

論文 半無限大のコンクリート桁構造における伝達境界の設定に関する研究

三輪 健治*1 ・ 田邊 忠顕*2

要旨：半無限的に連続的な連続ラーメン橋を有限要素法によって動的解析を行うために、地盤における伝達境界と同じく、波のエネルギーを伝達する境界式を提案し、数値解析を行った。そして、解析結果より、連続ラーメン橋の連数を変えて伝達境界を設けた場合のそれぞれの構造物の変位が、ほぼ等しい事を確認した。
 キーワード：連続ラーメン橋、構造物の伝達境界

1. はじめに

今回の阪神大震災により、新幹線橋の落橋などの多くの被害が発生した。そのために、今後、新幹線橋などの長大な構造物の動的解析を行おうとすると、ラーメン構造自身に対して無限遠方を表す伝達境界が必要となる。しかし、この問題に関する研究は、筆者の知る限り皆無である。そのために、解析対象となるものの一部を取り出して解析を行わなくてはならず、無限に広がるものを有限として取り扱ったための誤差が大きな問題となっている。地盤においては、Lysmer らを始め、各種の伝達境界 (Transmitting Boundary) の設定方法が確立されている [1]。しかし、Lysmer らが提案した伝達境界式は、地盤に対するものであるために曲げ、あるいは回転方向に対する考慮がなされていない。そのために、Lysmer らの伝達境界式は構造物に適用できない。そこで、本研究は、曲げ、あるいは回転方向に対する考慮を行い、構造物に適用可能である伝達境界式を提案し、検討を行った。

2. 伝達境界を考慮した運動方程式の定式化

2. 1 解析領域の運動方程式

図-1のような連続ラーメン橋の解析領域 Ω における運動方程式は、節点変位を $\{\delta\}_\Omega$ 、節点外力を $\{Q\}_\Omega$ とすれば、一般に

$$[M]\{\ddot{\delta}\}_\Omega + [K]\{\delta\}_\Omega = \{Q\}_\Omega \tag{1}$$

となり、式(1)の $[M]$ は、質量マトリックスであり、 $[K]$ は、剛性マトリックスである。ここで、各振動数領域で解析する場合において、これらの複素応答 $\{\delta\}_\Omega$ と $\{Q\}_\Omega$ は、複素節

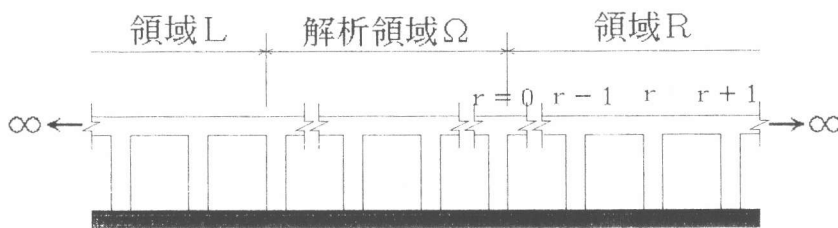


図-1 解析領域 Ω と領域 L、R

点変位振幅を $\{U\}_\Omega$ 、複素節点外力振幅を $\{P\}_\Omega$ とし、また、調和振動の各振動数を ω とすると $\{\delta\}_\Omega = \{U\}_\Omega \exp(i\omega t)$ 、 $\{Q\}_\Omega = \{P\}_\Omega \exp(i\omega t)$ と表すことができる。よって、解析領域における運動方程式は

*1 名古屋大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (正会員)

*2 名古屋大学教授 工学部 土木工学科、工博 (正会員)

$$([K] - \omega^2[M])\{U\}_\Omega = \{P\}_\Omega \quad (2)$$

となる。実際の構造物は、領域L、あるいは領域Rの方向に無限につながっているのであるから、L、あるいはRの境界において、エネルギーを伝達させる伝達境界が設定される必要がある。

2.2 構造物の伝達境界の定式化

図-1の領域L、Rから、一般に節点が $r-1$ 、 r 、 $r+1$ 番目の連続ラーメン橋を取り出すと図-2のようになる。ここで、この連続ラーメン橋をモデル化すると図-3のようになる。また、このラーメン橋の桁部分のスパン長を ℓ 、断面積を A 、断面二次モーメントを I とし、橋脚の長さを L 、断面積を A' 、断面二次モーメントを I' とする。ただし、図-3において、回転慣性は考慮しない。

r 番目における水平、垂直、回転方向のそれぞれの運動方程式は、

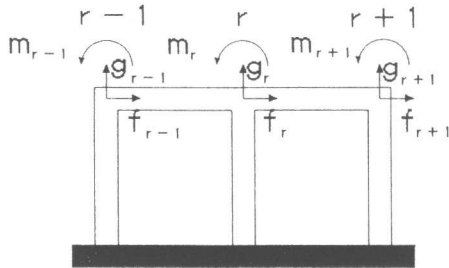


図-2 連続ラーメン橋拡大図

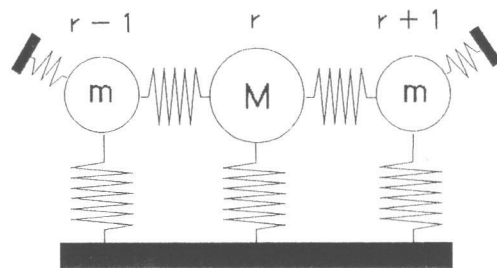


図-3 モデル図

$$-\frac{EA}{\ell}x_{r-1} + \left(\frac{2EA}{\ell} + \frac{24EI'}{L^3}\right)x_r - \frac{EA}{\ell}x_{r+1} = -M\frac{d^2x_r}{dt^2} \quad (3)$$

$$-\frac{12EI}{\ell^3}z_{r-1} + \left(\frac{24EI}{\ell^3} + \frac{2EA'}{L}\right)z_r - \frac{12EI}{\ell^3}z_{r+1} = -M\frac{d^2z_r}{dt^2} \quad (4)$$

$$\frac{2EI}{\ell}\theta_{r-1} + \left(\frac{8EI}{\ell} + \frac{8EI'}{L}\right)\theta_r + \frac{2EI}{\ell}\theta_{r+1} = 0 \quad (5)$$

である。ここで、式(3)、式(4)、式(5)における各変位は、各振動数ごとによって表すことができる [2]。よって、今ある振動数 ω に対して解をそれぞれ $x_r = \eta^r u \exp(i\omega t)$ 、

$z_r = \lambda^r v \exp(i\omega t)$ 、 $\theta_r = \mu^r c \exp(i\omega t)$ とし、式(3)、式(4)、式(5)に代入すると、次の固有方程式が得られる。

$$\eta^2 - \left(2 + \frac{24EI'}{AL^3} - \frac{M\ell}{EA}\omega^2\right)\eta + 1 = 0 \quad (6)$$

$$\lambda^2 - \left(2 + \frac{A'\ell^3}{6IL} - \frac{M\ell^3}{12EI}\omega^2\right)\lambda + 1 = 0 \quad (7)$$

$$\mu^2 - \left(-4 - \frac{4\ell I'}{LI}\right)\mu + 1 = 0 \quad (8)$$

式(6)、式(7)、式(8)は、固有値は ω に応じて、複素数、実数の双方存在する。ただし、式(8)では、曲げによる慣性力を考えていないために固有方程式の中に振動数の項がないので、固有値は実数解のみである。ここで、固有値により伝播する波の性質が異なるので、振動数に対する条件を定める必要がある。よって、水平方向、垂直方向における固有値が複素数になる場合、即ちエネルギーが逸散する場合、以下のようなになる。

$$\sqrt{\frac{24EI'}{ML^3}} < \omega < \sqrt{\frac{EA}{M\ell} \left\{ 4 + \frac{24\ell I'}{AL^3} \right\}} \quad (9)$$

$$\sqrt{\frac{2EA'}{ML}} < \omega < \sqrt{\frac{12EI}{M\ell^3} \left\{ 4 + \frac{A'\ell^3}{6IL} \right\}} \quad (10)$$

固有値が複素数の場合の節点変位は、

$$x_r = u \exp\left(i\omega\left(t \pm \frac{r\phi}{\omega}\right)\right) \quad \text{ただし、} \phi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(2 + \frac{24\ell I'}{AL^3} - \frac{M\ell}{EA}\omega^2\right)\right) \quad (11)$$

$$z_r = v \exp\left(i\omega\left(t \pm \frac{r\varphi}{\omega}\right)\right) \quad \text{ただし、} \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(2 + \frac{A'\ell^3}{6IL} - \frac{M\ell^3}{12EI}\omega^2\right)\right) \quad (12)$$

となる。式(11)、式(12)において、波の伝播方向が正の場合、符号のマイナスの変位をとり、負の方向に進む場合には、符号のプラスの変位をとる。また、振動数が、式(9)、式(10)の範囲以外の場合、つまり、固有値が実数の場合は、波は伝播しないので、伝播方向の無限遠で消滅する符号をとらなければならない。即ち、 $\eta = \alpha_1, \alpha_2 (\alpha_2 > \alpha_1)$ 、 $\lambda = \beta_1, \beta_2 (\beta_2 > \beta_1)$ 、 $\mu = \gamma_1, \gamma_2 (\gamma_2 > \gamma_1)$ とすると

$$x_r = u\alpha_1^r \exp(i\omega t), \quad u\alpha_2^r \exp(i\omega t) \quad (13)$$

$$z_r = v\beta_1^r \exp(i\omega t), \quad v\beta_2^r \exp(i\omega t) \quad (14)$$

$$\theta_r = c\gamma_1^r \exp(i\omega t), \quad c\gamma_2^r \exp(i\omega t) \quad (15)$$

となる。ここで、領域L、Rでの水平方向における複素節点外力と変位の関係は、次式で表され、図-2のr-1、r+1番目の節点において

$$f_{r-1} = \left(\frac{EA}{\ell} + \frac{12EI'}{L^3}\right)x_{r-1} + \left(-\frac{EA}{\ell}\right)x_r \quad (16)$$

$$f_{r+1} = \left(-\frac{EA}{\ell}\right)x_r + \left(\frac{EA}{\ell} + \frac{12EI'}{L^3}\right)x_{r+1} \quad (17)$$

ここで、領域Rで、波が正の方向に伝播したときの水平方向に作用する力を導くために、式(16)に式(11)を代入する。

$$f_{r-1} = \left\{ \left(\frac{EA}{\ell} + \frac{12EI'}{L^3}\right) \exp(-ir\phi) \exp(i\phi) + \left(-\frac{EA}{\ell}\right) \exp(-ir\phi) \right\} u \exp(i\omega t) \quad (18)$$

式(18)において、 f_{r-1} は、 $f_{r-1} = f_{r-1R}^R \exp(i\omega t)$ となる。なお、この式の複素節点外力振幅の下添字は領域を、上添字は波動の伝播方向を表す。これを式(18)に代入すると、

$$f_{r-1R}^R = \left\{ \left(\frac{EA}{\ell} + \frac{12EI'}{L^3}\right) \exp(-ir\phi) \exp(i\phi) + \left(-\frac{EA}{\ell}\right) \exp(-r\phi) \right\} u \quad (19)$$

境界条件として扱うために、式(19)に $r=1$ を代入すると

$$f_{0R}^R = \left\{ \left(\frac{EA}{\ell} + \frac{12EI'}{L^3} \right) + \left(-\frac{EA}{\ell} \right) \exp(-i\phi) \right\} u \quad (20)$$

式(20)は、水平方向における波が正の方向に伝播した場合の伝達境界式である。また、領域Rにおいて、波が負の方向に伝播したときの複素節点外力と変位の関係式は、

$$f_{0R}^L = \left\{ \left(\frac{EA}{\ell} + \frac{12EI'}{L^3} \right) + \left(-\frac{EA}{\ell} \right) \exp(i\phi) \right\} u \quad (21)$$

となる。また、領域Lで、波が正の方向に伝播するときの水平方向に作用する複素節点外力振幅と変位の関係式は、式(17)に式(11)を代入し、 $f_{r+1} = f_{r+1L}^R \exp(i\omega t)$ とすると、

$$f_{r+1L}^R = \left\{ \left(-\frac{EA}{\ell} \right) \exp(-ir\phi) + \left(\frac{EA}{\ell} + \frac{12EI'}{L^3} \right) \exp(-ir\phi) \exp(i\phi) \right\} u \quad (22)$$

となる。そして、同様に境界条件として扱うために、式(22)に $r=-1$ を代入すると、

$$f_{0L}^R = \left\{ \left(-\frac{EA}{\ell} \right) \exp(i\phi) + \left(\frac{EA}{\ell} + \frac{12EI'}{L^3} \right) \right\} u \quad (23)$$

となる。領域Lにおいて、波が負の方向に伝播したときの複素節点外力と変位の関係式は、

$$f_{0L}^L = \left\{ \left(-\frac{EA}{\ell} \right) \exp(-i\phi) + \left(\frac{EA}{\ell} + \frac{12EI'}{L^3} \right) \right\} u \quad (24)$$

となる。同様に以下の式が成り立つ。

$$g_{0R}^R = g_{0L}^L = \left\{ \left(\frac{12EI}{\ell^3} + \frac{EA'}{L} \right) + \left(-\frac{12EI}{\ell^3} \right) \exp(-i\phi) \right\} v \quad (25)$$

$$g_{0R}^L = g_{0L}^R = \left\{ \left(\frac{12EI}{\ell^3} + \frac{EA'}{L} \right) + \left(-\frac{12EI}{\ell^3} \right) \exp(i\phi) \right\} v \quad (26)$$

また、固有値が実数の場合では、

$$f_{0R}^R = \left\{ \left(\frac{EA}{\ell} + \frac{12EI'}{L^3} \right) + \left(-\frac{EA}{\ell} \right) \alpha_1 \right\} u, \quad f_{0R}^L = \left\{ \left(\frac{EA}{\ell} + \frac{12EI'}{L^3} \right) + \left(-\frac{EA}{\ell} \right) \alpha_2 \right\} u \quad (27)$$

$$f_{0L}^R = \left\{ \left(\frac{EA}{\ell} + \frac{12EI'}{L^3} \right) + \left(-\frac{EA}{\ell} \right) \alpha_1^{-1} \right\} u, \quad f_{0L}^L = \left\{ \left(\frac{EA}{\ell} + \frac{12EI'}{L^3} \right) + \left(-\frac{EA}{\ell} \right) \alpha_2^{-1} \right\} u \quad (28)$$

$$g_{0R}^R = \left\{ \left(\frac{12EI}{\ell^3} + \frac{EA'}{L} \right) + \left(-\frac{12EI}{\ell^3} \right) \beta_1 \right\} v, \quad g_{0R}^L = \left\{ \left(\frac{12EI}{\ell^3} + \frac{EA'}{L} \right) + \left(-\frac{12EI}{\ell^3} \right) \beta_2 \right\} v \quad (29)$$

$$g_{0L}^R = \left\{ \left(\frac{12EI}{\ell^3} + \frac{EA'}{L} \right) + \left(-\frac{12EI}{\ell^3} \right) \beta_1^{-1} \right\} v, \quad g_{0L}^L = \left\{ \left(\frac{12EI}{\ell^3} + \frac{EA'}{L} \right) + \left(-\frac{12EI}{\ell^3} \right) \beta_2^{-1} \right\} v \quad (30)$$

$$m_{0R}^R = \left\{ \left(\frac{4EI}{\ell} + \frac{4EI'}{L} \right) + \left(\frac{2EI}{\ell} \right) \gamma_1 \right\} c, \quad m_{0R}^L = \left\{ \left(\frac{4EI}{\ell} + \frac{4EI'}{L} \right) + \left(\frac{2EI}{\ell} \right) \gamma_2 \right\} c \quad (31)$$

$$m_{0L}^R = \left\{ \left(\frac{4EI}{\ell} + \frac{4EI'}{L} \right) + \left(\frac{2EI}{\ell} \right) \gamma_1^{-1} \right\} c, \quad m_{0L}^L = \left\{ \left(\frac{4EI}{\ell} + \frac{4EI'}{L} \right) + \left(\frac{2EI}{\ell} \right) \gamma_2^{-1} \right\} c \quad (32)$$

式(21)、式(22)、式(25)、式(26)、式(27)、式(29)、式(31)より、領域Rに波が伝播したときに作用する複素節点外力振幅をマトリックスの形で表すと

$$\{P\}_R^R = \begin{pmatrix} f_{0R}^R \\ g_{0R}^R \\ m_R^R \end{pmatrix} = [R]_R \begin{Bmatrix} u \\ v \\ c \end{Bmatrix} = [R]_R \{U\}_R^R, \quad \{P\}_R^L = \begin{pmatrix} f_{0R}^L \\ g_{0R}^L \\ m_R^L \end{pmatrix} = [L]_R \begin{Bmatrix} u \\ v \\ c \end{Bmatrix} = [L]_R \{U\}_R^L \quad (33)$$

式(33)の $[R]_R$ は、振動数が、式(9)、式(10)の条件式に当てはまる場合、つまり、固有値が複素数の場合は、以下のような対角マトリックスになる。

$$[R]_R = \begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{\ell} + \frac{12EI'}{L^3} \right) + \left(-\frac{EA}{\ell} \right) \exp(-i\phi) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{12EI}{\ell^3} + \frac{EA'}{L} \right) + \left(-\frac{12EI}{\ell^3} \right) \exp(-i\phi) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{4EI}{\ell} + \frac{4EI'}{L} \right) + \left(\frac{2EI}{\ell} \right) \gamma_1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

また、 $[L]_R$ も同様に対角マトリックスで表される。次に式(23)、式(24)、式(25)、式(26)、式(28)、式(30)、式(32)より、領域Lに波が伝播したときに作用する複素節点外力振幅をマトリックスの形で表すと

$$\{P\}_L^R = \begin{pmatrix} f_{0L}^R \\ g_{0L}^R \\ m_L^R \end{pmatrix} = [R]_L \begin{Bmatrix} u \\ v \\ c \end{Bmatrix} = [R]_L \{U\}_L^R, \quad \{P\}_L^L = \begin{pmatrix} f_{0L}^L \\ g_{0L}^L \\ m_L^L \end{pmatrix} = [L]_L \begin{Bmatrix} u \\ v \\ c \end{Bmatrix} = [L]_L \{U\}_L^L \quad (35)$$

式(35)の $[R]_L$ 、 $[L]_R$ も対角マトリックスで表される。式(33)、式(35)より、境界面に作用する作用する力の振幅を表し、解析領域 Ω の振動外力振幅に加算すると

$$\{\bar{K}\} \{U\}_\Omega = \{P\}_\Omega + ([R]_L - [L]_L) \{U\}_L^R + ([L]_R - [R]_R) \{U\}_R^L \quad (36)$$

$$\text{ただし、} \{\bar{K}\} = \{[K] - \omega^2[M] + [L]_L + [R]_R\} \quad (37)$$

式(33)、式(35)、式(36)、式(37)の下添字は領域を表し、上添字は波動の伝播方向を表している。

3. 数値解析

新幹線の高架桁を想定して橋脚の長さ $L = 9.235(m)$ 、断面積 $A' = 0.810(m^2)$ 、断面二次モーメント $I' = 0.055(m^4)$ 、橋桁の長さ $\ell = 8.000(m)$ 、断面積 $A = 0.603(m^2)$ 、断面二次モーメント $I = 0.023(m^4)$ の単体ラーメン橋をUnit 1 (図2の場合は、Unit 2となる)とし、Unit 2、Unit 4、Unit 8、Unit 12の中央の節点に水平方向に $f = -1000 \exp(i\omega t)(kN)$ の外力を与えた場合の載荷点での時間-水平方向の変位を $\omega = 5.0, \omega = 50.0, \omega = 100.0$ の場合に

において表したのが、それぞれ、図-4、図-5、図-6である。なお、伝達境界は各 Unit の両端に付加した。そして、各 Unit をヤング率 $E=1.96 \times 10^7 (kN/m^2)$ のコンクリート桁構造として取り扱った。

図-4は固有値が実数の場合であり、逸散減衰は生じない。従って、伝達境界を付加しても各 Unit の変位の形状が異なる。よって、固有値が実数解の場合は、あまり、波を伝達しないのがわかる。

図-5、図-6は、固有値が複素数の場合である。また、図-5、図-6では各 Unit の変位の大きさが一致しているといえる。よって、固有値が複素数の場合では伝達境界が非常に有効である。しかし、位相のずれがみられる。

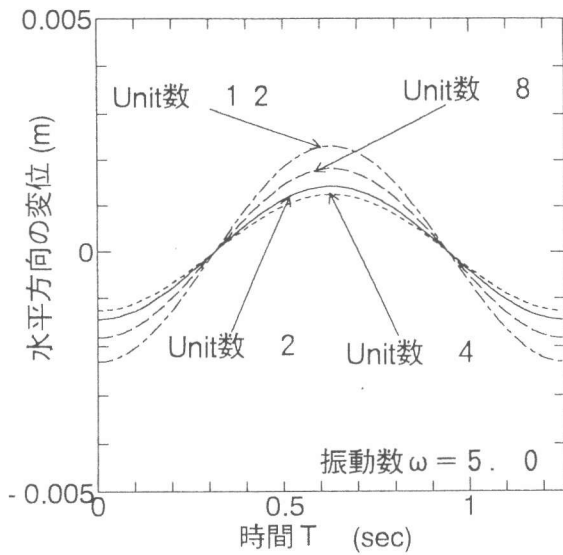


図-4 載荷点の水平方向変位

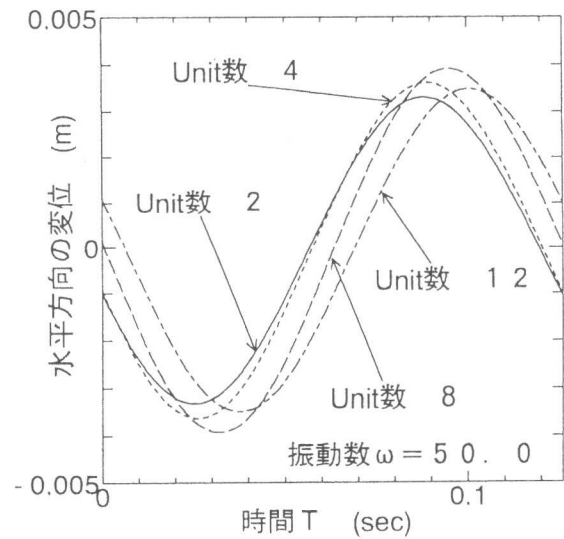


図-5 載荷点の水平方向変位

4. まとめ

ラーメン橋を伝搬する波における固有値問題で、振動数に対する条件を定め、ラーメン橋における伝達境界式を提案した。

(1) 固有値が複素数の場合では、波がよく伝達し、少ない Unit 数でも、半無限長の構造物での動的解析を行うことができる。しかし、位相のずれがみられる。よって、今後位相のずれに対する対応を考慮する必要がある。

(2) 固有値が実数の場合では、各 Unit の変位の大きさが異なる。これは、エネルギーが逸散しないためである。

今後、伝達境界を考慮した地盤-構造系においても今回提案した伝達境界式が十分有効であるか確認し、実際の地震波を入射し、解析、検討を行いたい。

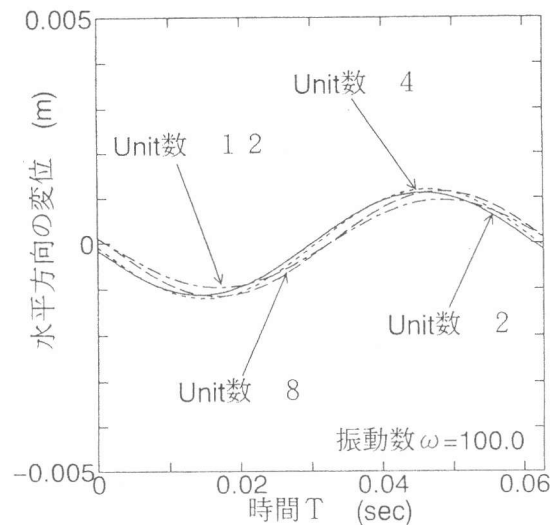


図-6 載荷点における水平方向変位

参考文献

- 1) Lysmer j. and Waas G.: SHEAR WAVE IN PLANE INFINITE STRUCTURES、Journal of the ENGINEERING MECHANICS DIVISION、p85-105、February 1972
- 2) 武藤清：構造物の動的解析、丸善、1966 P245-248