

論文

[2181] プレキャスト床版を用いた PC 合成桁のクリープ解析

高海克彦\*1 浜田純夫\*\*2

1. まえがき

近年の工期の短縮化および省力化のため、プレキャスト部材を用いた構造物の建設工法が盛んに開発・実用化されつつある。コンクリート橋の分野においてもプレキャスト化、プレストレス化が進み、プレキャスト PC 桁とプレキャスト PC 床版を結合する形式も考案されている。これまでの PC 合成桁の建設において、床版コンクリートは現場打ちを前提としているため、床版と桁の結合は剛合成を仮定している。しかしながらプレキャスト部材を接合する場合は、弾性合成を考慮することも必要となってくると思われる。これまで PC 合成桁の設計において、剛合成としてクリープ解析を行ったものはいくつかあるが[1],[2]、桁と床版のずれを考慮して解析を行ったものは未だ見受けられない。

本研究では、桁と床版のずれ、両コンクリートのクリープ差および鋼材の影響を同時に考慮した剛性方程式を導き、いくつかの計算例を示すものである。

2. コンクリートのクリープ構成則

コンクリート構造物の施工は数段階を追って実施されるので、クリープ解析においても多段階計算が妥当と思われる。本解析で対象とする PC 合成桁においても桁と床版の材令は異なる場合が多いゆえ、床版並びに桁の各々に対し、文献[1]を基に材令  $t_k$  で作用する応力増分  $\Delta\sigma(t_k)$  を考慮して、材令  $t_r$  から  $t_{r+1}$  の間のクリープひずみ増分を表すと次式となる。

$$\Delta\varepsilon(t_{r+1}, t_r) = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\{\Delta\sigma(t_k) + \Delta\sigma_c(t_{k+1}, t_k)\}}{E_c} \{\phi(t_{r+1}, t_k) - \phi(t_r, t_k)\} \quad (1)$$

$$+ \frac{\Delta\sigma(t_r)}{E_c} \phi(t_{r+1}, t_r) + \frac{\Delta\sigma_c(t_{r+1}, t_r)}{E_r}$$

ここに、 $E_c$  はコンクリートのヤング係数（一定値）、 $\Delta\sigma(t_k)$  は材令  $t_k$  における作用応力増分、 $\Delta\sigma_c(t_{k+1}, t_k)$  は材令  $t_k$  から  $t_{k+1}$  までの変化応力増分、 $\phi(t_{r+1}, t_k)$  は材令  $t_k$  から  $t_{r+1}$  までのクリープ係数である。また  $E_r$  は次式の材令  $t_r$  から  $t_{r+1}$  の換算ヤング係数である。

$$E_r = \frac{E_c}{1 + \frac{1}{2} \phi(t_{r+1}, t_r)} \quad (2)$$

$r = 1$  の場合は、上式の  $\Sigma$  の項が略され、一括計算する場合のクリープ構成則となる。

以降において、式(1)の右辺第一項のクリープ係数の差を次式で表す。

$$\psi(t_{r+1}, t_r, t_k) = \phi(t_{r+1}, t_k) - \phi(t_r, t_k)$$

$\Delta$  記号は増分を表すが、簡易化のため混乱のないものについては、増分記号を略することとする。

\*1 山口大学講師 工学部社会建設工学科, 工博 (正会員)

\*2 山口大学教授 工学部社会建設工学科, Ph.D (正会員)

### 3. 有限要素解析

#### 3.1 クリープひずみ場

図1のようにコンクリート床版とPC桁からなる合成桁要素を考え、これらは要素内で弾性ジベルによって結合されているとする。要素内の座標を図のように採り、z軸を要素参照軸とする。コンクリート床版と桁はそれぞれは要素とし、節点の変位として図のように床版と桁の結合点*i*, *j*における軸方向変位、たわみおよびたわみ角を考える。ただし、床版と桁は平面保持の仮定が成り立つとし、たわみとたわみ角はともに一致させる。床版、桁各要素の中立軸の変位は、既往の軸方向に関してはzの1次関数、たわみに関してはzの3次関数に仮定する。

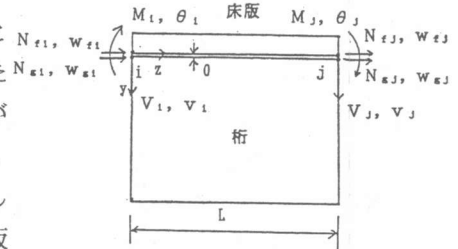
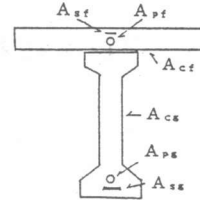


図1 PC合成桁要素

まず床版フランジに対して、材令 $t_r$ から $t_{r+1}$ までのクリープ軸ひずみ増分 $\varepsilon_f$ は、次式のようにになる。

$$\varepsilon_f = [B_f] \{u(t_{r+1}, t_r)\} \quad (3)$$

ここに、 $\{u(t_{r+1}, t_r)\}$ ,  $[B_f]$  はそれぞれクリープ節点変位増分ベクトルと参照軸に関するはりのひずみマトリクスであり、次のように表される。

$$\{u(t_{r+1}, t_r)\} = \{w_{fi} \ w_{gi} \ v_i \ \theta_i \ w_{gj} \ w_{oj} \ v_j \ \theta_j\}^T$$

$$[B_f] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & -6\left(y - \frac{Q_f}{A_f}\right)\left(-\frac{1}{l^2} + 2\frac{z}{l^3}\right) & \left\{-\left(y - \frac{Q_f}{A_f}\right)\left(-4\frac{1}{l} + 6\frac{z}{l^2}\right) + \frac{Q_f}{A_f} \frac{1}{l}\right\} \\ \frac{1}{l} & 0 & 6\left(y - \frac{Q_f}{A_f}\right)\left(-\frac{1}{l^2} + 2\frac{z}{l^3}\right) & \left\{-\left(y - \frac{Q_f}{A_f}\right)\left(-2\frac{1}{l} + 6\frac{z}{l^2}\right) - \frac{Q_f}{A_f} \frac{1}{l}\right\} \end{bmatrix}$$

ただし、 $Q_f, A_f$  は床版のコンクリート、鉄筋、PC鋼棒の剛性を考慮した参照軸に関する断面一次モーメントと断面積で、次式で表される。

$$Q_f = E_{rf} \int_{A_{cf}} y dA + E_s A_{sf} y_{sf} + E_p A_{pf} y_{pf} \quad (4)$$

$$A_f = E_{rf} A_{cf} + E_s A_{sf} + E_p A_{pf}$$

ここに、 $E_{rf}, E_s, E_p$  はそれぞれ床版コンクリートの換算ヤング係数、鉄筋のヤング係数、PC鋼棒のヤング係数、 $A_{cf}, A_{sf}, A_{pf}$  は床版コンクリート、鉄筋、PC鋼棒の断面積、 $y_{sf}, y_{pf}$  は床版内の鉄筋およびPC鋼棒のy座標である。

式(1)と(3)を等置すれば、材令 $t_r$ から $t_{r+1}$ までのクリープひずみ増分と節点変位増分の関係が次の如く得られる。

$$\sum_{k=1}^{r-1} \frac{\{\Delta\sigma_f(t_k) + \sigma_{cf}(t_{k+1}, t_k)\}}{E_{cf}} \psi_f(t_{r+1}, t_r, t_k) \quad (5)$$

$$+ \frac{\Delta\sigma_f(t_r)}{E_{cf}} \phi_f(t_{r+1}, t_r) + \frac{\sigma_{cf}(t_{r+1}, t_r)}{E_{rf}} = [B_f] \{u(t_{r+1}, t_r)\}$$

ただし、式(5)の各文字について添字 f は床版フランジを表すものである。  
よって床版コンクリートの材令  $t_r$  から  $t_{r+1}$  までの応力増分は次式となる。

$$\sigma_{cf}(t_{r+1}, t_r) = E_{rf} [B_f] \{u(t_{r+1}, t_r)\} \quad (6)$$

$$-\frac{E_{rf}}{E_{cf}} \left[ \Delta\sigma_f(t_r) \phi_f(t_{r+1}, t_r) + \sum_{k=1}^{r-1} \{\Delta\sigma_f(t_k) + \sigma_{cf}(t_{k+1}, t_k)\} \psi_f(t_{r+1}, t_r, t_k) \right]$$

一方、床版内の鉄筋および PC 鋼棒の節点変位増分による軸ひずみは次式で表される。

$$\epsilon_{sf} = [B_f(y=y_{sf})] \{u(t_{r+1}, t_r)\} \quad (7)$$

$$\epsilon_{pf} = [B_f(y=y_{pf})] \{u(t_{r+1}, t_r)\} \quad (8)$$

式(7), (8)に対応する鉄筋応力増分および PC 鋼棒の応力増分は Hooke の法則からそれぞれ次式で表される。

$$\sigma_{sf} = E_s \epsilon_{sf} = E_s [B_f(y=y_{sf})] \{u(t_{r+1}, t_r)\} \quad (9)$$

$$\sigma_{pf} = E_p \epsilon_{pf} = E_p [B_f(y=y_{pf})] \{u(t_{r+1}, t_r)\} \quad (10)$$

なお、PC 鋼棒に導入されるプレストレス力は、通常の有限要素法で扱われる初期力として弾性解析で考慮する。

次に、材令  $t_r$  から  $t_{r+1}$  までの桁に関するクリープひずみに関しても先の床版フランジと全く同様にして求めることが出来、ひずみマトリクスにおいて  $w_s$  との対応を考慮し第1と2及び第5と6項を入れ替え、その後式(3)から(10)に関して添字 f を g (桁を表す) とすれば良い。

桁とコンクリート床版を結合するずれ止めに作用するせん断合力増分 Q は、ずれ止めの単位長さあたりのせん断ばね剛性を  $k_z$  とすれば次式で表される。ずれを許さない剛合成の場合には、ばね剛性を無限大にすればよい。

$$Q = \int_0^l k_z (w_f(y=0) - w_g(y=0)) dz \quad (11)$$

### 3. 2 仮想仕事の原理による剛性方程式の誘導

#### 3. 2. 1 内力の仮想仕事

クリープによる内力のなす仮想仕事は床版、桁およびずれ止めに分けて扱うことが出来る。

$$\text{床版の仮想仕事は} \quad \delta U_f = \int_{V_f} (\sigma_{cf} + \sigma_{sf} + \sigma_{pf}) \delta \epsilon_f dV_f \quad (12)$$

式(12)に式(6), (9), (10)を代入して整理すれば

$$\begin{aligned} \delta U_f &= \{\delta u\}^T \{ [K_{rf}] + [K_{sf}] + [K_{pf}] \} \{u(t_{r+1}, t_r)\} - [G_{rf}] \\ &= \{\delta u\}^T \{ [K_f] \} \{u(t_{r+1}, t_r)\} - [G_{rf}] \end{aligned} \quad (13)$$

ここに、 $[K_{rf}] = E_{rf} \int_0^l \int_{Ac} [B_f]^T [B_f] dAc dz$

$$[K_{sf}] = E_s A_{sf} \int_0^l [B_f(y=y_{sf})]^T [B_f(y=y_{sf})] dz$$

$$[K_{pf}] = E_p A_{pf} \int_0^l [B_f(y=y_{pf})]^T [B_f(y=y_{pf})] dz$$

$$\begin{aligned} [G_{rf}] &= \frac{E_{rf}}{E_{cf}} \left\{ \phi_f(t_{r+1}, t_r) \int_{V_{cf}} [B_f]^T \Delta\sigma(t_r) dV \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{r-1} \psi(t_{r+1}, t_r, t_k) \int_{V_{cf}} [B_f]^T \{ \Delta\sigma_f(t_k) + \sigma_{cf}(t_{k+1}, t_k) \} dV \right\} \end{aligned}$$

ただし、 $V_{cf}$ は床版要素のコンクリート体積。

この $[G_{rf}]$ がクリーブ解析のクリーブ荷重項となる。

同様に、桁の仮想仕事も床版と同様にして求められる。

ずれ止めの仮想仕事は

$$\begin{aligned} \delta U_{fs} &= \int_0^l k_z \cdot (w_f(y=0) - w_g(y=0)) \delta (w_f(y=0) - w_g(y=0)) dz \\ &= \{\delta u\}^T [K_{fs}] \{u(t_{r+1}, t_r)\} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{ここに, } [K_{fs}] = \int_0^l k_z [B_{fs}]^T [B_{fs}] dz$$

$$\text{ただし, } [B_{fs}] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{z}{l} & -\left(1 - \frac{z}{l}\right) & -6d_{fg} \left(-\frac{z}{l^2} + \frac{z^2}{l^3}\right) & 3d_{fg} \left(\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2}\right) \\ \frac{z}{l} & -\frac{z}{l} & 6d_{fg} \left(-\frac{z}{l^2} + \frac{z^2}{l^3}\right) & 3d_{fg} \left(\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2}\right) \end{bmatrix}$$

$d_{fg}$  ( $=Q_g/A_g - Q_f/A_f$ ) は床版と桁の中立軸間の距離を表す。

式(12)～(14)をまとめると不完全合成桁の内力の仮想仕事は次式である。

$$\begin{aligned} \delta U &= \{\delta u\}^T [([K_f] + [K_g] + [K_{fs}]) \{u(t_{r+1}, t_r)\} - [G_{rf}] - [G_{rg}]] \\ &= \{\delta u\}^T [[K] \{u(t_{r+1}, t_r)\} - [G_{rf}] - [G_{rg}]] \end{aligned}$$

### 3. 2. 2 外力の仮想仕事

材令 $t_r$ で作用する節点力を、図1のようにすれば、節点力による仮想仕事は次のように表される。

$$\delta W = \{\delta u\}^T \{F_r\}$$

$$\text{ここに, } \{F_r\} = \{N_{fi}, N_{gi}, V_i, M_i, N_{fj}, N_{gj}, V_j, M_j\}^T$$

### 3. 2. 3 つりあい式

仮想仕事の原理から、 $\delta U = \delta W$ が成り立つ。

したがって、式(13)と(14)から材令 $t_r$ から $t_{r+1}$ におけるPC合成桁の剛性方程式が次のように導かれ、これより弾性計算およびクリーブ計算を行い全変位増分が得られる。

$$[K] \{u(t_{r+1}, t_r)\} = \{F_r\} + \{G_{rf}\} + \{G_{rg}\} \quad (15)$$

## 4. 計算例

図2に示す断面を有する支間20mの合成単純桁を対象としてクリーブ解析を行う。クリーブ係数として遅れ弾性成分とフロー成分からなる次の指数関数式を用いた。

$$\begin{aligned} \phi(t_{k+1}, t_k) &= \phi_d(t_{k+1}, t_k) + \phi_{fi}(t) \\ &= \phi_{dn} \{1 - \exp(-k_1(t_{k+1} - t_k))\} \\ &\quad + \phi_{fn} \{ \exp(-k_2 t_k) - \exp(-k_2 t_{k+1}) \} \end{aligned}$$

第1項が遅れ弾性成分、第2項がフロー成分である。

式中の $\phi_{dn}$ 、 $\phi_{fn}$ 、 $k_1$ 、 $k_2$ は材料係数で、ここでは床版コンクリートに対し $\phi_{dn}=0.4$ 、 $\phi_{fn}=4.0$ 、 $k_1=0.02$ 、 $k_2=0.01$ 、桁コンクリートに対し $\phi_{dn}=0.4$ 、 $\phi_{fn}=2.0$ 、 $k_1=0.02$ 、 $k_2=0.0067$ とした。

床版と桁のコンクリートのヤング係数はそれぞれ $3.0 \times 10^5$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $3.5 \times 10^5$  kgf/cm<sup>2</sup>である。また鉄筋とP C鋼棒のヤング率はそれぞれ $2.1 \times 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>,  $2.0 \times 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>とする。

先ず外荷重として自重のみ考え、2.25tf/mの自重を材令 $t_1=7$ 日で載荷し、材令 $t_{r+1}=1000$ 日におけるクリープ変化量を算定する。結合方式は剛結合の場合と弾性結合の場合を考える。ずれ止め剛性としては1000kgf/cm/cmを想定した。

表1に支間中央のたわみおよび応力を示す。この計算ではクリープ挙動に対する床版と桁のクリープ係数の差および鉄筋の拘束の影響を評価することになる。表より弾性結

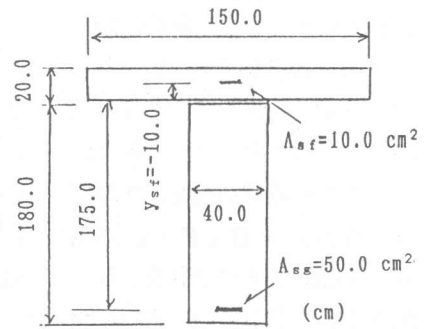


図2 計算対象合成桁

表1 自重による変位と応力

結合方式	たわみ ( $\times 10^{-1}$ cm)		支間中央断面 応力 (kgf/cm <sup>2</sup> )			
			床版上縁	床版下縁	桁上縁	桁下縁
剛結合	弾性	3.57	22.2	17.0	19.9	-33.9
	クリープ	8.57	-9.1	-6.2	6.5	4.2
弾性結合	弾性	5.16	14.5	7.0	35.8	-41.7
	クリープ	8.46	-0.9	5.1	-10.7	13.3

表2 自重とプレストレスによる変位と応力

結合方式	たわみ ( $\times 10^{-1}$ cm)		支間中央断面 応力 (kgf/cm <sup>2</sup> )			
			床版上縁	床版下縁	桁上縁	桁下縁
剛結合	弾性	-3.33	10.1	12.4	14.5	38.9
	クリープ	-4.45	-1.9	-4.3	5.1	-10.6
弾性結合	弾性	-3.39	-0.3	2.2	13.1	39.4
	クリープ	-5.36	3.6	1.5	0.3	-8.6

合の場合、剛結合に比べ弾性たわみは大きいですが、クリープによる付加たわみは若干小さくなっている。また床版および桁の応力に関し、剛結合では桁上縁、弾性結合では床版下縁を除き他はいずれもクリープ応力と弾性応力は異符号であり、応力緩和が生じている。弾性応力とクリープ応力の和が自重による長期的応力であるが、その値は剛結合と弾性結合で結果的にほぼ等しいことが解る。

次に自重に加え、 $y_{pg}=170.0$ cmで直線配置されたP C鋼材により204tfのプレストレスを導入した場合の材令1000日における変化量を表2に示す。プレストレスを与えると弾性結合の場合がクリープたわみが大きくなる。しかしこの場合、プレストレスが床版に伝達されず全応力も剛結合のほぼ半分である。

次に、多段階施工を想定し、第1ステップとして桁に自重(18.0 tf/m)と先のプレストレス ( $A_p \sigma_s = 40.0 \text{ cm}^2$ ) を材令7日で与え、第2ステップで材令14日に床版自重(7.5 tf/m)を載荷したときの材令1000日の変化量を表3に示す。表3(a)は桁のみの挙動を示し、載荷後7日ではほとんどクリープ挙動は現れていない。本計算で表3(b)から解るように床版自重に対しては結合方式の差異はみられず、材令1000日の桁の最終特性(変位・応力)は合計すると第2例題とほぼ同じとなった。

表3(a) 第1ステップの桁の変位と応力  
(腹版のみ) 14日~14日

たわみ ( $\times 10^{-1} \text{ cm}$ )		支間中央断面 応力 ( $\text{kgf/cm}^2$ )			
		床版上縁	床版下縁	桁上縁	桁下縁
弾性	-5.40	—	—	-1.7	54.0
クリープ°	-0.61	—	—	0.5	-1.0

表3(b) 第2ステップの変位と応力  
(合成桁) 14日~1000日

結合方式	たわみ ( $\times 10^{-1} \text{ cm}$ )		支間中央断面 応力 ( $\text{kgf/cm}^2$ )			
			床版上縁	床版下縁	桁上縁	桁下縁
剛結合	弾性	2.07	16.8	13.9	16.2	-15.0
	クリープ°	-4.14	-3.6	-4.9	4.2	-8.9
弾性結合	弾性	2.07	16.9	13.9	16.3	-15.1
	クリープ°	-4.11	-3.7	-4.9	4.2	-8.8

## 5. まとめ

クリープに関し経時的にコンクリート特性の変化するPC合成桁において、床版と桁を別々の要素と考え、これをずれ止めによって結合するモデルを考案し、クリープ解析の有限要素定式化を行い、いくつかの計算例を示した。本計算法は結合方法の差異を考慮し、床版と桁という異なる要素で構成される合成桁を、弾性・クリープ解析を同一の手法で扱える点が特徴である。示した計算例からクリープにより応力緩和が生じ設計上有利となると思われる。しかし、計算例に用いた単純桁ではその桁応力は、剛結合と弾性結合で総合的にほぼ等しくなる。

今後、連続桁での検証および実証例との検討を行う予定である。

## 参考文献

- 1) Ghali, A. and Elbadry, M. M.: Serviceability Design of Continuous Prestressed Concrete Structures, PCI Journal, Vol.34, No.1, pp.54-89, Jan. 1989
- 2) 小宮正久・酒井 一・前田晴人, PC合成桁のクリープ解析, プレストレストコンクリート, Vol.32, No.2, pp.63-73, Mar. 1990
- 3) 高海克彦・浜田純夫, 不完全合成桁のクリープ解析, 構造工学論文集(投稿中), 1993