献

- (1) 矢川元基ほか:ラグランジュ乗数法を用いた効率的な弾塑性構造解析用プログラム"EPAS"の開発と応用、日本機械学会論文集(A編)、Vol.46、No.401、pp.87-96、1980.1
- (2) 太田弘文:統一化塑性モデルによるコンクリート板の弾塑性解析、名古屋大学卒業論文、pp.3-13、1992.3
- (3) T.Tanabe, and Z.Wu:Strain Softning under Bi-Axial Tension and Compression, IABSE Col. Stuttgart, 1991
- (4) Kupfer, H.,et al.:Behavior of Concrete under Biaxial Stresses, ACI Journal, Vol.66, No.8, Aug.1969
- (5) Petersson, P. E.:Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plane Concrete and Similar Materials, Report No.TVBM-1006, Lund Institute of Technology, Dec.1981
- (6) Rizkalla, S. H. and Hwang, L. S.:Crack Prediction for Members in Uniaxial Tension, ACI Journal, Vol.81, No.6, Nov./Dec.1984