

論文 コンクリート系床構造のクリープ応力・変形解析

岩原昭次*1・小森清司*2・山下正吾*3

要旨：クリープと乾燥収縮を考慮した、合成断面部材を含むコンクリート系構造の弾性解析の定式化を行った。コンクリートのクリープ係数の表示は Trostによる方法を用いた。定式化は合成断面について行い、この部材での剛性方程式を誘導した。この定式化された諸関係式を通常の剛性法によるマトリックス骨組解析法に組み込むことにより、時間依存性の解析プログラムを作成した。本解析法を既往の実験資料を中心に適用・検証した結果、極めて有用性が高いことを示した。

キーワード：クリープ、乾燥収縮、合成断面、弾性、剛性方程式

1. はじめに

プレストレストコンクリート断面あるいは合成断面を有するコンクリート系構造等の諸構造に対して、コンクリートのクリープと乾燥収縮を考慮した解析法が数多く提案されている（例えば、文献1等）。これらの解析法の多くはDischingerの解法[2]に準じた方法であり、骨組の応力・変形解析とコンクリートのクリープと乾燥収縮とを明確に統一化した研究は、小宮等の研究[3]を除いて、我国ではあまり見られないようである。

本研究は、佐藤等の研究[4]等を参考にして、プレテンション形式の合成断面を考慮したコンクリート系構造部材の剛性方程式を誘導し、これにもとずいた有限要素法による弾性骨組解析を行い、いくつかの検討を行った。

2. プレストレスを考慮した合成断面の剛性方程式

2.1 記号

<p>E_c : コンクリートのヤング係数</p> <p>t, t_0 : コンクリートの任意時点材令と初期応力発生時のコンクリート材令 ($\leq t$)</p> <p>σ_0 : コンクリートの初期応力</p> <p>α : 材令係数 (一定値)</p> <p>$\Delta \epsilon_c(t), \Delta \sigma_c(t)$: クリープと乾燥収縮による $t_0 \sim t$ 間の経時歪増分, 経時応力増分 (初期歪及び初期応力を含まない)</p> <p>$\epsilon_{sh}(t)$: $t_0 \sim t$ 間の乾燥収縮歪増分</p> <p>断面 A, B : コンクリート A 部分の断面 (例えば、ハーフスラブの場所打ちコンクリート部分)、B</p>	<p>部分の断面 (同じく、ハーフスラブのプレキャストコンクリート部分)</p> <p>$A_{CA}, A_{CB}, A_{SA}, A_{SB}, A_P$: 断面 A, B の断面積, 断面 A, B の鉄筋断面積, PC鋼材の断面積</p> <p>I_A, I_B, I_S, I_P : 断面 A, B, 鉄筋及びPC鋼材の重心軸に関する断面2次モーメント</p> <p>h_g : 断面の底面から重心軸までの距離 (但し、重心軸は合成断面に対するものとする)</p> <p>y_{SA}, y_{SB}, y_P : 重心軸から鉄筋, PC鋼材までの距離</p> <p>$\Delta M, \Delta N$: 重心軸位置に生じる曲げモーメン</p>
--	---

*1 熊本工業大学助教授 工学部建築学科、工博 (正会員)

*2 長崎大学教授 工学部構造工学科、工博 (正会員)

*3 (株) 富士ピー・エス建築事業部副長 (正会員)

トと軸力

E_A, E_B : 断面 A, B のコンクリートのヤング係数 (特に断らない場合は E_C と表記する)

E_S, E_P : 鉄筋とPC鋼材のヤング係数

$\varphi_{At}, \varphi_{Bt}$: 断面 A, B のクリープ係数 (特に断らない場合は φ_t と表記する)

$$\psi_t = 1/(1+x\varphi_t)$$

$\varepsilon_{shAt}, \varepsilon_{shBt}$: 断面 A, B の乾燥収縮歪 (特に断らない場合は ε_{sh} と表記する)

$\Delta\lambda, \Delta\varepsilon_g$: 曲率増分 (時計廻りを正(+)) と重心軸位置の歪増分

2.2 コンクリートのクリープと乾燥収縮歪の表示

コンクリート系構造の変形は、コンクリート固有のクリープや乾燥収縮の為に経時的に大きく進行する。また、特にその構造が不静定である場合には応力にも再配分が生じる。このような、経時的な応力・変形挙動を解析的に明らかにする為には、時間と共に進行するコンクリートの応力-歪関係を定義する必要がある。ここでは、Troostによる次の表示式 [6] を用いる。増分表示すると次のようになる。

$$\Delta\varepsilon_c(t) = \frac{1}{E_c} \left\{ \sigma_0 \varphi(t, t_0) + \Delta\sigma_c(t) [1 + x\varphi(t, t_0)] \right\} + \varepsilon_{sh}(t) \quad (1)$$

なお、ここでは、 $\varphi_t = \varphi(t, t_0)$ と表わすことにする。

いま、図1に示すような合成断面を考える。

2.3 応力増分の表示

①コンクリートの応力増分
$$\Delta\sigma_{Cyt} = \psi_t \left\{ E_C (\Delta\varepsilon_{Cyt} - \varepsilon_{sh}) - \sigma_{Cy0} \varphi_t \right\} \quad (2)$$

②鉄筋の応力増分
$$\Delta\sigma_{SA} = E_S (\Delta\lambda \cdot y_{SA} + \varepsilon_g) \quad (3, a)$$

$$\Delta\sigma_{SB} = E_S (\Delta\lambda \cdot y_{SB} + \varepsilon_g) \quad (3, b)$$

③PC鋼材の応力増分
$$\Delta\sigma_{Pt} = E_P (\Delta\lambda \cdot y_P + \varepsilon_g) \quad (4)$$

2.4 釣り合い式

重心軸位置に軸力 ΔN 及びモーメント ΔM が作用しているとする、それに対する断面の釣り合い式より次の形式の式が求まる。

$$\{\mu\} = [V] \left[\{\Delta f_I\} + \psi_A \varphi_{At} \{f_A\} + \psi_B \varphi_{Bt} \{f_B\} - \{F\} \right] \quad (5)$$

但し、

$$\{\mu\} = \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_g \\ \Delta\lambda \end{Bmatrix}, \quad \{\Delta f_I\} = \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}, \quad \{f_A\} = \begin{Bmatrix} N_{OA} \\ M_{OA} \end{Bmatrix}, \quad \{f_B\} = \begin{Bmatrix} N_{OB} \\ M_{OB} \end{Bmatrix}, \quad [V] = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_2 & G_3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$G_1 = \psi_A E_A A_{CA} + \psi_B E_B A_{CB} + E_S (A_{SA} + A_{SB}) + E_P A_P$$

$$G_2 = \psi_A E_A Q_A + \psi_B E_B Q_B + E_S Q_S + E_P Q_P$$

$$G_3 = \psi_A E_A I_A + \psi_B E_B I_B + E_S I_S + E_P I_P$$

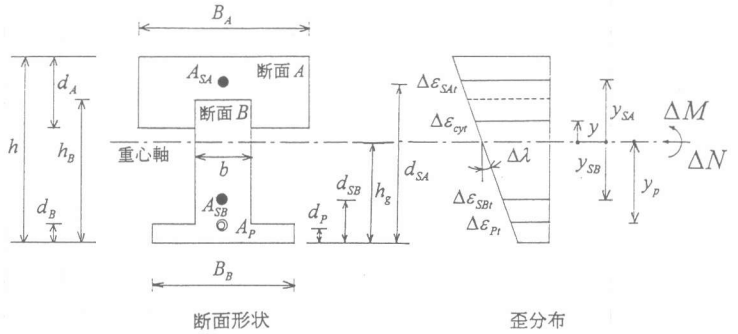


図1 解析対象とした合成断面形状

$$F_1 = -(\psi_A E_A \varepsilon_{shAt} A_{CA} + \psi_B E_B \varepsilon_{shBt} A_{CB}) \quad F_2 = -(\psi_A E_A \varepsilon_{shAt} Q_A + \psi_B E_B \varepsilon_{shBt} Q_B)$$

$$N_{OA} = \int_{A_{CA}} \sigma_{AyO} dA_{CA} \quad , \quad N_{OB} = \int_{A_{CB}} \sigma_{ByO} dA_{CB} \quad , \quad M_{OA} = \int_{A_{CA}} \sigma_{AyO} y dA_{CA} \quad , \quad M_{OB} = \int_{A_{CB}} \sigma_{ByO} y dA_{CB}$$

2. 5 材端力と材端変位

任意部材(部材長をL、その両材端をi, jとする)の曲げモーメント ΔM と軸力 ΔN は、中間荷重がない場合、両材端の材端モーメントを ΔM_i^* , ΔM_j^* とし、また、 $\Delta N = \Delta N^*$ とすると、次式となる。

$$\{\mu\} = [V][J][\Delta f_i^*] + \psi_A \varphi_{Ai} [J][f_A^*] + \psi_B \varphi_{Bj} [J][f_B^*] - \{F\} \quad (6)$$

但し、

$$\{\Delta f_i^*\} = \begin{Bmatrix} \Delta N^* \\ \Delta M_i^* \\ \Delta M_j^* \end{Bmatrix} \quad [J] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{x}{L} & -\frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad \{f_A^*\} = \begin{Bmatrix} N_{OA}^* \\ M_{OAi}^* \\ M_{OAj}^* \end{Bmatrix} \quad \{f_B^*\} = \begin{Bmatrix} N_{OB}^* \\ M_{OBi}^* \\ M_{OBj}^* \end{Bmatrix}$$

ここで、xは材端iからの距離、 M_{Oai} , M_{Oaj} 等は曲げモーメント M_{OA} に対応する材端i, jでの材端モーメントを表わす。また、軸力 N_{OA} 等は $N_{OA} = N_{OA}^*$ 等としている。

次に、軸方向変位 Δu (圧縮変位を正(+))とする)を $\Delta u = \int_0^L \Delta \varepsilon_g dx$ で、材端の回転角 $\Delta \theta_i^*$, $\Delta \theta_j^*$ をMohrの定理を用いて求めると次の結果を得る。

$$\{\Delta f_i^*\} = [B]\{\Delta d^*\} - \psi_A \varphi_{Ai} \{f_A^*\} - \psi_B \varphi_{Bj} \{f_B^*\} - \{f_F\} \quad (7)$$

但し、

$$\{\Delta d^*\} = \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta_i^* \\ \Delta \theta_j^* \end{Bmatrix} \quad , \quad \{f_F\} = \begin{Bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad , \quad [B] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & -G_2 \\ G_2 & 4G_3 - 3G_2^2/G_1 & 2G_3 - 3G_2^2/G_1 \\ -G_2 & 2G_3 - 3G_2^2/G_1 & 4G_3 - 3G_2^2/G_1 \end{bmatrix}$$

2. 6 部材剛性方程式

節点変位($\Delta u_i, \Delta v_i, \Delta \theta_i, \Delta u_j, \Delta v_j, \Delta \theta_j$)と節点力($\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta M_i, \Delta X_j, \Delta Y_j, \Delta M_j$)との間には次の関係が得られる。

$$\{\Delta f\} = [T]^T \{\Delta f_i^*\} = [T]^T [B][T]\{\Delta \delta\} - \psi_A \varphi_{Ai} [T]^T \{f_A^*\} - \psi_B \varphi_{Bj} [T]^T \{f_B^*\} - [T]^T \{f_F\}$$

$$= [K]\{\Delta \delta\} - \{f_i\} + \{f_j\} \quad (8)$$

但し、

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{\Delta f\} = [\Delta X_i \quad \Delta Y_i \quad \Delta M_i \quad \Delta X_j \quad \Delta Y_j \quad \Delta M_j]^T$$

$$\{\Delta \delta\} = [\Delta u_i \quad \Delta v_i \quad \Delta \theta_i \quad \Delta u_j \quad \Delta v_j \quad \Delta \theta_j]^T$$

2. 7 持続載荷時の任意時刻における応力・歪等の値

任意時刻における応力・歪等の値は、載荷等によって生じる初期値と、クリープと乾燥収縮による増分との和、即ち、 $N = N_0 + \Delta N$ 、 $M = M_0 + \Delta M$ 、 $\sigma_c(t) = \sigma_0 + \Delta\sigma_c$ 等でも求めることができる。

3. 既往の実験で用いられた試験体に対する適用例

ここでは、既往の実験で用いられた3種類のスラブを解析した。適用例1のスラブは持続載荷中にひびわれを生じなかったため、その経時たわみの実験結果を本解析結果と比較できる。適用例2と3のスラブは載荷時にはひびわれを生じなかったが持続載荷中にひびわれを発生しているため、実験結果と解析結果を比較することができない。ここでは主にクリープと乾燥収縮の影響について解析的に検討した。なお、3スラブとも実験室内に設置されており、外気の温湿度の影響を受けている。

〔適用例1〕 両端単純支持で10等分9点集中荷重を受ける場所打ちコンクリート一方向スラブ[7]の場合(図2)

実験諸元 荷重：集中荷重 $P = 46.7\text{kg}/1\text{点当り}$ 。スパン長：3m。断面：13cm×40cm。鉄筋：下端筋のみ2D-10。載荷日：コンクリート打設後35日後。ヤング係数： $E_c = 296\text{tf}/\text{cm}^2$

(コンクリート、材令28日)、 $E_s = 1820\text{tf}/\text{cm}^2$ (鉄筋)。終局時クリープ係数 φ_∞ と乾燥収縮歪 $\varepsilon_{sh\infty}$ ： $\varphi_\infty = 6.71$ 、 $\varepsilon_{sh\infty} = 7.31 \times 10^{-4}$ ($\phi 15 \times 30\text{cm}$ のテストピースを用い、試験体と同一環境条件下で載荷時を基準にした経過年約3年における値)。

主な実験結果 ①持続載荷中(約3年)ひび割れを生じなかった。②長期付加たわみ倍率は約3年で8.3となった。

解析及び同結果の考察 ①解析にあたって要素分割数は10とした。②終局時中央点のたわみはクリープ+乾燥収縮考慮の場合で $\delta_{c+s} = 6.76\text{mm}$ 、クリープのみ考慮の場合で $\delta_c = 4.63\text{mm}$ となった。但し、初期載荷時たわみは $\delta_0 = 0.65\text{mm}$ である。これより、長期付加たわみ倍率は乾燥収縮とクリープを考慮した場合9.4となる。したがって、長期付加たわみ倍率について本解析結果は実験値によく適合していると言える。また、たわみに対して乾燥収縮の影響も大きいことが分かる。③クリープのみ、あるいは乾燥収縮を考慮した場合の終局時の曲げモーメント分布は当然のことながら、初期載荷時のそれと同じとなった。

〔適用例2〕 両端固定で等分布荷重を受ける場所打ちコンクリート一方向スラブ[8](図3)

実験諸元 荷重：等分布荷重 $W = 0.168\text{tf}/\text{m}$ (自重+積載荷重、解析に当たっては9点集中荷重に置換)。

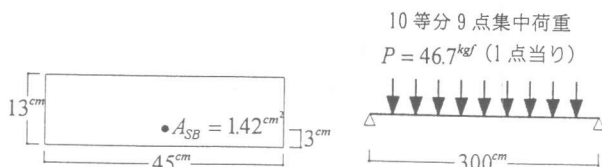


図2 単純支持一方向スラブ

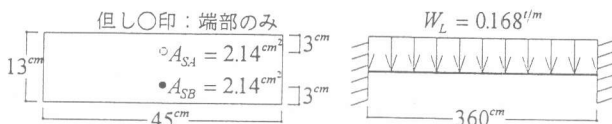


図3 両端固定一方向スラブ

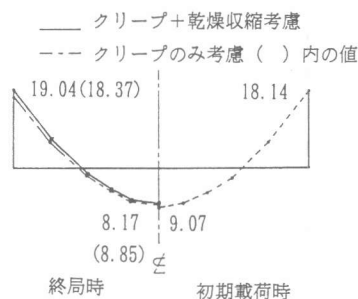


図4 曲げモーメント分布 (tf·cm)

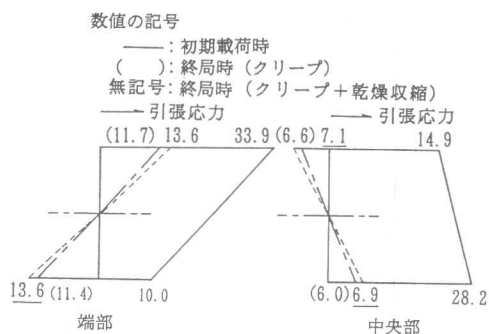


図5 端部と中央部の応力分布 (kgf/cm²)

スパン長：3.6m。断面：13cm×45cm。鉄筋：端部で下端筋・上端筋共2D-10、中央部で下端筋のみ2D-10。載荷日：コンクリート打設後30日後。ヤング係数： $E_c=232\text{tf/cm}^2$ （コンクリート、材令28日）、 $E_s=1850\text{tf/cm}^2$ （鉄筋）。終局時クリープ係数 ϕ_∞ と乾燥収縮歪 $\epsilon_{sh\infty}$ ： $\phi_\infty=5.00$ 、 $\epsilon_{sh\infty}=5.65\times 10^{-4}$ （ $\phi 15\times 30\text{cm}$ のテストピースを用い、試験体と同一環境条件下で載荷時を基準にした経過年約3年における値）。

主な実験結果 載荷時には生じなかったが、経過日数42日で端部上端及び中央部下端でかなりのひび割れが生じているのを観察した。

解析及び同結果の考察 ①要素分割は、端部でダブル配筋、中央部付近でシングル配筋であるため、両端部2分割、中央部6分割、合計10分割とした。②終局時中央部のたわみは、クリープと乾燥収縮を考慮の場合で $\delta_{c+s}=2.04\text{mm}$ 、クリープのみ考慮の場合で $\delta_c=1.91\text{mm}$ となった。但し、初期載荷時のたわみ $\delta_0=0.33\text{mm}$ である。このことから、両端単純支持の場合と異なり、両端固定支持の場合たわみは乾燥収縮の影響を余り受けないことが分かる。③図4に初期載荷時と終局時の曲げモーメント分布を示す。この結果から、スラブにひびわれが生じないならば、即ち弾性状態にある場合、クリープと乾燥収縮の影響を受ける持続載荷中の経時的な曲げモーメントの再配分は僅かな変動にとどまることが分かる。④図5に端部と中央部のコンクリートの応力分布を示す。終局時の応力の値は、クリープのみの場合初期載荷時のそれよりも小さくなるが、乾燥収縮が加わると極めて大きくなる。クリープと乾燥収縮考慮の場合、端部上端と中央部下端の終局時コンクリート応力は曲げ強度 σ_B ($1.8\sqrt{F_c}=25.7\text{kgf/cm}^2$) を越えており、その両位置で持続載荷中にひびわれが発生することが予測でき、また実験において持続載荷中経過日数42日で発生していることと対応している。

[適用例3] プレテンション方式で成形されたプレキャストコンクリート埋設型枠の上に場所打ちコンクリートを打設して得られるハーフスラブ等の合成スラブが多く利用されてきている。既往の実験で用いられた、このような一方向合成スラブ [9] に適用し、解析を試みた。

実験諸元 断面形状：図6参照。支持条件：両端固定。スパン長：5.6m。鋼材：埋設型枠部分でPC鋼より線SWPR-7A $\phi 12.4\text{mm}$ を4本、場所打ちコンクリート部分で鉄筋は端部に7- $\phi 10$ 、中央部に5D-10。PC鋼より線の初期緊張力：12tf（1本あたり）。載荷日：場所打ちコンクリートの材令で28日。ヤング係数

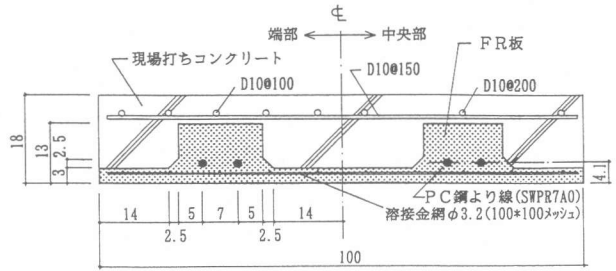


図6 合成断面形状（単位：cm）

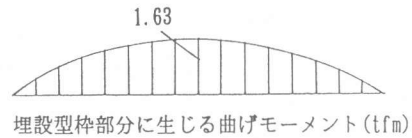
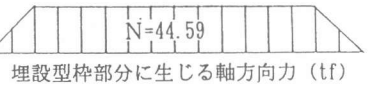


図7 初期軸方向力と初期曲げモーメント

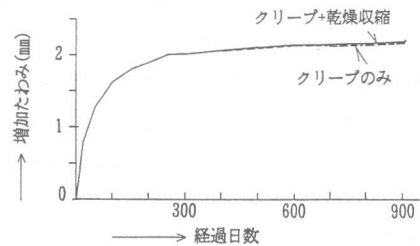


図8 増加たわみの履歴

：埋設枠部分で $E_p=3.42 \times 10^5 \text{kgf/cm}^2$ （コンクリート、材令53日）、場所打ちコンクリート部分で $E_N=2.46 \times 10^5 \text{kgf/cm}^2$ （コンクリート、材令28日）、鉄筋で $E_s=1.92 \times 10^6 \text{kgf/cm}^2$ 、PC鋼より線で $E_p=2.07 \times 10^6 \text{kgf/cm}^2$ 。クリープ係数及び収縮歪：試験体と同一環境条件下で、載荷時を基準にした $\phi 15 \times 30 \text{cm}$ のテストピースによって得られた実験値をそのまま用いた。初期応力状態：図7に示す通り。

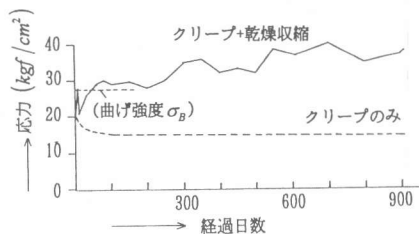


図9 端部上面のコンクリート応力

解析及び同結果の考察 ①部材の要素分割は16分割

とした。解析はクリープと収縮を考慮した場合、及びクリープのみの場合の2タイプについて行った。②図8にたわみ、図9に端部場所打ちコンクリート上面の応力、図10に端部上端筋と中央部PC鋼線応力それぞれの経時変化を示す。弾性状態においては、両端固定支持の場合、経時たわみ、鉄筋応力及びPC鋼線

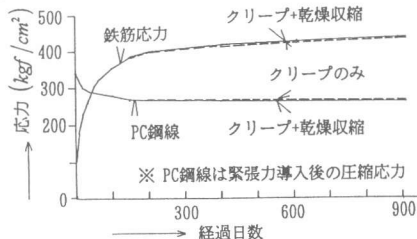


図10 端部鉄筋と中央部PC鋼より線の応力

応力はクリープの他に収縮が加わってもクリープのみによる値とほとんど変わらないことが示されている。③端部上面の場所打ちコンクリートの経時応力は、クリープのみの場合減少していくのに反し、乾燥収縮を考慮した場合増大していく傾向にあることが示されている。④この試験体は載荷時にひび割れを発生せず、経過日数9日でひびわれを生じているのを発見している。端部上端のコンクリート応力は解析上経過日数2日で曲げ強度 $\sigma_B (1.8\sqrt{F_c} = 28.2 \text{kgf/cm}^2)$ を越えており、ひび割れに対しては乾燥収縮の影響を受けて極めて早い段階で発生することが予測でき、実験結果と対応している。

5. まとめ

クリープと乾燥収縮を考慮した、合成断面を含むコンクリート系構造の弾性解析の定式化を図り、既往の実験で用いられたスラブに対して解析を試みその妥当性について吟味した。その結果、本解析法は弾性状態下の長期曲げ性状をよく追跡できることが示された。また、コンクリート系床構造に対する既往の解析では弾性状態下においても長期曲げ性状に対するクリープと乾燥収縮の影響を定量的に評価するものが少なく、極めて曖昧であったが、本解析はこれを明確に評価できることが分かった。更に、埋設型枠を有する合成断面構造に対しても、本解析の有用性が示された。

【文献】1) 六車熙、渡辺誠一：プレストレストコンクリート不静定架構のたわみ角法によるクリープ応力解析、日本建築学会構造系論文報告集、第450号、1993年8月、pp. 99~108等の一連の研究 2) H.リュツェ他著、百島裕信訳：コンクリート構造物のクリープと乾燥収縮、鹿島出版社、昭和51年 3) 小宮正久、酒井一、前田春人：コンクリートのクリープ・乾燥収縮を考慮した断面曲げ解析、プレストレストコンクリート、vol134、No6、pp. 59~71、Nov. 1992 4) 佐藤素啓、渡辺実、佐藤昇：変形法によるコンクリート構造物のクリープ・乾燥収縮解析の基礎理論、プレストレストコンクリート、vol123、No2、pp. 59~66、Apr. 1980 5) 小宮正久、酒井一、前田春人：PC合成桁のクリープ解析、プレストレストコンクリート、vol132、No2、pp. 63~73、Mar. 1990 6) F.レナウ著、横道英雄監訳：プレストレストコンクリート、pp. 230~238、鹿島出版会、昭和58年 7) 岩原昭次：RC造一方向スラブの約3ヶ年にわたる持続載荷終了前後の変形と耐力について、日本建築学会九州支部研究報告、第29号、pp. 253~256、昭和61年3月 8) 岩原昭次：両端固定鉄筋コンクリート造一方向床スラブの長期曲げ性状、コンクリート工学年次論文報告集9-2、pp. 615~620、1987 9) 渡辺明他2名共著：プレストレストコンクリートの力学、pp. 163~167、技報堂、1981年

【謝辞】本研究をまとめるにあたって、御協力頂いた熊工大建築学科岩原研究室院生等に厚くお礼を申し上げます。