

論文 破壊エネルギーを考慮した有限要素法解析における要素形状の検討

山谷 敦*¹・中村 光*²・足立正信*¹・楢貝 勇*³

要旨：コンクリート構造の数値解析において破壊エネルギーは、寸法効果を伴う解析あるいは要素寸法依存性を回避する上で有効である。分布ひび割れモデルに破壊エネルギーを導入する際には、ひび割れ幅をひずみに変換するための等価長さが必要となるが、その考え方は必ずしも明らかになっていない。本研究では、まず等価長さの概念を明らかにしていくつかの等価長さの考え方を示し、各種等価長さを用いたときの解析結果の違いから、最適な等価長さの評価を試みた。

キーワード：等価長さ、破壊エネルギー、要素形状依存性

1. まえがき

近年、コンクリート構造の有限要素法解析に破壊エネルギーを導入し、各種強度の寸法効果を解析的に捉えたり、解析結果の要素寸法依存性を回避する等の試みが数多くなされている [1]。また、回転ひび割れモデルと破壊エネルギーを用いた有限要素法解析を用いれば、せん断破壊する梁に対しても、比較的良好な精度でその挙動を表現できることが指摘されている [2]。破壊エネルギーを分布ひび割れモデルに導入する際には、ひび割れ幅を、ひずみの方向、要素形状、要素寸法等が考慮された等価長さを介してひずみに変換する必要があるが、ひび割れが矩形要素と直交する方向に生ずる場合を除くと、等価長さの概念は必ずしも明らかではない。そこで本研究では、まず等価長さの概念を明らかにしていくつかの等価長さの考え方を示し、回転ひび割れモデルと破壊エネルギーを用いたRC梁のせん断挙動解析を行い、各種等価長さを用いたときの解析結果の違いから、解析結果の要素形状依存性を回避するための最適な等価長さの評価を試みた。

2. 等価長さ

2.1 等価長さの概念

ここでは簡単のため長方形要素を対象とし、要素内のひずみ分布は一様と仮定する。図-1に示すように、面積が同じ(幅 b , 高さ h)でひび割れ方向の角度が異なる要素を考える。この時、ある状態に対して各要素に吸収されたエネルギー量は、 θ に関わらず等しくなる必要がある。 $\theta=0$ 度の場合、ひび割れ幅をひずみに変換するための等価長さ l_{eq} は要素高さ h と一致し、次式が成立する。

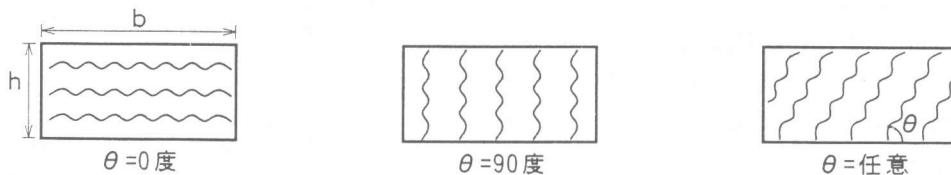


図-1 ひび割れのパターン

*¹ 東電設計(株) 技術開発本部耐震技術部 (正会員)

*² 山梨大学助教授 工学部土木環境工学科、工博(正会員)

*³ 山梨大学教授 工学部土木環境工学科、工博(正会員)

$$\{(G_F/leq) \times (bh)\} \times (1/b) = G_F \quad (1)$$

式(1)の意味は、エネルギーを等価長さで変換した量に断面積を乗じて得られる全体の量を、ひび割れ方向に対する平均的な量に変換すれば元の量に戻ることである。同様に、 $\theta = 90$ 度の場合は $leq = b$ であり、

$$\{(G_F/leq) \times (bh)\} \times (1/h) = G_F \quad (2)$$

が成立する。ここで、全体の量をひび割れ方向に平均化するための幅を b^* とすると式(1)の場合は $b^* = b$ 、式(2)の場合は $b^* = h$ 、式(1)、(2)より、等価長さ leq と平均幅 b^* を乗じたものが要素面積 $A(b \times h)$ に一致すればよいことがわかる。すなわち、 θ 方向の長さが b^* で θ と直交する方向の長さが leq となる面積 A の長方形を考えることにより、 leq は次式のように決定される。

$$leq = A/b^* \quad (3)$$

結局、図-1の θ が任意の場合の leq をどのように考えるかという問題は、どのような b^* の概念を導入するかという問題に帰着されることになる。

2.2 平均幅および等価長さの考え方

等価長さは平均幅 b^* の概念に関係する。ここでは、平均幅 b^* のいくつかの考え方を提示するとともに、従来用いられている等価長さを平均幅 b^* の概念により整理する。

(1) 要素短辺を等価長さとする方法 (等価長さモデルL-1)

ひび割れ方向 θ に関わらず平均幅 b^* を要素長辺とすると、等価長さ leq は要素の長さを表す量として最も小さい要素短辺となり、これを用いた解析結果は一般に最も硬い結果となる。ひび割れ方向が要素短辺に直交する場合には正しい等価長さの評価である。

(2) 要素対角線を等価長さとする方法 (L-2)

要素節点から要素対角線に降ろした垂線の長さを b^* とすると、 leq は要素対角線と一致する。L-1とは逆に、要素対角線は要素の長さを表す量として最大のものであり、これを leq とした解析結果は一般に下限値を示す。

(3) \sqrt{A} を等価長さとする方法 (L-3)

面積が等しい等価要素を正方形とすると、 $b^* = leq = \sqrt{A}$ となる。

(4) Dahlblom [3] の方法 (L-4)

図-2において、要素内における θ 方向の長さの加重平均を b^* とすると、 $b^* = bh / (b \cdot \sin \theta + h \cdot \cos \theta)$ 、 $leq = b \cdot \sin \theta + h \cdot \cos \theta$ となる。この leq は、Dahlblom(1990)の主ひずみ方向への要素の投影長さを等価長さとするという考え方に一致する。

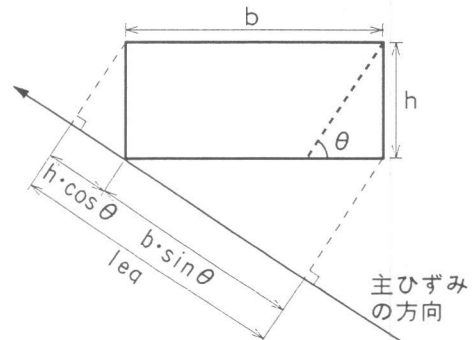


図-2 Dahlblom の等価長さ

(5) 主ひずみ方向と要素の交点の長さの最大値を等価長さとする方法 (L-5)

図-3において、要素の θ 方向への投影長さは $b \cdot \cos \theta + h \cdot \sin \theta$ となる。ここで b^* を $b \cdot \cos \theta$ 、 $h \cdot \sin \theta$ のうち大きい方とすれば、主ひずみ方向と要素との交点の長さの最大値が leq となる。

(6) 面積比を考慮した等価長さ (L-6)

図-4において、①の領域の平均的な幅 b_1 は $h/\sin \theta$ 、面積 A_1 は $bh - h^2/\tan \theta$ であり、同様に②ではそれぞれ $b_2 = h/2\sin \theta$ 、 $A_2 = h^2/\tan \theta$ となる。ここで b_1 、 b_2 を A_1 、 A_2 を重みとして平均したものを b^* とすると、 $b^* = h/\sin \theta (1 - h/2b \cdot \tan \theta)$ 、 $leq = b \cdot \sin \theta / (1 - h/2b \cdot \tan \theta)$ となる。

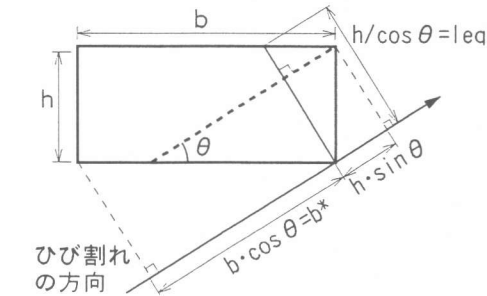


図-3 主ひずみ方向と要素の交点の長さに基づく等価長さ

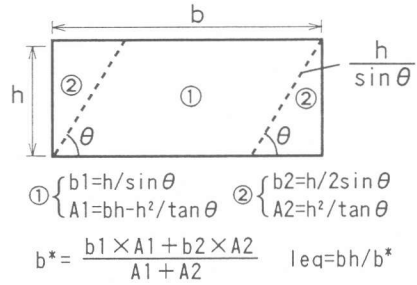


図-4 面積比を考慮した等価長さ

2.3 各種等価長さの比較

前節で述べたL-1~L-6の各モデルに対し、要素内のひび割れ方向 θ (水平軸からの角度) による等価長さ leq の変化を図-5, 6に示す。

図-5は要素が $b \times h = 1\text{cm} \times 1\text{cm}$ の正方形の場合であり、 leq の最大値および最小値はそれぞれ1.414(L-2)、1.0(L-1)である。L-4~L-6の中で leq が最も大きいのはL-4で、最も小さいのはL-5であり、L-6は両者の中間的な値を示すことが分かる。また、L-4~L-6は対角線方向である $\theta = 45$ 度を境に leq は対称となっており、 leq の値は $\theta = 0, 90$ 度ではL-1の短辺に、 $\theta = 45$ 度ではL-2の対角線にそれぞれ一致する。

図-6は要素が $b \times h = 3\text{cm} \times 1\text{cm}$ と偏平になる場合の leq の変化を示したものであり、最大値および最小値はそれぞれ3.162(L-2)、1.0(L-1)である。長方形要素の場合には正方形要素に比べて leq の差が大きくなることから、各モデルを用いた場合の解析結果の変動も大きくなることが予想される。また、正方形要素の場合と同様に、L-4~L-6の中で leq が最も大きいのはL-4、最も小さいのはL-5であり、L-5、L-6には対角線方向である $\theta = 18.4, 71.6$ 度に不連続点が見られる。

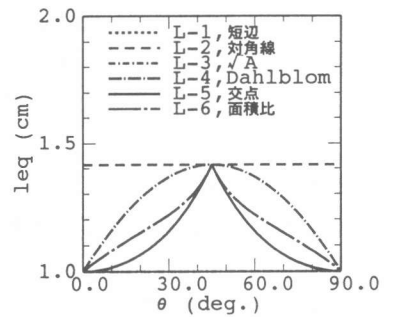


図-5 leq の変化(正方形)

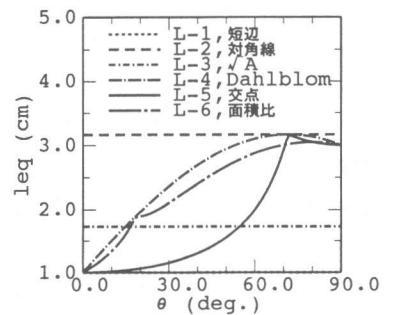


図-6 leq の変化(長方形)

3. RC梁の解析

3.1 解析モデルおよび解析条件

解析には斜め引張破壊となるせん断スパン比 $a/d = 3.85$ のRC梁を用いた(図-7)。材料諸元は、コンクリートの圧縮強度 $f'_c = 22.7\text{MPa}$ 、引張強度 $f_t = 2.26\text{MPa}$ 、鉄筋のヤング率 $E_s = 182\text{GPa}$ 、降

伏強度 $f_s=357\text{MPa}$ である。解析において梁はアイソパラメトリック要素でモデル化し、要素寸法および要素形状が異なる図-8の4つのモデルにより解析を行った。このうち、A-1およびA-2は要素形状がほぼ正方形であり、A-3は長辺と短辺の長さの比がほぼ3の横長な長方形、A-4は長辺と短辺の長さの比がほぼ2の縦長な長方形である。また、解析モデルは対称性を考慮して1/2モデルとしている。コンクリートの構成則としては、ひび割れ前はDarwin-Pecknoldの直交異方性モデルを、ひび割れ後は引張軟化特性(-3乗モデル,破壊エネルギー $G_F=147\text{N/m}$)を考慮した回転ひび割れモデルを用いた。引張軟化特性は全要素で考慮されており、テンションステイフニングも引張軟化特性で表現されると仮定した。また、圧縮側、引張側とも原点指向型の除荷経路を考慮した。非線形求解法は変位制御型の増分解析とし、Newton-Raphson法により収束計算を行った。

なお、今回の解析ではNakamura and Higai(1996) [4]に基づき圧縮側の破壊エネルギーを考慮し、圧縮強度以降の軟化勾配も等価長さに従い変化させている。

3.2 解析結果

(1) 要素形状と等価長さの影響

解析モデルA-1で l_{eq} をL-1~L-6としたときの荷重-変位関係を図-9に、同様にA-3の荷重-変位関係を図-10にそれぞれ示す。これらの図には実験結果も併せて示してあるが、実験結果では、変位が0.32cmおよび0.54cmとなったあたりにそれぞれピークが見られる。第一のピークは斜めひび割れの発生時に生じたものであり、第二のピークはその後のアーチ機構の崩壊に相当している。解析結果は、変位が0.2cm~0.3cmのあたりに第一のピークが生じ、斜めひび割れの急激な発生とともに荷重が低下する挙動を示しており、いずれも実験結果のおおまかな傾向は捉えている。ただし、第二のピーク以降の挙動は必ずしも実験結果を正確に再現できなかったため、以降の検討では、第一のピークに相当する斜めひび割れ発生直後までの挙動に着目し、等価長さの評価を試みた。図-9, 10の最大荷重点は図-5, 6の l_{eq} が小さいモデルを用いるほど大きくなっており、その最大と最小の差はA-1でおよそ16.7kN、A-3でおよそ58.7kNである。A-3の解

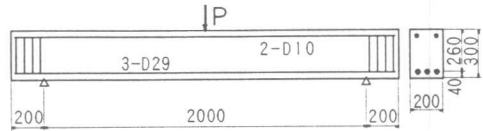


図-7 解析に用いたRC梁

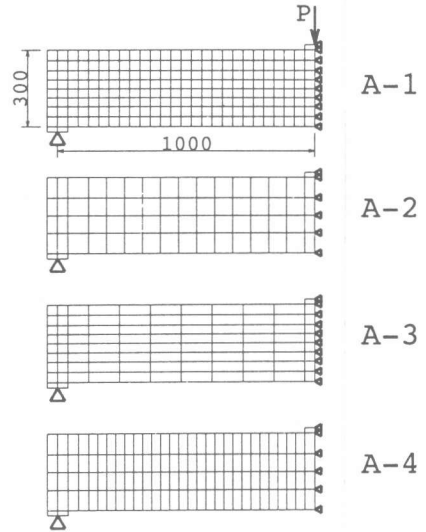


図-8 解析モデル

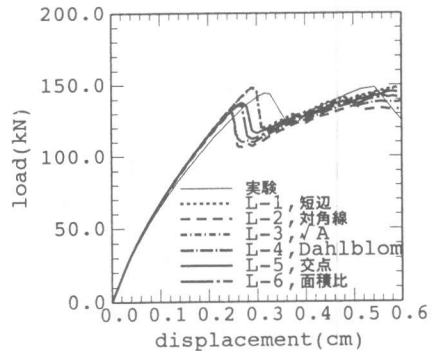


図-9 A-1モデルの結果

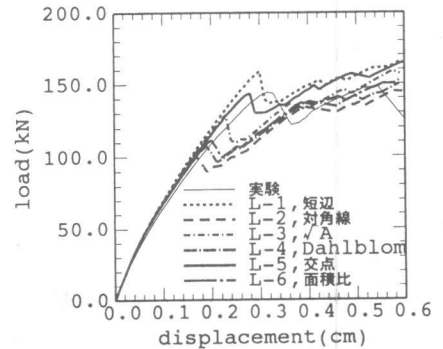


図-10 A-3モデルの結果

析結果の変動が大きいのは、2.3節で指摘したように、要素形状が扁平の場合、 l_{eq} の考え方によってその値の変動も大きいためと考えられる。従って、要素形状ならびに等価長さの影響は明らかに存在し、このような梁を解析する場合には、解の唯一性を保証するためにも等価長さモデルの選択には十分な注意が必要であると言える。

(2) 各等価長さモデルによる解析結果

解析モデルA-1~A-4に対し、各等価長さモデル(L-1~L-6)を用いた場合の荷重-変位関係を図-11~16に示す。これらの図において、A-4モデルだけは等価長さに関わらず常に最も硬い結果を示していることから、A-4モデルは他のモデルとは異なり、等価長さ以外の要因によって解析結果が硬くなる傾向を示すモデルであると考えられる。図-11の l_{eq} がL-1(短辺)の結果では、A-4を除き最大荷重点はほぼ一致している。これは、図-17に示す解析結果のひび割れ図を見ると、ひび割れ方向の角度が水平軸に対して比較的低角となっていることから、このような場合に等価長さに寄与する割合が大きいのはそれに直交する方向の辺長、すなわち今の場合は短辺であることによるものと考えられる。ただし、A-4モデルの結果は他の解析モデルを用いた結果と明らかに異なっており、この場合の適用性は非常に劣るものと思われる。図-12, 13の l_{eq} がL-2(対角線)およびL-3(\sqrt{A})の結果では、ほぼ正方形に近い要素分割のA-1, A-2の結果に対して、扁平な要素を用いているA-3はかなり軟らかい結果となっている。これは、要素が扁平になるほどこの種の等価長さの考え方では l_{eq} が大きくなり、今回の解析の場合、ひび割れの方向に対して明らかに大きすぎる等価長さの評価となっているためと考えられる。このように、L-1, L-2, L-3のようなひび割れ方向が考慮されない等価長さの考え方の場合には、等価長さを明らかに過大あるいは過小評価する可能性があることから、これらを等価長さとして解析に用いる場合には、ひび割れ方向と要素形状に対する注意が必要である。一方L-4~L-6の等価長さモデルにはひび割れ方向が考慮されているが、図-14, 図-16に示すL-4, L-6モデルでは、図-12, 図-13と同様に、扁平な要素を用いたA-3モデルの耐力がかなり低下しており、要素形状の影響が顕著に生じる結果となっている。これはL-4, L-6モデルの場合、図-6に示されているように、 θ が小さい範囲で等価長さの変化が著しい

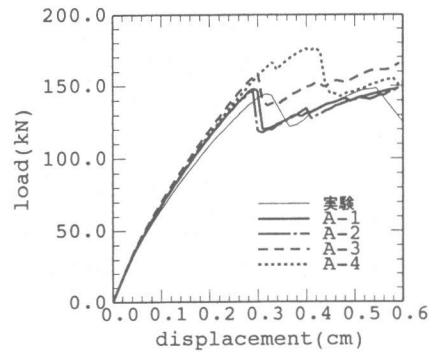


図-11 L-1(短辺)の結果

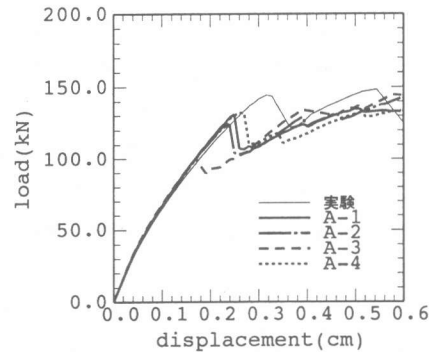


図-12 L-2(対角線)の結果

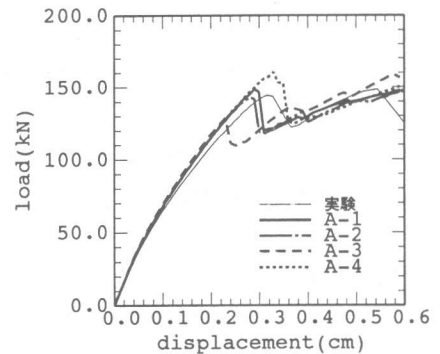


図-13 L-3(\sqrt{A})の結果

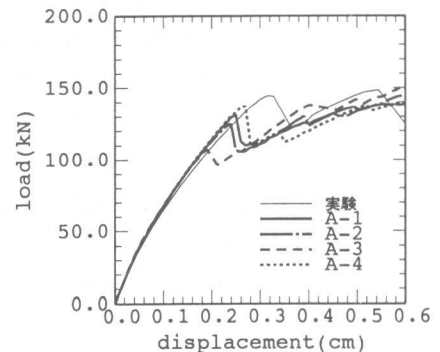


図-14 L-4(Dahlblom)の結果

ためと考えられる。それに対して図-15に示すL-5モデル(交点)は、各要素形状に対する相違が比較的小さく、今回の解析の範囲内では要素形状の影響をあまり受けないことが示されている。

以上より、今回の解析では、解析結果の要素形状依存性を回避するために最も適用性が高いと考えられる等価長さは、主ひずみ方向と要素の交点の長さの最大値を等価長さとする方法であると考えられる。

4. まとめ

本研究では、まず、分布ひび割れモデルに破壊エネルギーを適用する際に必要となる等価長さを評価することは、ひび割れ方向の平均幅をどのように考えるのかという問題に帰着されることを示した。次に、平均幅の考え方が異なる6つの等価長さモデルを提示し、要素寸法・要素形状が異なる4つの解析モデルに対してこれらの各等価長さモデルを適用して、せん断破壊となるRC梁の数値解析を行った。その結果、今回の検討では、主ひずみ方向と要素の交点の長さの最大値を等価長さとする方法が、解析結果の要素形状依存性を回避する上で最適であることが示された。

ただし、この等価長さの有効性はあくまで今回の限られた解析において示されたものであり、今後、より単純な解析による基礎的な検討や、各モデルによるひび割れ進展性状の比較検討等が必要であると考えられる。

【参考文献】

- [1] 破壊力学の応用研究委員会：破壊力学の応用研究委員会報告書，日本コンクリート工学協会，1993
- [2] 山谷敦，中村光，飯塚敬一，檜貝勇：回転ひび割れモデルによるRC梁のせん断挙動解析，コンクリート工学年次論文報告集，Vol.18，No.2，pp.359-364，1996.7
- [3] Dahlblom, O. and Ottosen, N. S. : Smeared Crack Analysis Using Generalized Fictitious Crack Model, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.116, No.1, pp.55-76, Jan. 1990
- [4] Nakamura, H. and Higai, T. : Fracture Zone and Fracture Energy of Concrete under Uniaxial Compressive Stress, Int. Conf. on Urban Engineering in Asian Cities in the 21st Century, pp.D105-D110, Nov.20-23, 1996, Bangkok, Thailand

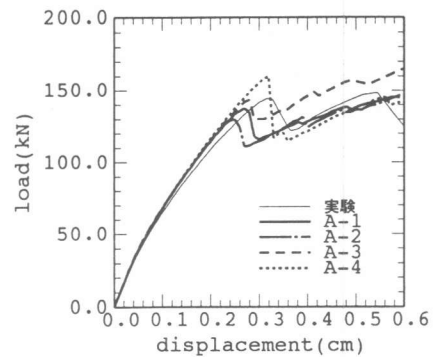


図-15 L-5(交点)の結果

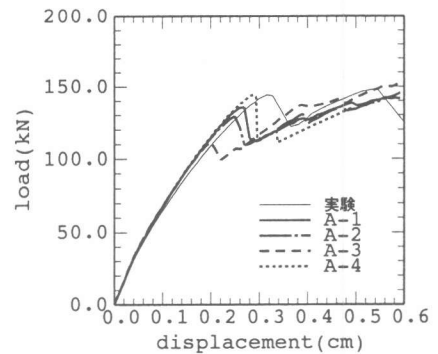


図-16 L-6(面積比)の結果

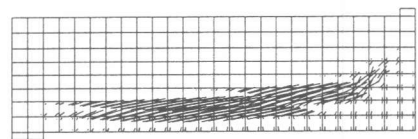


図-17 ひび割れ図(A-1, L-1)