

論文

[2016] ハイブリッド応力法による鉄筋コンクリート平面骨組の解析

稲田祐二\*1・川端康洋\*2・角徹三\*3

1. はじめに

鉄筋コンクリート造建物の高層化、大規模化あるいは形態の複雑化に伴って、部材の弾塑性解析モデルに於ける信頼性の向上に対する要求は益々高まってきていると考えられる。これまでも、種々の弾塑性部材解析モデルが開発、提案されているが、これらは変位法的アプローチにより定式化がなされている。一方、近藤は、ハイブリッド応力法により定式化した柱・梁部材解析モデルでは理論上離散化誤差が生じないことを明らかにすると共に、応力分布から塑性ヒンジの正確な位置を見つけその位置に塑性ヒンジを導入する手法を確立した [1]。本研究では、このハイブリッド型停留コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づく塑性ヒンジ法を、変動軸力を考慮した鉄筋コンクリート梁・柱の平面解析モデルに適用すると共に山型ラーメンの解析例を示し、本モデルの有効性を確認することを目的とする。尚、本モデルは容易に立体解析モデルに拡張できると共に、次のような特徴を有する。1) 中間荷重を含んだ任意の荷重の取り扱いができる。2) ひび割れによる部材軸に沿った剛性変化を評価できる。3) 塑性ヒンジは、応力分布を用いて正確な位置に設定できる。4) 変断面（ハンチ付き、同一配筋されてない）部材に対して理論上の離散化誤差は生じない。

2. 解析モデルの定式化

2.1 弾塑性特性、降伏条件、塑性法則、塑性条件、相接ルール

平面梁・柱部材要素に対する座標系と符号を図-1に示すように定義し、これを図-2に示すように、材軸方向に  $n_z$  個のセグメントに分割する。各セグメント長は部材の剛性分布の変化率に応じて任意に設定するものとする。この分割したセグメントの塑性変形はセグメントの参照位置に挿入した非線形ばねにより評価する。但し、弾性領域では非線形ばねは生じないものとする。

この非線形ばねの一軸弾塑性特性は各セグメントに対し既知とした曲げモーメント-曲率関係及び軸方向力-軸歪関係をセグメント長に渡って積分し、曲げモーメント-回転角関係及び軸方向力-軸変形関係として図-3、図-4に示す三折線型特性として定義する。

次に、各セグメントに対す

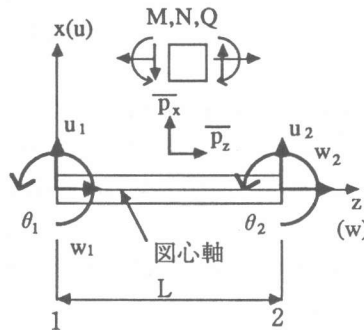


図-1 平面梁・柱部材要素

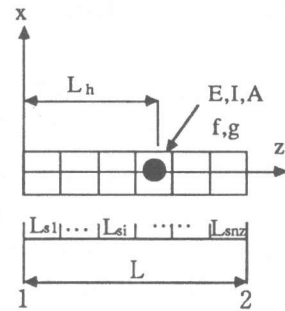


図-2 要素の分割

\*1 米子工業高等専門学校講師 建築学科、工修（正会員）  
 \*2 米子工業高等専門学校教授 建築学科  
 \*3 豊橋技術科学大学教授 工学部建設工学系、工博（正会員）

る降伏条件としてひび割れ曲線  $f$  と降伏曲線  $g$  の2つを考える。これら2つの曲線は相似形で与えられるものとし [2]、その応力状態によって図-5に示すように弾性領域、ひび割れ領域及び降伏領域の3つの状態に分類する [2] [3] [5]。これらの曲線は、与えられた一軸弾塑性特性をモデル化する為に、その大きさを変えないで移動するものとし下式で定義する。

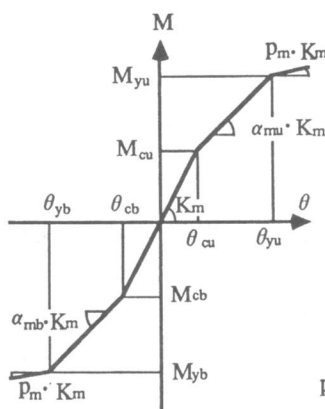


図-3 一定軸力下の  $M-\theta$  関係

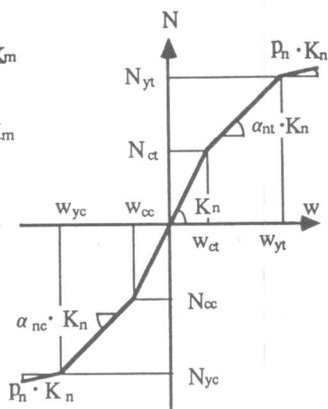


図-4 中心圧縮力及び中心引張力下の  $N-w$  関係

$$f(M - {}_cM^*, N - {}_cN^*) = 1 \quad (1)$$

$$g(M - {}_yM^*, N - {}_yN^*) = 1 \quad (2)$$

ここに  $M, N$  : 現在の応力

${}_cM^*, {}_cN^*$  : ひび割れ曲線の中心

${}_yM^*, {}_yN^*$  : 降伏曲線の中心

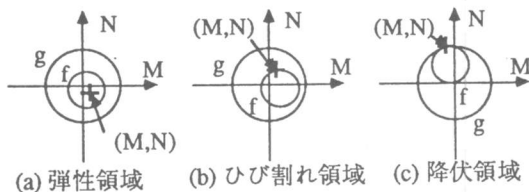


図-5 断面の応力状態による領域の設定

ひび割れ領域及び降伏領域に於ける付加塑

性変形増分は塑性流れ則により、下式で与えられるものとする。

$$\{\Delta \theta_c, \Delta w_c\}^T = \Delta \lambda_c \cdot \{\partial f / \partial M, \partial f / \partial N\}^T \quad (3)$$

$$\{\Delta \theta_y, \Delta w_y\}^T = \Delta \lambda_y \cdot \{\partial g / \partial M, \partial g / \partial N\}^T \quad (4)$$

ここに  $\Delta \lambda_c, \Delta \lambda_y$  : 付加塑性変形増分の大きさを示すスカラー量

また、ひび割れ及び降伏曲線はひび割れ及び降伏後の剛性による応力の上昇に伴い、Zieglerの移動硬化則に従い移動するものとして下式にてそれぞれの曲線の中心の移動量を与える。

$$\{\Delta {}_cM^*, \Delta {}_cN^*\}^T = \Delta \mu_c \cdot \{(M - {}_cM^*), (N - {}_cN^*)\}^T \quad (5)$$

$$\{\Delta {}_yM^*, \Delta {}_yN^*\}^T = \Delta \mu_y \cdot \{(M - {}_yM^*), (N - {}_yN^*)\}^T \quad (6)$$

ここに  $\Delta \mu_c, \Delta \mu_y$  : ひび割れ及び降伏曲線の移動量の大きさを示すスカラー量

これらの応力の上昇後も応力がひび割れ及び降伏曲線上にある為の条件として、下式で与えられる増分型の塑性条件が成立しなければならない。

$$\begin{aligned} \partial f / \partial M \cdot (\Delta M - {}_cH_m \cdot \Delta \lambda_c \cdot \partial f / \partial M) + \\ \partial f / \partial N \cdot (\Delta N - {}_cH_n \cdot \Delta \lambda_c \cdot \partial f / \partial N) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \partial g / \partial M \cdot (\Delta M - {}_yH_m \cdot \Delta \lambda_y \cdot \partial g / \partial M) + \\ \partial g / \partial N \cdot (\Delta N - {}_yH_n \cdot \Delta \lambda_y \cdot \partial g / \partial N) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

ここに  ${}_c H_m$ 、 ${}_c H_n$ 、 ${}_y H_m$ 、 ${}_y H_n$  : 一軸弾塑性特性から定まる硬化係数

$$\partial f / \partial M \cdot (\Delta M - \Delta {}_c M^*) + \partial f / \partial N \cdot (\Delta N - \Delta {}_c N^*) = 0 \quad (9)$$

$$\partial g / \partial M \cdot (\Delta M - \Delta {}_y M^*) + \partial g / \partial N \cdot (\Delta N - \Delta {}_y N^*) = 0 \quad (10)$$

式 (7)、(8) が要素内応力場に課せられる条件式である。ひび割れ及び降伏曲線の中心の移動量の大きさを与える  $\Delta \mu_c$ 、 $\Delta \mu_y$  は式 (9)、(10) より下式で与えられる。

$$\Delta \mu_c = (\partial f / \partial M \cdot \Delta M + \partial f / \partial N \cdot \Delta N) / \{ \partial f / \partial M \cdot (M - {}_c M^*) + \partial f / \partial N \cdot (N - {}_c N^*) \} \quad (11)$$

$$\Delta \mu_y = (\partial g / \partial M \cdot \Delta M + \partial g / \partial N \cdot \Delta N) / \{ \partial g / \partial M \cdot (M - {}_y M^*) + \partial g / \partial N \cdot (N - {}_y N^*) \} \quad (12)$$

各領域での硬化係数は、図-3 及び図-4 の一軸弾塑性特性より、以下のように求めることができる。

$${}_c H_i = \alpha_{ij} \cdot (1 - \alpha_{ij})^{-1} \cdot K_i \quad (13)$$

$${}_y H_i = P_i \cdot \alpha_{ij} \cdot (\alpha_{ij} - P_i)^{-1} \cdot K_i \quad (14)$$

但し、 $i$  は  $m$  又は  $n$  を、 $j$  は応力の正負別に  $u$ 、 $b$ 、 $t$  又は  $c$  をとる。

最後に、ひび割れ曲線を Ziegler の移動硬化則に従って移動させると、降伏曲線と重なり降伏しているのにひび割れが生じないという状態が起こる可能性があり、これを防ぐ為にひび割れ曲線に対する降伏曲線の相似比を  $\kappa$  とし、下式の相接ルールを採用する [2]。

$${}_c M^* = \{ (\kappa - 1) \cdot M + {}_y M^* \} / \kappa \quad (15)$$

$${}_c N^* = \{ (\kappa - 1) \cdot N + {}_y N^* \} / \kappa \quad (16)$$

## 2. 2 部材剛性方程式の誘導

要素内応力場は平衡方程式を満足する下式で与える。

$$N = n + \overline{N}_{(p)} \quad (17)$$

$$M = (1 - z/L) \cdot m_1 + (z/L) \cdot m_2 + \overline{M}_{(p)} \quad (18)$$

ここに  $n$ 、 $m_1$ 、 $m_2$  : 定数

$$\overline{N}_{(p)} = - \int_0^L \overline{P}_z \cdot dz$$

$$\overline{M}_{(p)} = - \int_0^z (\int_0^z \overline{P}_x \cdot dz) \cdot dz + z/L \cdot \int_0^L (\int_0^z \overline{P}_x \cdot dz) \cdot dz$$

式 (17)、(18) を用いて、ハイブリッド型停留コンプリメンタリーエネルギーの原理の増分型汎関数を求める。但し、ひび割れ及び降伏領域に於いては、材軸に沿って参照位置  $L_h$  のセグメントがひび割れ又は降伏状態に達した場合を考え、式 (7)、(8) で与えられる塑性条件式は、Lagrange の未定乗数を  $\Delta \lambda_c$ 、 $\Delta \lambda_y$  と置き、付帯条件として汎関数に導入する。そして、

この汎関数の停留条件をとると各領域に対する部材剛性マトリックス  $[K_m]$ 、荷重ベクトル  $\{\Delta F_m\}$  が次のように求まる。

(1) 弾性領域

$$[K_m] = [A_{s,d}]^T \cdot [A_{s,s}]^{-1} \cdot [A_{s,d}] \quad (19)$$

$$\{\Delta F_m\} = [A_{s,d}]^T \cdot [A_{s,s}]^{-1} \cdot \{\Delta B_s\} - \{\Delta B_d\} \quad (20)$$

(2) ひび割れ領域

$$[{}_c K_m] = [{}_c A_{s,d}]^T \cdot [{}_c A_{s,s}]^{-1} \cdot [{}_c A_{s,d}] \quad (21)$$

$$\{\Delta {}_c F_m\} = [{}_c A_{s,d}]^T \cdot [{}_c A_{s,s}]^{-1} \cdot \{\Delta {}_c B_s\} - \{\Delta B_d\} \quad (22)$$

(3) 降伏領域

$$[{}_y K_m] = [{}_y A_{s,d}]^T \cdot [{}_y A_{s,s}]^{-1} \cdot [{}_y A_{s,d}] \quad (23)$$

$$\{\Delta {}_y F_m\} = [{}_y A_{s,d}]^T \cdot [{}_y A_{s,s}]^{-1} \cdot \{\Delta {}_y B_s\} - \{\Delta B_d\} \quad (24)$$

ここに、自由度  $\{\Delta D\} = \{\Delta u_1, \Delta w_1, \Delta \theta_1, \Delta u_2, \Delta w_2, \Delta \theta_2\}^T$  とすると、上式のマトリックス及びベクトルは以下ようになる。

$$[A_{ss}] = \begin{bmatrix} L/EA & 0 & 0 \\ & L/3EI & L/6EI \\ \text{Sym.} & & L/3EI \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\{\Delta B_s\} = \int_0^L \{ 1/EA \cdot \Delta \bar{N}_{(p)}, 1/EI \cdot \Delta \bar{M}_{(p)} \cdot (1-z/L), 1/EI \cdot \Delta \bar{M}_{(p)} \cdot z/L \}^T \cdot dz \quad (26)$$

$$[A_{sd}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & -1/L & 0 & 0 & 1/L & -1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\{\Delta B_d\} = \{-\Delta \bar{N}_{(p)}|_1, 0, \Delta \bar{M}_{(p)}|_1, \Delta \bar{N}_{(p)}|_2, 0, -\Delta \bar{M}_{(p)}|_2\}^T \quad (28)$$

$$[{}_c A_{s,d}] = [A_{s,d}]^T, \{0\}^T \quad (29)$$

$$[{}_c A_{ss}] = \begin{bmatrix} \partial f / \partial N |_{z=Lh} \\ [A_{ss}] \partial f / \partial M |_{z=Lh} \cdot (1-Lh/L) \\ \text{Sym.} \partial f / \partial M |_{z=Lh} \cdot (Lh/L) \\ f_{44} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$f_{44} = -[{}_c H_m \cdot (\partial f / \partial M)^2 + {}_c H_n \cdot (\partial f / \partial N)^2] |_{z=Lh} \quad (31)$$

$$\{\Delta {}_c B_s\} = \{ \{\Delta B_s\}^T, (\partial f / \partial M \cdot \Delta \bar{M}_{(p)} + \partial f / \partial N \cdot \Delta \bar{N}_{(p)}) |_{z=Lh} \}^T \quad (32)$$

$$[{}_y A_{s,d}] = [{}_c A_{s,d}]^T, \{0\}^T \quad (33)$$

$$[y_{Ass}] = \begin{bmatrix} \partial g / \partial N |_{z=Lh} \\ \partial g / \partial M |_{z=Lh} \cdot (1 - Lh/L) \\ [c_{Ass}] \quad \partial g / \partial M |_{z=Lh} \cdot (Lh/L) \\ \text{Sym.} & 0 \\ f_{55} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$f_{55} = - [y_{H_m} \cdot (\partial g / \partial M)^2 + y_{H_n} \cdot (\partial g / \partial N)^2] |_{z=Lh} \quad (35)$$

$$[\Delta_y B_s] = [\Delta_c B_s]^T \cdot (\partial g / \partial M \cdot \Delta \bar{M}_{(p)} + \partial g / \partial N \cdot \Delta \bar{N}_{(p)}) |_{z=Lh}^T \quad (36)$$

### 3. 適用例

本解析モデルの数値解析例として、図-6のような等分布荷重と集中荷重を受ける山型ラーメンの例を示す。梁、柱の断面とラーメンの寸法及び材料定数を表-1に示す。断面のモーメント-曲率関係は平面保持の仮定を用いて文献[6]の方法により求め、図-7のように仮定した。また、各部材のセグメント数は $n_s = 20$ の等分割とした。断面のひび割れ及び降伏曲線は、本例題がモデルの精度並びに有効性を検討することを目的としたものである為、曲げモーメントのみの関数として下式にて与えた。

$$f = |M/M_c| = 1 \quad (37)$$

$$g = |M/M_y| = 1 \quad (38)$$

各セグメントの $M-\theta$ 関係を与える剛性は、セグメント内曲げモーメント及び曲率を一定と仮定し、下式にて求めた。

$$K_m = E_c I_e / L_s \quad (39)$$

本例について求めた荷重-変形

関係を、ひび割れによる剛性低下を無視した解析例と合わせて図-8に示す。また、図-9に塑性(降伏)ヒンジの発生順序とその荷重レベル及び材軸に沿ってのひび割れの進展状態を示す。

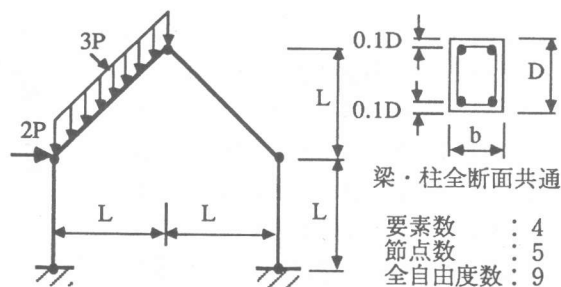


図-6 等分布荷重と集中荷重を受ける山型ラーメン

表-1 解析に用いた定数

| L<br>(cm) | b<br>(cm) | D<br>(cm) | Pt=Pc<br>(%) | Es<br>(t/cm <sup>2</sup> ) | sσ <sub>y</sub><br>(t/cm <sup>2</sup> ) | Es/Ec |
|-----------|-----------|-----------|--------------|----------------------------|---|-------|
| 300       | 30        | 60        | 0.60         | 2100                       | 3.0                                     | 10    |

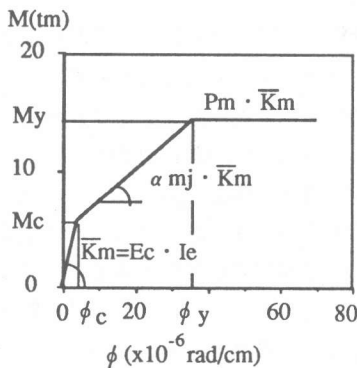


図-7 解析に用いたモーメント-曲率関係

図-9に於ける除荷による歪（曲率）反転範囲は、塑性（降伏）ヒンジの発生により、曲率分布が変化し、それまでの曲率増分と逆方向の増分になった為に生じたものである。

これらの解析結果より、本モデルによればひび割れ領域の範囲、歪（曲率）反転域の範囲並びに、これらによる剛性の変化を考慮した解析が可能であることがわかる。更に、塑性解析による厳密な崩壊荷重 [7]  $PL/My = 1.9153$  に対し、本数値解析では  $PL/My = 1.9164$  であり、その誤差はわずかに 0.057% である。

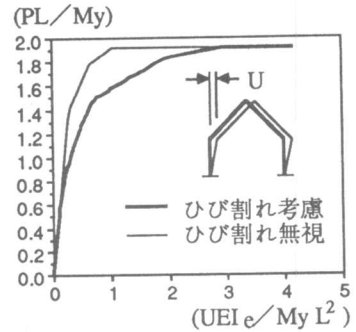


図-8 荷重-変形関係の解析結果

#### 4. まとめ

ハイブリッド応力法による鉄筋コンクリート梁・柱の弾塑性解析モデルの定式化を示し、簡単な解析例を示した。解析例では塑性崩壊荷重を精度良く求めることができた。また、ひび割れ領域と除荷による歪反転領域並びに、塑性（降伏）ヒンジ位置を追跡できた。更に、これらによる剛性の変化も評価できた。

以上より、本解析モデルを用いれば、従来からの変位法のアプローチによる解析モデルを用いた場合のように、材端部に限定された塑性ヒンジ位置を意識することなく、統一的な塑性崩壊荷重の追跡が可能となる。

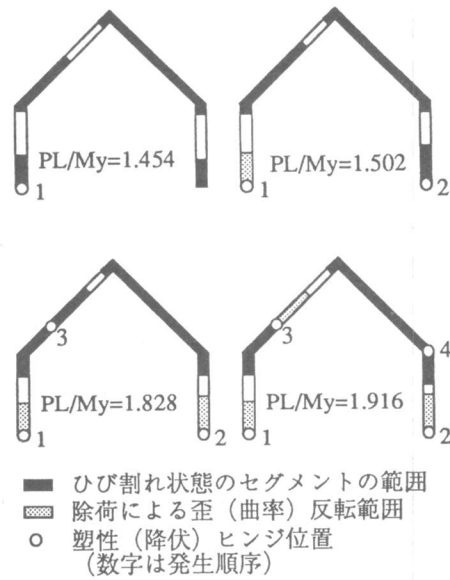


図-9 ひび割れ領域及び塑性ヒンジの進展状況

#### 【参考文献】

- 1) 近藤一夫：鋼構造骨組の塑性崩壊解析、培風館、1991、7
- 2) 福澤栄治、磯崎浩、高橋元美：変動軸力を考慮したRC造骨組の弾塑性解析（その1）  
日本建築学会構造系論文報告集、第372号、pp.31~44、1987、2
- 3) 滝沢春男：Tri-linear Modelの二軸曲げ問題への拡張及びその強震応答性状  
日本建築学会大会学術講演梗概集、pp.783~784、1973、10
- 4) 滝沢春男：二方向外乱を受ける二軸曲げモデルの強震応答性状（続報）  
日本建築学会関東支部学術発表会梗概集、pp.165~168、1973
- 5) 芳村学、青山博之、川村満：2方向外乱を受ける鉄筋コンクリート構造物の解析（その1）  
日本建築学会論文報告集、第298号、pp.31~41、1980、12
- 6) R.Park and T.Paulay：Reinforced Concrete Structures, Wiley-Inter-Science Publication, pp.203~216, 1975.
- 7) Hodge, P. G. Jr.：Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill, New York, 1959  
(倉西正嗣外共訳：構造物の塑性解析、コロナ社、pp.75~79、1961.)