

論文 カルマンフィルターによる外部拘束係数の同定

安藤直樹^{*1}・石川靖晃^{*2}・菊川浩治^{*3}

要旨:C.P. 法による温度応力算定式を拡張カルマンフィルター理論に導入し、外部拘束係数 (R_N, R_M) を推定するための定式化を行った。さらに、ある構造物の実測データからその外部拘束係数の推定を試みた。その結果、平面保持の仮定が成り立つ範囲であれば、精度良く外部拘束係数が推定できることがわかった。

キーワード:カルマンフィルター、外部拘束係数、C.P. 法

1. はじめに

C.P. 法は温度応力を簡便に算定する最も有用な方法の一つである [1]。C.P. 法の重要な特徴として、外部拘束係数といったパラメーターを用いることが挙げられる。これらのパラメーターは構造物の設計を行う際、非常に重要な位置を占めており、これらのパラメーターを精度よく同定することが極めて重要となる。同定の方法としては、有限要素法による内・外部拘束応力の分離による同定、C.P. 法による感度解析による同定などがある [2]。

本研究では初の試みとして C.P. 法による温度応力算定式を拡張カルマンフィルター理論 [3] に導入し、定式化を行うと同時に、ある構造物の実測データからその外部拘束係数の推定を行った。

2. 拡張カルマンフィルター／C.P. 法に基づく外部拘束係数の同定方法

2.1 拡張カルマンフィルターアルゴリズム [3]

拡張カルマンフィルターの支配方程式およびアルゴリズムを簡単に述べる。非線形システムにおいて状態方程式と観測方程式は非線形で以下のように表される。

$$x(k+1) = f_k\{x(k)\} + \Gamma(k)w_k, \quad y_k = h_k\{x(k)\} + v_k \quad (1)$$

ここで、 $x(k)$ は状態ベクトル、 $\Gamma(k)$ はシステムノイズ係数マトリクス、 w_k はシステムノイズ、 y_k は観測ベクトル、 v_k は観測ノイズベクトルである。

離散時間カルマンフィルターを考えると状態方程式、観測方程式の離散表示は次式となる。

$$x(k+1) = \Phi(k+1/k)x(k) + \Gamma(k+1)w_{k+1}, \quad y_{k+1} = M(k+1)x(k+1) + v_k \quad (2)$$

ここで、 $\Phi(k+1/k)$ 、 $M(k)$ は次式で定義される行列である。

$$\Phi(k+1/k) = \frac{\partial f_{ki}}{\partial x_{kj}} \text{ at } x = \hat{x}(k/k), \quad M(k) = \frac{\partial h_{ki}}{\partial x_{kj}} \text{ at } x = \hat{x}(k/k) \quad (3)$$

$\Phi(k+1/k)$ 、 $M(k)$ はそれぞれ状態遷移マトリクス、観測マトリクスと呼ばれる。

また、システムノイズおよび観測ノイズの平均値と共に分散行列は既知であるものとし、次式で与えられるガウス性ホワイトノイズであると仮定する。

$$E[w_k] = 0, \quad E[v_k] = 0, \quad E[w_k w_\ell^T] = Q \delta_{k\ell}, \quad E[v_k v_\ell^T] = R \delta_{k\ell} \quad (4)$$

^{*1} 名古屋大学学生 工学部土木工学科（正会員）

^{*2} 名城大学助手 理工学部土木工学科、工修（正会員）

^{*3} 名城大学教授 理工学部土木工学科、工博（正会員）

ただし、 δ_{kl} はクロネッカーのデルタである。

状態方程式と観測方程式に対する拡張カルマンフィルターのアルゴリズムは以下のように与えられる。

1. 初期設定: $\hat{x}(k/k)$, $P(k/k)$ 、2. 状態ベクトルの推定値の計算 $\hat{x}(k+1/k) = \Phi(k+1/k)\hat{x}(k/k)$
3. 推定誤差共分散マトリクスの計算

$$P(k+1/k) = \Phi(k+1/k)P(k/k)\Phi^T(k+1/k) + \Gamma(k+1)Q(k+1)\Gamma^T(k+1)$$

4. カルマンゲインの計算

$$K(k+1) = P(k+1/k)M^T(k+1)[M(k+1)P(k+1/k)M^T(k+1) + R(k+1)]^{-1}$$

5. 観測値の取り入れ

$$\hat{x}(k+1/k+1) = \hat{x}(k+1/k) + K(k+1)[y_{k+1} - h_i(\hat{x}(k+1/k))]$$

6. 推定誤差共分散マトリクスの計算

$$P(k+1/k+1) = [I - K(k+1)M(k+1)]P(k+1/k)[I - K(k+1)M(k+1)]^T + K(k+1)R(k+1)K^T(k+1)$$

7. $k = k+1$ として 1. に戻る

すなわち、先駆情報として雑音の共分散行列 Q 、 R を与える、初期値として状態ベクトル x_0 と推定誤差の共分散行列 P_0 を与えれば、観測量を逐次取り込むことによって状態ベクトルの最適推定値がタイムステップごとに求まる。

さらに同定結果 x と P とを初期値 x_0 、 P_0 と置き、再び拡張カルマンフィルターにより同定を行う。初期値 x_0 と同定結果 x がほぼ等しく収束するまでこのグローバルなイタレーションを行う。この収束した値を最適推定値とみなす。この方法は EK-WGI 法と呼ばれる。

2.2 C.P. 法に基づく外部拘束係数の同定

本研究では図-1 に示すようなスラブ部分および壁部分をもつ構造物モデルに対して定式化を行った。同定すべき状態量としては R_M 、 R_N コンクリートの弾性係数などが考えられる。ここではコンクリートの弾性係数はスラブ部分と壁部分では異なるとし、以下のように仮定した。

$$E_s = \frac{b_1 t}{a_1 + t}, \quad E_w = \frac{b_2 t}{a_2 + t} \quad (5)$$

ここで E_s 、 E_w はそれぞれスラブ部分、壁部分での弾性係数、 t は材令である。ゆえに同定される状態量は $x(k) = \left\{ R_N \quad R_M \quad a_1 \quad b_1 \quad a_2 \quad b_2 \right\}^T$ となる。

この場合、状態量は時間に依らないから状態方程式は

$$x(k+1) = x(k) + \Gamma(k+1)w_{k+1} \quad (6)$$

観測ベクトルが応力だとすれば、C.P. 法により観測方程式は、壁部分では

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= h_1(R_N, R_M, a_1, b_1, a_2, b_2) = E_w \{ \alpha \Delta T(x, y) - \Delta\bar{\varepsilon} - \Delta\phi(y - Y_G) \} \\ &\quad + R_N \Delta\bar{\varepsilon} E_w + R_M \Delta\phi E_w (y - Y_G) + v_k \end{aligned} \quad (7)$$

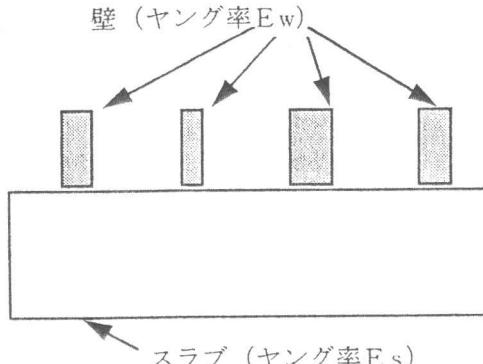


図-1 スラブおよび壁をもつ構造物

スラブ部分では

$$\begin{aligned}\Delta\sigma = h_2(R_N, R_M, a_1, b_1, a_2, b_2) &= E_s \{\alpha\Delta T(x, y) - \Delta\bar{\varepsilon} - \Delta\phi(y - Y_G)\} \\ &\quad + R_N \Delta\bar{\varepsilon} E_s + R_M \Delta\phi E_s (y - Y_G) + v_k\end{aligned}\quad (8)$$

となる[1]。

ただし、

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\varepsilon} &= \frac{E_s \int_{A_s} \alpha\Delta T(x, y) dA + E_w \int_{A_w} \alpha\Delta T(x, y) dA}{E_s A_s + E_w A_w} \\ \Delta\phi &= \frac{E_s \int_{A_s} (\alpha\Delta T(x, y) - \Delta\bar{\varepsilon})(y - Y_G) dA + E_w \int_{A_w} (\alpha\Delta T(x, y) - \Delta\bar{\varepsilon})(y - Y_G) dA}{E_s \int_{A_s} (y - Y_G)^2 dA + E_w \int_{A_w} (y - Y_G)^2 dA} \\ Y_G &= \frac{E_s A_s y_{gs} + E_w A_w y_{gw}}{E_s A_s + E_w A_w}\end{aligned}$$

以上の場合、状態遷移マトリクスおよび観測マトリクスは次式で表される。

$$\Phi(k+1/k) = I, M_{ij} = \left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right]_{x(k)=\hat{x}(k/k-1)} \quad (9)$$

3. 数値解析例

3.1 概説

解析対象として図-2に示す既存のケーソン底版を考えた。このケーソン底版ではA,B,C,DおよびE点で温度および温度応力がそれぞれ厚さ方向3箇所で測定されている。A点のみの温度応力の実測結果を図-3に示す。

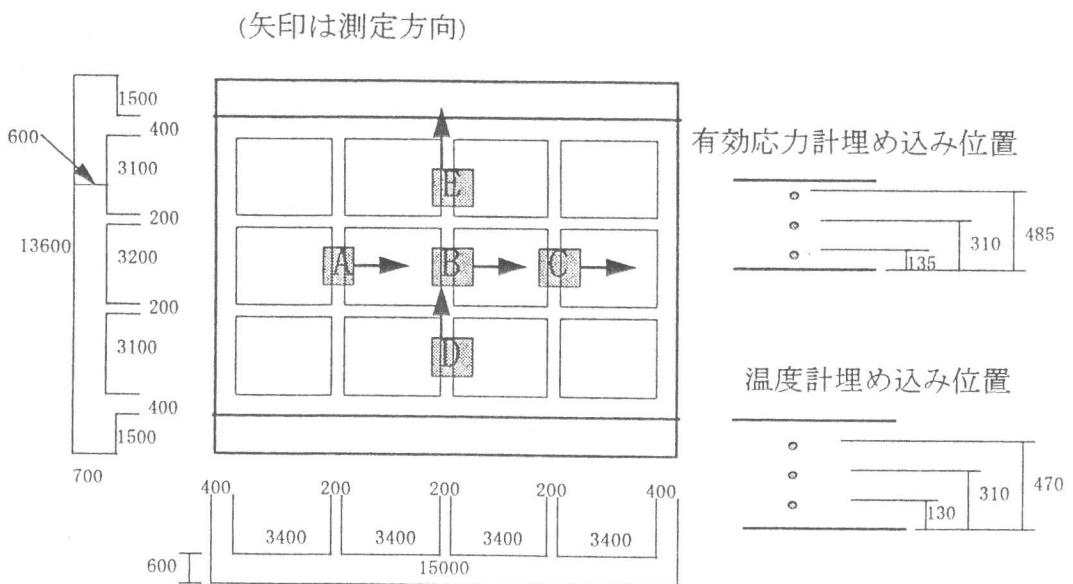


図-2 解析対象ケーソン底版および計測点

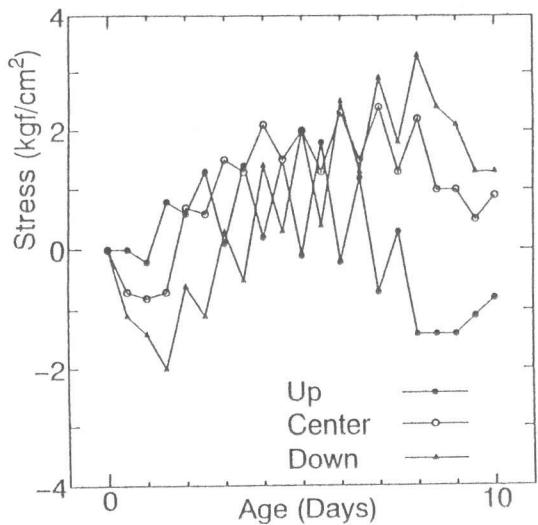


図-3 温度応力実測結果 (A点)

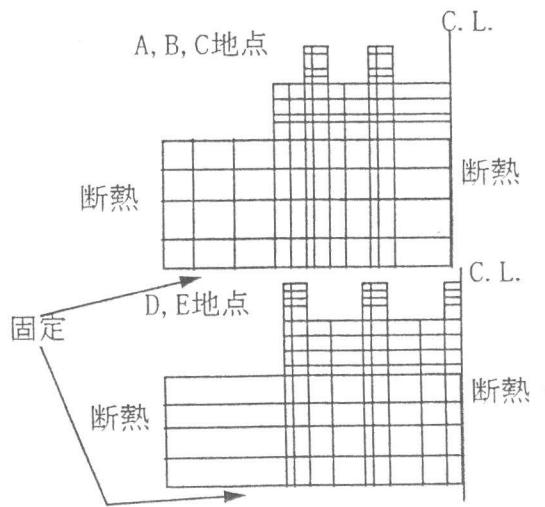


図-4 温度解析モデル

3.2 温度解析

F.E.M.による2次元非定常温度解析を行い、構造物内の温度分布及び経時変化を算定した。解析モデルは図-4に示すとおりである。解析に用いた熱特性値を表-1に示す。A点における温度履歴を図-5に示す。

表-1 温度解析に用いた熱特性値

熱特性値	単位	コンクリート	地盤
断熱温度 Q_∞	°C	44.0	-
上昇式 r		0.95	-
比熱	kcal/(kg°C)	0.20	0.19
熱伝導率	kcal/(mh°C)	2.5	3.0
熱伝達率	kcal/(m²h°C)	10.0	30.0
密度	kg/m³	2400	2600
打ち込み温度および固定温度 = 15°C			
外気温 = 実測値			

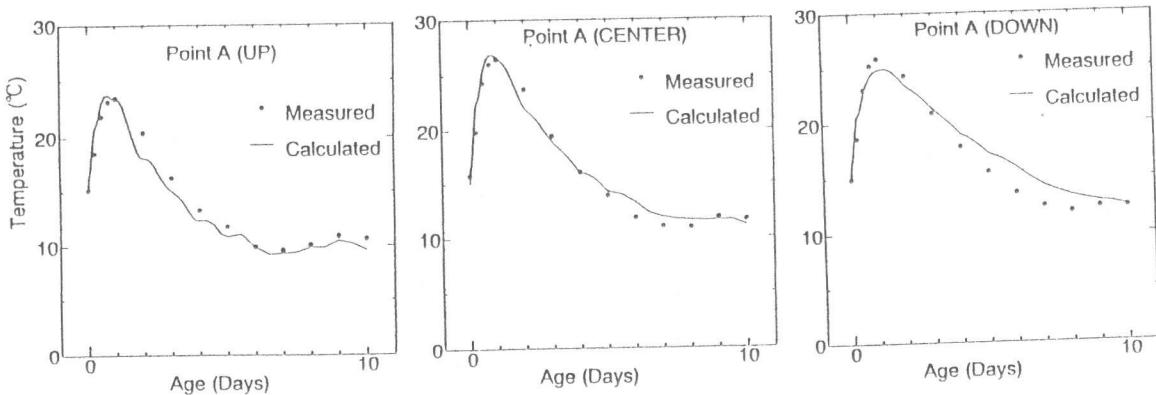


図-5 温度履歴 (A点)

3.3 カルマンフィルター解析条件

有効弾性係数は実測の静弾性係数からの回帰式に対し、土木学会のコンクリート示方書に示されるクリープによる低減率を乗じることにより次式で表される。

$$E_e = \frac{(t - 0.2) \times 10000}{0.134 + 0.0300 \times (t - 0.2)} \quad (10)$$

したがって、 $a_1 = a_2 = 4.467$ ， $b_1 = b_2 = 3.333 \times 10^5$ である。また、コンクリートの線膨張係数は実測から 8.5×10^{-6} ($1/^\circ C$) とした。

これらの弾性係数に関するパラメーターすなわち a_1 、 a_2 、 b_1 および b_2 はつねに一定であると仮定する。すなわち、推定すべき状態量は R_N および R_M のみと仮定する。

R_M は、一般的には温度ピーク前と後で異なる値として扱われる。本研究では、簡単のため、各計測地点での実測期間全ての応力履歴をまとめて拡張カルマンフィルター内に入力する。そのため、各実測地点において同定される R_M は実測期間全てを通じてただ一つである。

3.4 本解析手法の妥当性

実構造物の実測値に対して、本手法を適用する前に、本解析手法の妥当性を調べる意味で、 R_N および R_M を与えて、先の温度分布から、C.P. 法により仮の温度応力を算定し、その温度応力を仮の観測データとして与え、本提案手法を用いて逆に R_N および R_M を同定し、先に与えた値と一致するか否かを検証した。即ち $R_N = 0.1$ 、 $R_M = 1.0$ が正解値である。同定結果を図-6 に示す。 $R_N = 0.09997$ 、 $R_M = 1.0000$ と非常に精度良く推定されていることが分かる。ここで与えた温度応力の観測データは C.P. 法による理論式に基づいており、ひずみの直線性を完全に満足している。逆に言えば、ひずみの直線性が保証されるならば、外部拘束係数は精度良く推定されると思われる。

3.5 外部拘束係数の同定結果

次に、実際の温度応力の実測データを用いて本解析手法によって外部拘束係数の同定を行った。

まず、3箇所観測データ全てを用いて解析を行った。ただし、今回の実測値は非常に小さく、測定されたひずみは最大 60μ 程度であることに注意されたい。状態量とグローバルなくり返し回数との関係を図-7 に示す。

推定された結果から R_N はほぼ $0.08 \sim 0.16$ である。しかし R_M は全く非現実的な値となっている。そこで R_N を推定された値に固定し、観測データを Up 地点 1 箇所のみで R_M の推定を行った。状態量とグローバルなくり返し回数との関係を図-8 に示す。その結果、 R_M は $0.22 \sim 0.57$ の間で推定された。 R_N に関しては各点ともばらつきが小さく比較的良く推定されていると思われる。しかしながら R_M に関しては各点ごとのばらつきは非常に多く良く推定されているとは言い難い。3.4 でも述べたが、C.P. 法は部材内のひずみの直線性を仮定しており、その仮定が成立する範囲であれば、結果にそれほどばらつきは生じないものと考えられる。しかしながら今回用いた応力の実測結果は

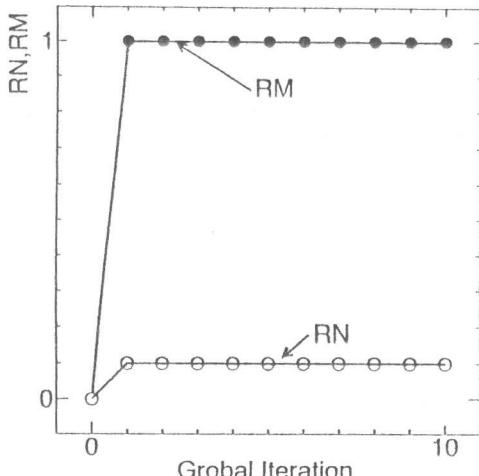


図-6 状態量—くり返し回数関係

値のオーダーが非常に小さく、計測の際の様々な誤差が実測値に対し、無視できない状態にあると思われる。そのため、ひずみの直線性が必ずしも保証されているわけではない。今後、より高い応力レベルでの実測値を用いた外部拘束係数の同定検証が必要である。

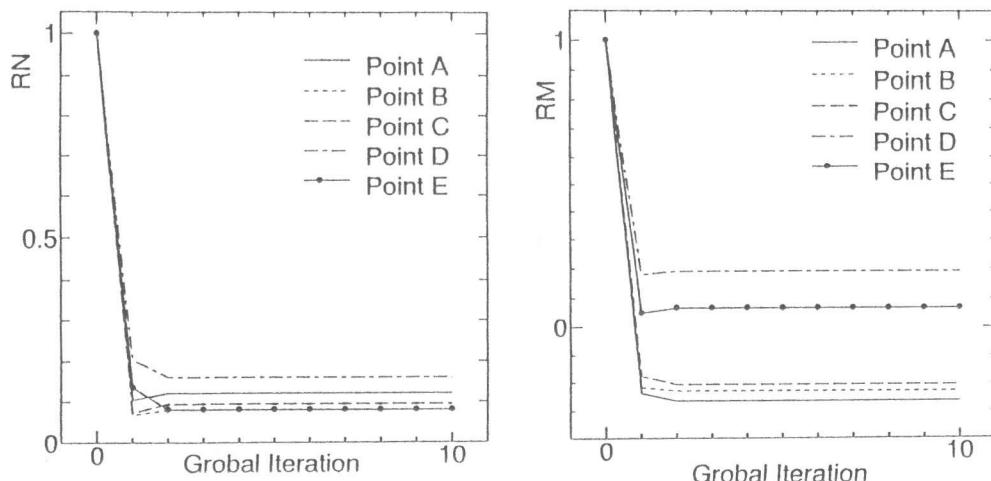


図-7 状態量—くり返し回数関係
(3箇所の観測データ)

4. 結論

以上より、本解析手法ではひずみの直線性が成り立つ範囲では精度良く外部拘束係数を推定し、ひずみの直線性が成り立たないレベルでは、特に R_M は精度良く推定できないことが確認された。しかし、ひずみ測定値が、より大きい場合には、当然予想精度は向上するものと考えられる。

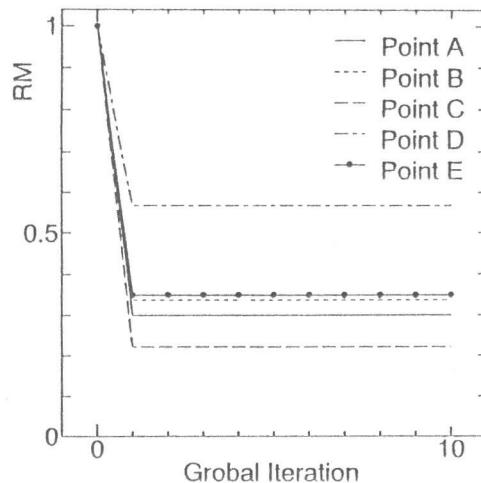


図-8 状態量—くり返し回数関係
(Up 地点 1 箇所のみ)

参考文献

- 1) 日本コンクリート工学協会、マスコンクリートの温度応力委員会：外部拘束係数の同定とそれに基づく温度応力計算方法の提案、JCI、1985
- 2) ケーソン底版部外部拘束係数検討調査（委託）報告書、運輸省第3港湾建設局神戸調査設計事務所、JCI、1994
- 3) 星谷勝、齊藤悦郎：拡張カルマンフィルターを用いた各種振動系への適用、土木学会論文報告集、第339号、pp. 59-67、1983