

論文

[2084] 下界定理によるコンクリート円柱の圧縮強度解析

小椋紀行*1・市之瀬敏勝*2

1. 序論

現在、コンクリート円柱の円形フープ筋による拘束効果は、鈴木らのモデル[1]の様な実験式が提案されている。しかし、この拘束効果を解析的に求めているものはほとんどない。

本研究では、この拘束効果について下界定理を用い三軸圧縮効果による強度上昇を考慮に入れた解析を行い、実験式と比較し検討を行う。

2. 解析仮定

基本仮定1：圧縮応力場の仮定

図1の様な圧縮応力場モデルを仮定する。具体的には図2の様に主応力とその方向をタマネギ状(多重の膜状)に変化させながら存在すると仮定する。

基本仮定2：破壊条件の仮定

三軸圧縮を受けるコンクリートの破壊条件は、Richartら[2]のコンクリートの静水圧下での実験式(つまり、Mohr-Coulombの基準)である以下の式(1)を満たす時と仮定する。(以下、圧縮を正とする。)

$$\sigma_3 = m \sigma_1 + \sigma_B \quad (1)$$

σ_1 : コンクリートの第1(最小)主応力

σ_3 : コンクリートの第3(最大)主応力

m : 実験より得られた係数($m=4.1$)

σ_B : 無筋コンクリートの一軸圧縮強度

3. 解析手順

① 補足仮定1：r軸、z軸を図3の様にとり、図4の様な主応力の方向を表す関数式 $J(r, z)$ を式(2)で仮定する。

$$J(r, z) = arz^2 + r \quad (2)$$

図4において $J(r_1, z_0) = r_0$ となるので、以下の式(3)が成り立つ。

$$a = \frac{r_0 - r_1}{r_1 z_0^2} \quad (3)$$

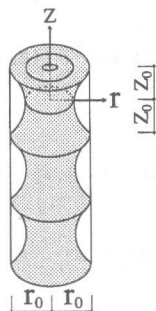
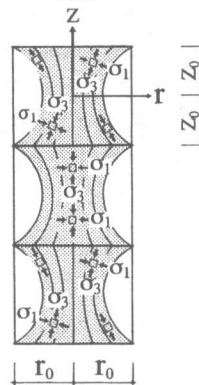
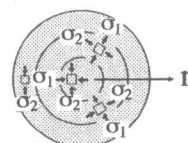


図1 圧縮応力場モデル

図2 主応力モデル

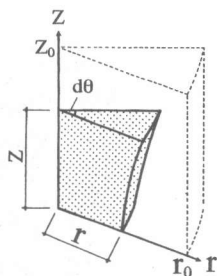


図3 座標軸

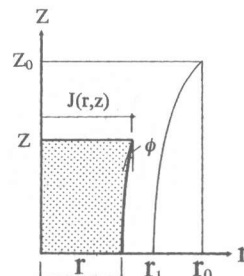


図4 主応力方向関数

*1 名古屋工業大学大学院生 工学部社会開発工学科、(正会員)

*2 名古屋工業大学助教授 工学部社会開発工学科、工博(正会員)

主応力の傾き ϕ に関しては式(2)を z で微分して得られる以下の式(4)により求める。

$$\tan \phi = \frac{\partial}{\partial z} J(r, z) = 2arz \quad (4)$$

② 補足仮定 2 : 破壊条件に達するのは最小断面位置 ($z=0$) のみと仮定する。なおこの場合、その他の位置の主応力は破壊条件式(1)以下 ($\sigma_3 \leq m \sigma_1 + \sigma_B$) になる。

③ 微小断面の断面積 :

図5の様な座標 ($J(r, z), z$) を中心とする微小立体を想定する。第1主応力 σ_1 に垂直な微小断面を図5-(a)の様に、第2主応力 σ_2 に垂直な微小断面を図5-(b)の様に、第3主応力 σ_3 に垂直な微小断面を図5-(c)の様に取る。この時、各々の断面積は式(5)(6)(7)により得られる。

$$dS_1(r, z) = 2J(r, z) \sec \phi \, dz \, d\theta \quad (5)$$

$$dS_2(r, z) = 4 \frac{\partial}{\partial r} J(r, z) \sec^2 \phi \, dr \, dz \quad (6)$$

$$dS_3(r, z) = 2J(r, z) \frac{\partial}{\partial r} J(r, z) \sec \phi \, dr \, d\theta \quad (7)$$

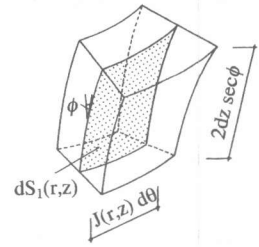
④ 微小断面に加わる力 :

各々の微小断面に加わる力は図6・7-(a)(b)(c)より以下の式(8)~(10)により得られる。

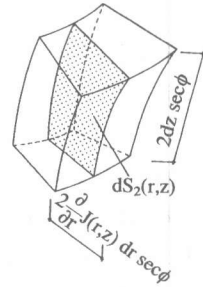
$$dF_1(r \pm dr, z) = \sigma_1(r \pm dr, z) \cdot dS_1(r \pm dr, z) \quad (8)$$

$$dF_2(r, z) = \sigma_2(r, z) \cdot dS_2(r, z) \quad (9)$$

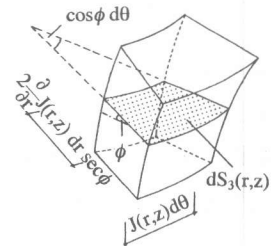
$$dF_3(r, z \pm dz) = \sigma_3(r, z \pm dz) \cdot dS_3(r, z \pm dz) \quad (10)$$



(a) σ_1 に垂直な断面

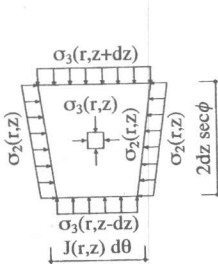


(b) σ_2 に垂直な断面

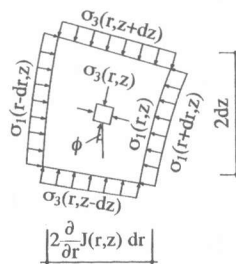


(c) σ_3 に垂直な断面

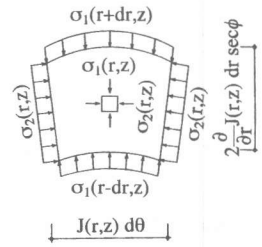
図5 断面積



(a) σ_1 に垂直な断面



(b) σ_2 に垂直な断面



(c) σ_3 に垂直な断面

図6 応力状態

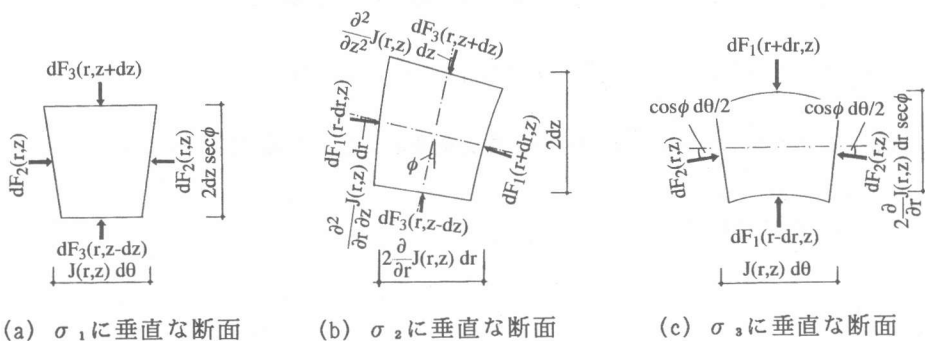


図7 力の状態

⑤ 第1主応力方向の釣合条件式：図7 (b)の dF_1 と dF_3 および図7 (c)の dF_2 を示力図にすると、図8のようになる。この図より σ_1 方向の釣合を考えると以下の式(11)を得る。

$$\begin{aligned}
 [dF_1(r+dr, z) - dF_1(r-dr, z)] + [dF_3(r, z+dz) + dF_3(r, z-dz)] \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} J(r, z) dz \\
 = dF_2(r, z) \cos \phi \, d\theta \quad (11)
 \end{aligned}$$

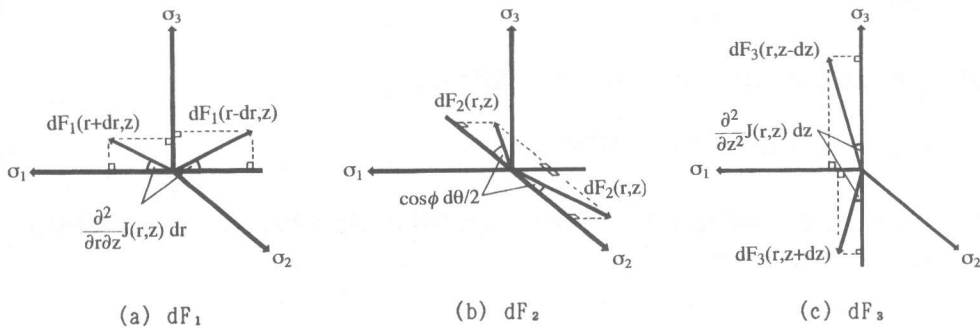


図8 示力図

式(11)に式(2)と式(4)～(10)を代入すると以下の式(12)になる。

$$2ar \, \sigma_3(r, z) = - \frac{\partial}{\partial r} \sigma_1(r, z) - \frac{\sigma_1(r, z) - \sigma_2(r, z)}{r} \quad (12)$$

主応力の大きさ ($0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$) と式(3) ($a \geq 0$) を考慮に入れると、 $\sigma_3(r, z)$ が最大となる(即ち、圧縮強度が最大となる)のは、式(12)において $\sigma_1(r, z) = \sigma_2(r, z)$ の時である。これより、式(12)は以下の式(13)のようになる。

$$2ar \, \sigma_3(r, z) = - \frac{\partial}{\partial r} \sigma_1(r, z) \quad (13)$$

⑥ 第3主応力方向の釣合条件式：図8 (a) (b) (c)より考えると以下の式(14)を得る。

$$[dF_1(r+dr, z) + dF_1(r-dr, z)] \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} J(r, z) \, dr = [dF_3(r, z+dz) - dF_3(r, z-dz)] \quad (14)$$

式(14)に式(2)と式(4)～(10)を代入すると以下の式(15)のようになる。

$$2az \sigma_1(r, z) = (az^2 + 1) \frac{\partial}{\partial z} \sigma_3(r, z) + 4az \sigma_3(r, z) \quad (15)$$

⑦ 補足仮定3：第1主応力 $[\sigma_1(r, z)]$ を分離関数で以下の式(16)の様に表す。

$$\sigma_1(r, z) = n(r) \cdot v(z) \quad (16)$$

$$\text{但し、} v(0) = 1 \quad (17)$$

⑧ $n(r)$ の算定：補足仮定2より式(1)は $z = 0$ のみで成立する。式(13)に式(1)と式(16)および $z = 0$ を代入すると以下の式(18)が得られる。

$$-\frac{d}{dr} n(r) = 2ar \cdot m \cdot n(r) + 2ar \cdot Fc \quad (18)$$

圧縮応力場の最外部 ($r = r_1$) において、常に第1主応力 $\sigma_1(r_1, z) = 0$ となる。これと式(16)より以下の様な境界条件式(19)が得られる。

$$n(r_1) = 0 \quad (19)$$

式(18)と境界条件式(19)より以下の式(20)が得られる。

$$n(r) = \frac{\sigma_B}{m} \{ \exp[am(r_1^2 - r^2)] - 1 \} \quad (20)$$

⑨ $v(z)$ の算定：式(15)に式(16)(18)を代入し境界条件式(17)を考慮して解くと、以下の式(21)が得られる。

$$v(z) = (az^2 + 1)^{(1-2m)/m} \quad (21)$$

⑩ 第1主応力： $\sigma_1(r, z)$ は式(16)に式(20)(21)を代入することにより得られる。

⑪ 第3主応力：式(13)に $\sigma_1(r, z)$ を代入し解くことにより以下の様な式(22)が得られる。

$$\sigma_3(r, z) = \sigma_B \exp[am(r_1^2 - r^2)] \cdot (az^2 + 1)^{(1-2m)/m} \quad (22)$$

⑫ 円形フープ筋の応力 f_s ：

$z = z_0$ において、図9の様なせん断応力 $\tau(r, z_0)$ が生ずる。このせん断応力 $\tau(r, z_0)$ は以下の様な式(23)で得られる。

$$\tau(r, z_0) = [\sigma_3(r, z_0) - \sigma_1(r, z_0)] \sin \phi \cos \phi \quad (23)$$

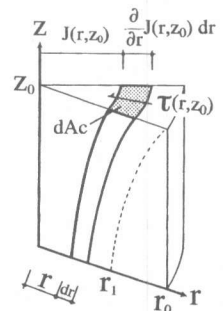


図9 せん断応力 τ

前述のせん断応力 $\tau(r, z_0)$ により、フープ筋には図10の様な分布力 $dQ(z_0)$ が加わる。この分布力 $dQ(z_0)$ は $\tau(r, z_0)$ を図9の様な断面積 $[dAc]$ で積分することにより以下の式(24)で得られる。

$$dQ(z_0) = \int_0^{r_1} \tau(r, z_0) \cdot dAc$$

$$= \int_0^{r_1} \tau(r, z_0) \cdot J(r, z_0) d\theta \frac{\partial}{\partial r} J(r, z_0) dr \quad (24)$$

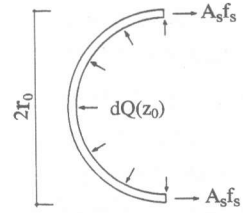


図10 円形フープ筋の釣合

図10より以下の様な式(25)が得られる。

$$A_s f_s = \int_0^\pi \frac{dQ(z_0)}{d\theta} \sin\theta d\theta = 2 \frac{dQ(z_0)}{d\theta} \quad (25)$$

A_s : 円形フープ筋の断面積

⑬ 円柱の圧縮力 P_m : 圧縮力(P_m)は最小断面位置($z=0$)における $\sigma_s(r, 0)$ を断面積 $[r d\theta dr]$ で積分することにより以下の式(26)で得られる。

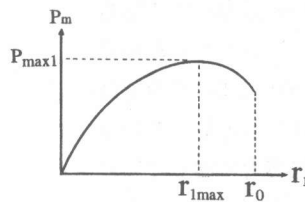
$$P_m = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} \sigma_s(r, 0) r d\theta dr = \frac{\sigma_B \pi}{m a} \{ \exp[amr_1^2] - 1 \} \quad (26)$$

⑭ 円柱の最大圧縮力 :

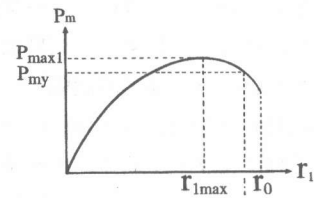
圧縮力 P_m は図11・12-(a)の様
に r_1 に関して極大値 P_{max1} を持
つ。この時の r_1 を r_{1max} と呼ぶ。
一方、フープ筋の応力(f_s)は図11
・12-(b)の様 r_1 に関して単調減
少する。この時、次の2つの場合
がある。

1) $r_1 = r_{1max}$ でフープ筋の応
力(f_s)が降伏応力(f_{my})を越えて
いない場合 : 図11より P_{max1} が最
大圧縮力となる。

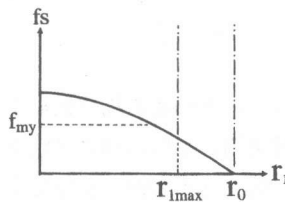
2) $r_1 = r_{1max}$ でフープ筋の応
力(f_s)が降伏応力(f_{my})を越えて
いる場合 : 図12より、降伏時点の
圧縮力(P_{my})が最大圧縮力となる。



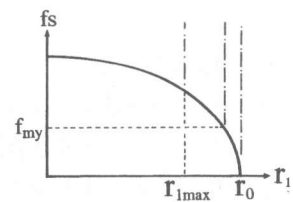
(a) 圧縮力



(a) 圧縮力



(b) 円形フープ筋の応力
図11 フープ筋が降伏
しない場合



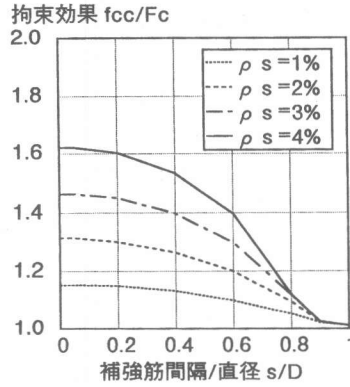
(b) 円形フープ筋の応力
図12 フープ筋が降伏
する場合

5. 解析結果

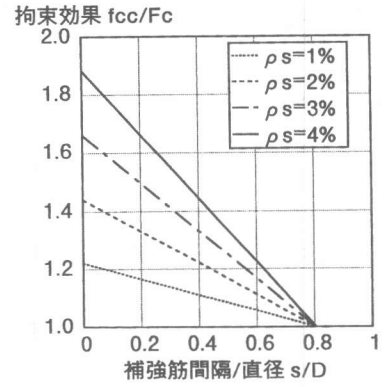
本論文において、円柱の圧縮強度を f_{cc} と表し、 f_{cc}/σ_B を拘束効果と呼ぶ。補強筋間隔/コンクリート円柱の直径(s/D)を補強筋間隔比、フープ筋の体積比(ρ_s)を補強筋比と呼ぶ。解析条件として、補強筋間隔比を0.2, 0.4, 0.6, 0.8の4種類とし、補強筋比を1, 2, 3, 4(%)の4種類とした。また、フープ筋の降伏強度/無筋コンクリートの圧縮強度(f_{my}/σ_B)=10とした。

5. 1 拘束効果と補強筋間隔比の関係

図13に拘束効果と補強筋間隔比の関係を示す。解析値と鈴木らの実験式の値[1]を比較した場合、解析値が曲線的に変化するのに対し、実験式の値は1次関数的に変化し補強筋間隔比(s/D)=0.8において拘束効果が1となる。しかし、補強筋間隔の拘束



(a) 解析値



(b) 実験式[1]

図13 拘束効果と補強筋間隔の関係

効果への影響は全体的にはほぼ同様の傾向を示す。

5. 2 拘束効果と補強筋比の関係

図14に拘束効果と補強筋比の関係を示す。補強筋間隔比(s/D) ≤ 0.6 の場合、ほぼ1次関数的に増加している。これは、フープ筋の応力が降伏応力に達することにより拘束効果が決定されるためである。一方、補強筋間隔比(s/D)=0.8の場合では、補強筋比(ρ_s)=2.6%付近で頭打ちとなっている。これは、フープ筋の応力が降伏応力に達していないので、拘束効果が補強筋比に支配されないためである。

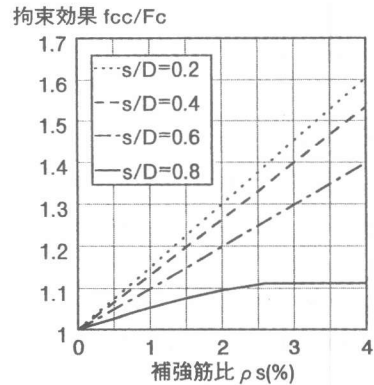


図14 拘束効果と補強筋比の関係

6. 結論

- 1) 円形フープ筋によるコンクリート円柱の拘束効果を、圧縮応力場とMohr-Coulombの基準を仮定することにより下界定理を用いて解析的に算定できる。
- 2) 補強筋比の拘束効果への影響とその頭打ち現象を上記の解析値により示すことができる。
- 3) 解析値と実験式の値と比較した場合、全体的にはほぼ同様の傾向を示す。

参考文献

- [1] 鈴木計夫・中塚信・井上和正：円形横補強筋を用いたコンファインドコンクリートの応力・歪特性および同コンクリート内に配筋された圧縮軸筋の座屈性状、コンクリート構造物の靱性とその評価法に関するコロキウム、日本コンクリート工学協会、pp. II 21-II 32、1988. 3
- [2] Richart, F. E., et al. : A Study of the Failure of Concrete under Combined Compressive Stresses, University of Illinois Engineering Experimental Station, Bulletin, No. 185, 104 pp., 1928