

# 論文 BOTT-DUFFIN 逆行列による制御解析の性能設計への応用

佐藤 健\*1・柴田 明德\*2・源栄 正人\*3・渋谷 純一\*4

要旨：アクティブ制振建物の地震応答性能を規定するための制御解析手法として、BOTT-DUFFIN 逆行列を応用し、その性能設計用ソフトウェアとしての有効性を示す。また、復元力特性の違いが応答や制御力に与える影響について解析例を通して検討を行い、本手法による制御特性を明らかにする。

キーワード：性能設計、アクティブ制振、BOTT-DUFFIN 逆行列、復元力特性

## 1. はじめに

建築物の性能設計において、その地震応答性能をアクティブ制振によって規定化することが可能である。著者らは制約条件付きの連立方程式の解法としての BOTT-DUFFIN 逆行列<sup>1),2),3)</sup>を地震応答制御に対して応用を試みている<sup>4),9)</sup>。

そこで、本論文は地震応答性能として塑性率分布を制約した弾塑性地震応答制御解析に対して BOTT-DUFFIN 逆行列を応用し、数値解析例を示すとともに、復元力特性の違いによる本手法の制御特性について明らかにする。

## 2. BOTT-DUFFIN 逆行列による振動制御理論

### 2.1 基礎方程式

微小時間  $\Delta t$  内で構造物の瞬間接線剛性  $[K(t)]$  が一定値とした時の応答増分に関する運動方程式が、次式のような応答変位増分  $\{\Delta d\}$  に関する制約条件を伴う場合を考える。

$$[M]\{\Delta \ddot{d}\} + [K(t)]\{\Delta d\} = \{Af\} \dots\dots\dots (1)$$

$$[A]\{\Delta d\} = \{\Delta g\} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $\{\Delta \ddot{d}\}$ 、 $\{\Delta d\}$ : 加速度、変位の各増分ベクトル、 $[M]$ : 質量マトリクス、 $[K(t)]$ : 瞬間接線剛性マトリクス、 $\{Af\}$ : 外力増分ベクトル、 $[A]$ : (m,n)型制約条件マトリクス、 $\{\Delta g\}$ : 制約条件増分ベクトル、n: 自由度数、m: 制約条件数(n>m)。

式(1),(2)は次式で与えられる変位に関する制約条件付きの全ポテンシャルエネルギー関数の停留値問題と等価である。

$$\Delta \Pi = \frac{1}{2} \{\Delta \ddot{d}\}^T [M] \{\Delta \ddot{d}\} + \frac{1}{2} \{\Delta d\}^T [K(t)] \{\Delta d\} - \{Af\}^T \{\Delta d\} \dots\dots\dots (3)$$

$$[A]\{\Delta d\} = \{\Delta g\} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、上に Lagrange 乗数ベクトル  $\{\Delta \lambda\}$  を導入し、 $\{\Delta d\}$  と  $\{\Delta \lambda\}$  を未知量とする制約条件なしの停留値問題に変換する。その場合、全ポテンシャルエネルギー関数は次式となる。

$$\Delta \Pi_k = \frac{1}{2} \{\Delta \ddot{d}\}^T [M] \{\Delta \ddot{d}\} + \frac{1}{2} \{\Delta d\}^T [K(t)] \{\Delta d\} - \{Af\}^T \{\Delta d\} + \{\Delta \lambda\}^T ([A]\{\Delta d\} - \{\Delta g\}) \dots\dots\dots (5)$$

式(5)が瞬間最適制御の評価関数であり、 $\{\Delta d\}$  と  $\{\Delta \lambda\}$  の各成分で偏微分し、零とおくと、

$$[M]\{\Delta \ddot{d}\} + [K(t)]\{\Delta d\} + \{\Delta r\} = \{Af\} \dots\dots\dots (6)$$

$$[A]\{\Delta d\} - \{\Delta g\} = \{0\} \dots\dots\dots (7)$$

となり、 $\{\Delta d\}$  と  $\{\Delta \lambda\}$  を未知量とする運動方程式が得られたことになる。ここに、

$$\{\Delta r\} = [A]^T \{\Delta \lambda\} \dots\dots\dots (8)$$

式(6)の  $\{\Delta r\}$  は式(7)で指定される振動形状を保持するために必要となる節点力を意味し、 $-\{\Delta r\}$  が外力としての制御力増分となる。すなわち式(8)が本手法の制御則となる。

\*1 宮城工業高等専門学校講師 建築学科 工修 (正会員)

\*2 東北大学教授 工学部災害制御研究センター地震工学分野 工博 (正会員)

\*3 東北大学助教授 工学部災害制御研究センター地震工学分野 工博 (非会員)

\*4 宮城工業高等専門学校教授 建築学科 工博 (非会員)

ここで、式(4)を入力地震動増分  $\Delta \ddot{d}_0$  に対する運動方程式に粘性減衰を考慮して書き換えると、  
 $[M]\{\Delta \ddot{d}\} + [C]\{\Delta \dot{d}\} + [K(t)]\{\Delta d\} + \{\Delta r\} = -[M]\{1\}\Delta \ddot{d}_0$  .....(9)

となり、式(3),(4)で与えられる制約条件付きの最小化問題は式(9),(7)で与えられる  $\{\Delta d\}$  と  $\{\Delta r\}$  を未知量とする運動方程式に帰着された。

### 2.2 制約条件ベクトルの消去

式(7)の制約ベクトル  $\{\Delta g\}$  の消去を考え、新しいベクトル  $\{\Delta z\}$  を導入し、次式で変換する。

$$\{\Delta z\} = \{\Delta d\} - [A]^T \{\Delta g\} \dots\dots\dots(10)$$

ここで、 $[A]^+$  は  $[A]$  の一般逆行列で、 $[A]$  が  $(m, n)$  型マトリクスで、 $[A]$  のランクが  $m$  の時は、

$$[A]^+ = [A]^T ([A][A]^T)^{-1} \dots\dots\dots(11)$$

で得られる<sup>10)</sup>。式(10)を式(9),(7)に代入すると、

$$[M]\{\Delta z\} + [C]\{z\} + [K(t)]\{\Delta z\} + \{\Delta r\} = \{\Delta h\} \dots\dots(12)$$

$$[A]\{\Delta z\} = \{0\} \dots\dots\dots(13)$$

となる。ここに、

$$\begin{aligned} \{\Delta h\} &= -[M]\{1\}\Delta \ddot{d}_0 \\ &- [M][A]^+ \{\Delta g\} - [C][A]^+ \{\Delta g\} - [K(t)][A]^+ \{\Delta g\} \end{aligned} \dots\dots(14)$$

ここで、式(12)の  $\{\Delta z\}$  と  $\{\Delta r\}$  の直交性を示す。

$$\{\Delta z\}^T \{\Delta r\} = ([A]\{\Delta z\})^T \{\Delta r\} = 0 \dots\dots\dots(15)$$

従って、式(13)の付帯条件が式(15)の直交条件に置きかわったことになる。

### 2.3 運動方程式の一般化解法

制約条件マトリクス  $[A]$  の大きさを  $(m, n)$  型とし、すべての制約条件を独立と考えると、基本変形によって  $[A]$  は次式のように変換できる<sup>10)</sup>。

$$[P][A][Q] = [[I] \ 0] \dots\dots\dots(16)$$

$[P]$  と  $[Q]$  は基本変形の積により得られる正則マトリクスで、 $[Q]$  を用いて次の座標変換を行う。

$$\{\Delta z\} = [Q]\{\Delta v\} \dots\dots\dots(17)$$

$$\{\Delta r\} = [Q]^T \{\Delta r\} \dots\dots\dots(18)$$

$$\{\Delta s\} = [Q]^T \{\Delta h\} \dots\dots\dots(19)$$

上式を式(12)に代入し、左側から  $[Q]^T$  を掛け、

$$[\bar{M}]\{\Delta v\} + [\bar{C}]\{\Delta v\} + [\bar{K}(t)]\{\Delta v\} + \{\Delta s\} = \{\Delta s\} \dots\dots(20)$$

となる。ここに、

$$[\bar{M}] = [Q]^T [M] [Q] \dots\dots\dots(21)$$

$$[\bar{C}] = [Q]^T [C] [Q] \dots\dots\dots(22)$$

$$[\bar{K}(t)] = [Q]^T [K(t)] [Q] \dots\dots\dots(23)$$

また、式(13)に式(17)を代入し左側から  $[P]$  を掛けると、

$$[D]\{\Delta v\} = \{0\} \dots\dots\dots(24)$$

ここで、

$$[D] = [P][A][Q] = [[I] \ 0] \dots\dots\dots(25)$$

となり、式(12),(13)は式(20),(24)に変換された。

### 2.4 BOTT-DUFFIN 逆行列による解法

はじめに、式(20)の  $\{\Delta v\}$  と  $\{\Delta s\}$  の直交性を示す。式(17),(18),(15)から、

$$\{\Delta v\}^T \{\Delta s\} = \{\Delta z\}^T ([Q]^{-1})^T [Q]^T \{\Delta r\} = 0 \dots\dots\dots(26)$$

となる。 $L$  を  $n$  次元空間内の部分空間、 $L^\perp$  を  $n$  次元空間内の  $L$  に対する直交補空間とする。式(26)より  $\{\Delta v\}$  と  $\{\Delta s\}$  は直交し、 $\{\Delta v\} \in L$ 、 $\{\Delta s\} \in L^\perp$  となる。そこで、 $[P_L]$  を  $L$  上への正射影マトリクス、 $[P_{L^\perp}]$  を  $L^\perp$  上への正射影マトリクス、 $\{\Delta v\}$  を  $n$  次元空間内の任意のベクトルとすると、

$$\{\Delta v\} = [P_L]\{\Delta v\} \dots\dots\dots(27)$$

$$\{\Delta s\} = [P_{L^\perp}]\{\Delta v\} \dots\dots\dots(28)$$

が成立する。また、式(24)の係数マトリクスが式(25)に変換される場合の正射影マトリクスは、

$$[P_L] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [I]_{n-m} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(29)$$

$$[P_{L^\perp}] = \begin{bmatrix} [I]_m & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \dots\dots\dots(30)$$

を用いることができる<sup>10)</sup>。ここに、 $[I]$  は単位マトリクス、 $[0]$  は零マトリクスである。

また、式(27),(28)を式(20)に代入すると、

$$[\hat{M}]\{\Delta v\} + [\hat{C}]\{\Delta v\} + [\hat{K}(t)]\{\Delta v\} = \{\Delta s\} \dots\dots\dots(31)$$

となる。ここに、

$$[\hat{M}] = [\bar{M}][P_L] \dots\dots\dots(32)$$

$$[\hat{C}] = [\bar{C}][P_L] \dots\dots\dots(33)$$

$$[\hat{K}(t)] = [\bar{K}(t)][P_L] + [P_{L^\perp}] \dots\dots\dots(34)$$

式(31)の変位増分について解けば、

$$\{\Delta v\} = [\hat{K}(t)]^{-1} \{\Delta \bar{p}\} \dots\dots\dots(35)$$

ここで、

$$[\hat{K}(t)] = \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} [\hat{M}] + \frac{1}{2\beta \cdot \Delta t} [\hat{C}] + [\hat{K}(t)] \dots\dots\dots(36)$$

$$\{\Delta \bar{p}\} = \{\Delta s\} + [\hat{M}] \left( \frac{1}{\beta \cdot \Delta t} \{\dot{y}_j\} + \frac{1}{2\beta} \{\ddot{y}_j\} \right) \dots\dots\dots(37)$$

$$+ [\hat{C}] \left( \frac{1}{2\beta} \{\dot{y}_j\} + \left( \frac{1}{4\beta} - 1 \right) \{\ddot{y}_j\} \Delta t \right)$$

$$\{\Delta s\} = -[Q]^T[M]^{-1}\{1\}\Delta\ddot{d}_0 - [Q]^T[M][A]^+\{\Delta g\} \dots\dots\dots(38)$$

$$- [Q]^T[C][A]^+\{\Delta \dot{g}\} - [Q]^T[K(t)][A]^+\{\Delta g\}$$

$$\Delta\ddot{d}_0 = \ddot{d}_{0,j+1} - \ddot{d}_{0j} \dots\dots\dots(39)$$

$$\{\Delta \dot{g}\} = \{\dot{g}_{j+1}\} - \{\dot{g}_j\} \dots\dots\dots(40)$$

$$\{\Delta g\} = \{g_{j+1}\} - \{g_j\} \dots\dots\dots(41)$$

$$\{\Delta g\} = \{g_{j+1}\} - \{g_j\} \dots\dots\dots(42)$$

また、式(35)を式(27)に代入すると、

$$\{\Delta v\} = [P_L][\hat{k}(t)]^{-1}\{\Delta p\} \dots\dots\dots(43)$$

となり、式(43)の右辺の係数マトリクスを BOTT-DUFFIN 逆行列と呼ぶ。従って、最終的な応答変位増分は、式(27),(17),(10)を用い、制御力増分は式(28),(18)を用いて各々求まる。

$$\{\Delta d\} = [Q][P_L]\{\Delta v\} + [A]^+\{\Delta g\} \dots\dots\dots(44)$$

$$-\{\Delta r\} = -([Q]^T)^{-1}[P_L]\{\Delta v\} \dots\dots\dots(45)$$

式(44)を次式に代入し時刻歴応答が逐次求まる。

$$\{d_{j+1}\} = \{d_j\} + \{\Delta d\} \dots\dots\dots(46)$$

### 3. 数値解析例

#### 3.1 解析モデル

解析モデルは、柱 RC 梁 S 混合構造の基礎固定のせん断型 5 質点系モデルとした。重量は各階均等重量で 960.4kN、弾性剛性は、鉄骨造の略算固有周期 0.54 秒で、逆三角形 1 次モードとなるような弾性剛性を次式により求めた。

$$K_{iv} = \frac{1}{2}\{N(N+1) - i(i-1)\}m\omega^2 \dots\dots\dots(47)$$

$\omega$ : 1 次円振動数,  $m$ : 各階質量,  $N$ : 全階数,  $i$ : 階数。

各層の降伏耐力は、ベースシアの降伏震度 0.3 の  $A_i$  分布とした。また、履歴特性は柱梁接合部の構造特性に応じ、Fig.1 に示すバイリニア型とスリップ型との複合型<sup>11),12)</sup>とし、各履歴モデルの成分比率を解析パラメータとした。なお、降伏後剛性は各層の弾性剛性の 5%、減衰は 1 次モードに対し 3%の初期剛性比例型とした。解析モデルの構造特性値を table.1 に示す。

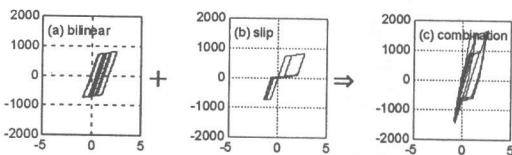


Fig.1 Characteristic of hysteresis model

Table.1 structural characteristics of analytical model

story	W(kN)* <sup>1</sup>	K <sub>i</sub> (kN/cm)* <sup>2</sup>	Q <sub>y</sub> (kN)* <sup>3</sup>
5(top)	960.4	662.68	529.98
4	960.4	1192.86	856.81
3(mid)	960.4	1590.54	1110.54
2	960.4	1855.63	1303.60
1(1st)	960.4	1988.13	1440.60

\*<sup>1</sup> W:weight, \*<sup>2</sup> K<sub>i</sub>:elastic stiffness, \*<sup>3</sup> Q<sub>y</sub>:yeild strength

#### 3.2 制約条件

地震応答性能規定の一例として、各層の塑性率分布を規定することを考え、各層の塑性率を一定(全層等分布)に制御する場合の制約条件を次式のように与えた。

$$\begin{bmatrix} 1.970 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.933 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3.924 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5.028 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta d_1 \\ \Delta d_2 \\ \Delta d_3 \\ \Delta d_4 \\ \Delta d_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(48)$$

ここで、各層の塑性率  $\mu_i$  を次式で定義する。

$$\mu_i = \delta_{imax} / \delta_{yi} \dots\dots\dots(49)$$

ここに、 $\delta_{imax}$  は最大応答層間変位、 $\delta_{yi}$  は各層の降伏層間変位を示す。また、式(48)に示す制約条件マトリクスの 1 列目の各要素は、

$$A(m,1) = 1 + \frac{\sum_{j=1}^i \delta_{yj}}{\delta_{y1}} \quad (m=1,2,3,4, i=m+1) \dots\dots\dots(50)$$

で求められる。すなわち、最下層の相対変位に対する各層の相対変位の比が式(50)の右辺のように降伏変位を用いて表現することができる。

#### 3.3 入力地震動

入力地震動は 1995 年兵庫県南部地震の際に神戸海洋気象台で観測された NS 成分の加速度波形の主要動部分 20 秒間を基線補正した上で、最大速度 40kine に振幅調整を行った。(Fig.2)

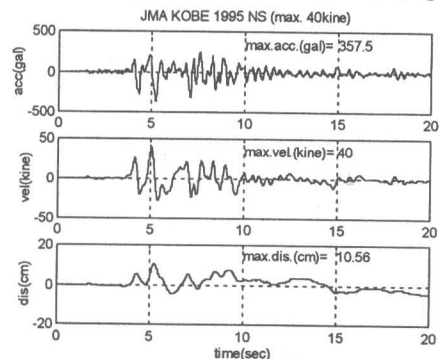


Fig.2 Input ground motion

### 3.4 解析結果

まず、複合型の履歴特性に占めるバイリニア成分の割合が 100% の場合の非制御、および制御した場合の解析結果を示す。制御した場合の塑性率を Fig.3(g) で見ると、各層の塑性率一定の制約条件を満足している。

Fig.3.(a),(e) より、非制御との比較で、制御した場合は下層部ほど応答加速度の低減が著しい。また、層間変位は Fig.3.(b),(f) より、上層部で層間変位が増大し、下層部で減少している。

制御力は最下層が最大で、最大制御力は建物

総重量の約 5% 程度と現実的なレベルである。

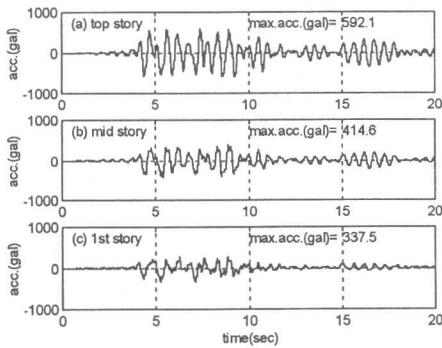


Fig.3(a) Acceleration responses (no control)

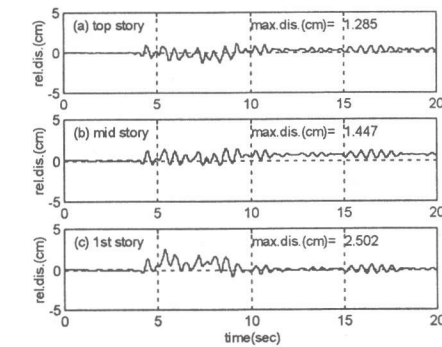


Fig.3(b) Displacement responses (no control)

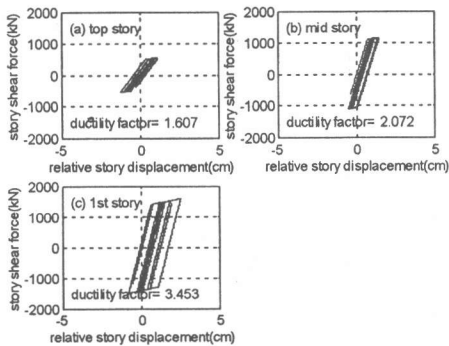


Fig.3(c) Hysteresis loops (no control)

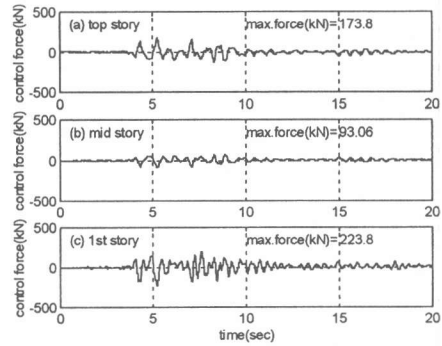


Fig.3(d) Control forces (control)

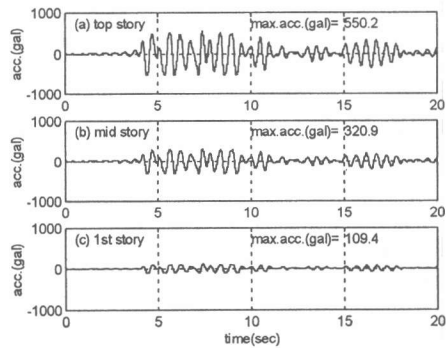


Fig.3(e) Acceleration responses (control)

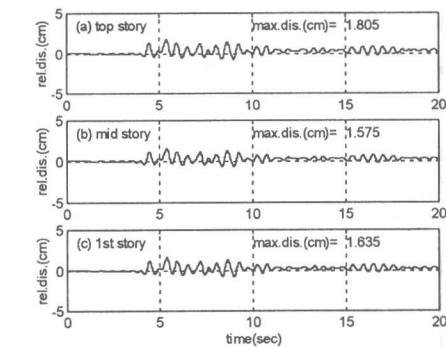


Fig.3(f) Displacement responses (control)

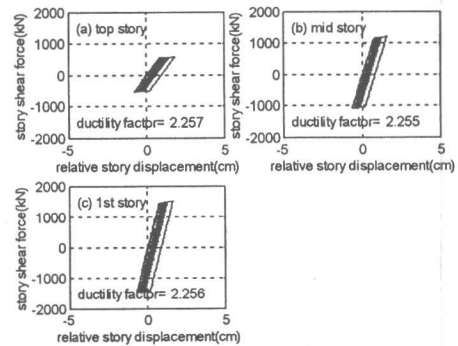


Fig.3(g) Hysteresis loops (control)

次に、複合型の履歴特性に占めるスリップ成分の割合が 100% の場合の非制御、および制御した場合の解析結果を示す。制御した場合の塑性率を Fig.4(g)で見ると、各層の塑性率一定の制約条件を満足している。

Fig.4.(a),(e)より、非制御の場合の応答加速度は瞬間的に大きな応答が生じるが、制御した場合は下層部ほど応答低減が著しく、その応答レベルもバイリニア成分 100% の場合の制御結果と同程度のレベルである。

制御力は最下層が最大で、最大制御力は建物

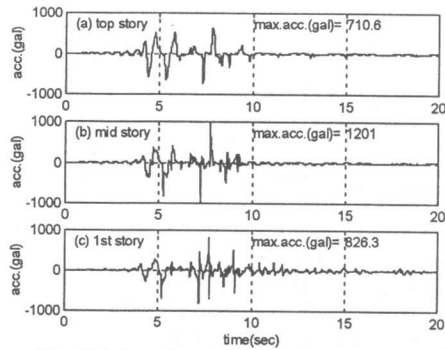


Fig.4(a) Acceleration responses (no control)

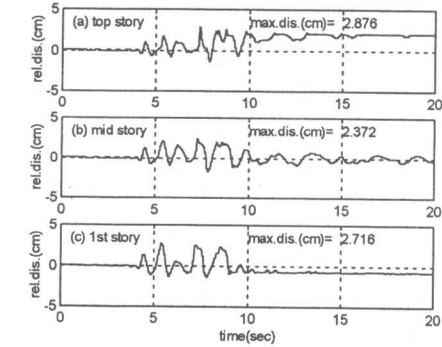


Fig.4(b) Displacement responses (no control)

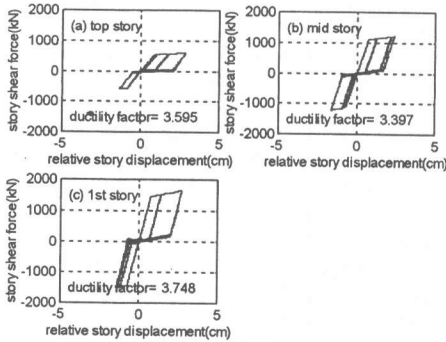


Fig.4(c) Hysteresis loops (no control)

総重量の約 5%程度と現実的なレベルである。

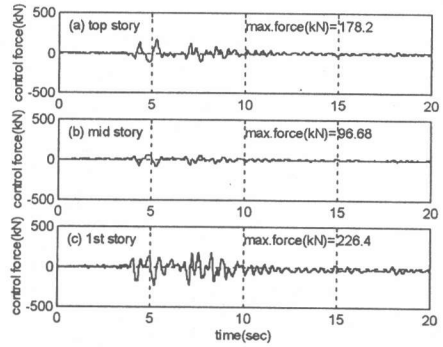


Fig.4(d) Control forces (control)

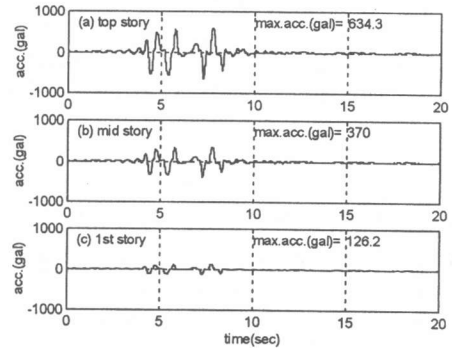


Fig.4(e) Acceleration responses (control)

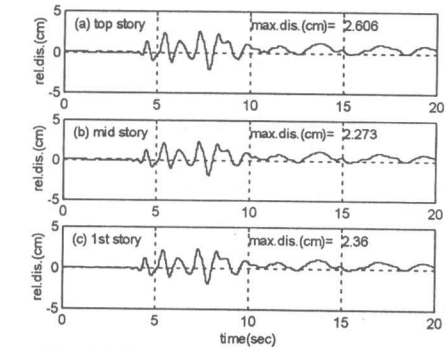


Fig.4(f) Displacement responses (control)

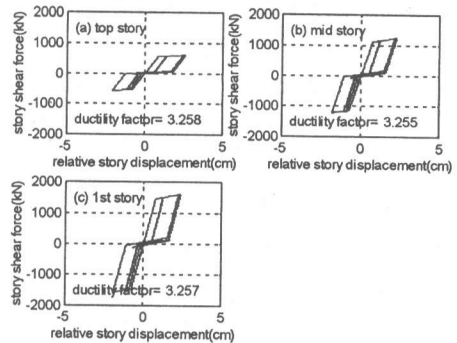


Fig.4(g) Hysteresis loops (control)

さらに、バイリニア型とスリップ型との成分比率を 25%, 50%, 75%とした場合の解析結果を Fig.5,6 に示す。いずれも横軸は複合型の履歴特性に占めるバイリニア成分の割合を示す。

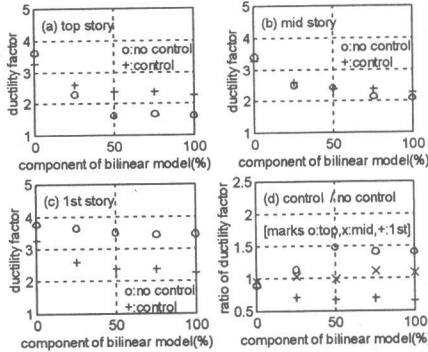


Fig.5 Response characteristics by hysteresis models and control

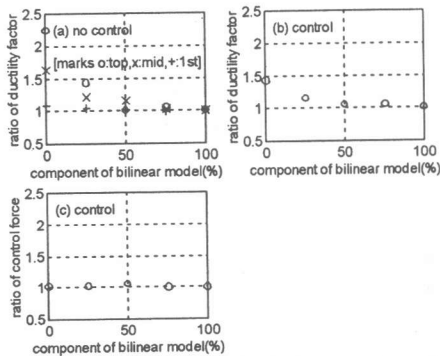


Fig.6 Control characteristics by hysteresis models

Fig.5(a)~(c)に各成分比率における各層の塑性率を非制御、制御の場合で示す。式(48)の制約条件下で制御した場合の塑性率は、非制御と比較すると上層部で増大し、下層部で減少する傾向が何れの成分比率においてもほぼ共通に見られ、制御により特定層への損傷集中を緩和している。Fig.5(d)に非制御時の塑性率に対する制御時の塑性率の比を示す。バイリニア成分が多くなるにつれ、塑性率比の変動が大きくなる。

また、バイリニア成分 100%の場合の塑性率に対する各成分比率における塑性率の比を Fig.6(a),(b)に示す。Fig.6(a)が非制御、Fig.6(b)が制御の場合である。非制御の場合はスリップ成分が多くなると上層ほど塑性率比が大きくなる傾向がある。制御の場合はスリップ成分が

100%の場合で 5 割程度応答が増大する。

さらに、バイリニア成分 100%の場合の最大制御力に対する各成分比率における最大制御力の比を Fig.6(c)に示す。復元力モデルの成分比率によらず最大制御力はほぼ一定である。

#### 4. まとめ

フィードフォワード型の新しい地震応答制御手法として BOTT-DUFFIN 逆行列の応用を弾塑性問題に対して試みた。本手法を用いることで、制御階にセンサーを設置せずに地動センサーのみで振動形状制御が可能となる。

また、制約条件により地震応答性能を多様に規定することができることから、性能設計用ソフトウェアとして本手法を適用できる可能性を変位制約問題の解析例を通して示した。

#### 謝辞

本研究は日本計算工学会「第1研究分科会：形態非線形解析問題の調査・研究（主査：東京大学生産技術研究所教授 半谷裕彦）」における研究成果の一部であります。研究グループの関係諸氏には貴重なご意見を頂きました。ここに感謝の意を表わします。

#### 参考文献

- 1) R.BOTT and R.J.DUFFIN:ON THE ALGEBRA OF NETWORKS,Trans.Am.Math.Soc.,Vol.74,pp99-109,1953
- 2) Maciej Domaszewski and Adam Borkowski : Generalized Inverses in Elastic-Plastic Analysis of Structures , J.STRUCT.MECH.,12(2),pp219244,1984
- 3) 計算工学会第1研究分科会:Bott-Duffin 逆行列による変位拘束を持つ構造物の解析,1995.3
- 4) 半谷裕彦ほか:BOTT-DUFFIN 逆行列の静的及び動的解析への応用,計算工学講演会論文集,Vol.2, pp41-44,1997.5
- 5) 佐藤健ほか:Bott-Duffin 逆行列による建築物の地震応答制御,日本建築学会東北支部研究報告集,第60号,pp437-440,1997.6
- 6) 佐藤健ほか:Bott-Duffin 逆行列による複合型制振建物の地震応答制御,日本建築学会大会学術講演梗概集,pp761-762,1997.9
- 7) 佐藤健ほか:Bott-Duffin 逆行列の地震応答制御への応用,日本建築学会技術報告集,第5号,1997.12
- 8) 佐藤健ほか:Bott-Duffin 逆行列の弾塑性地震応答制御への応用,構造工学論文集,Vol.44B,1998.3(投稿中)
- 9) 佐藤健ほか:Bott-Duffin 逆行列による建築物のアクティブ制震,第47回応用力学連合講演会,1998.1
- 10) 半谷裕彦,川口健一:形態解析,培風館,1991.4
- 11) 例えば,山本哲夫ほか:プレキャストコンクリート柱と鉄骨梁で構成された混合構造工法に関する研究開発(その2 実験結果および検討),日本建築学会大会学術講演梗概集,pp1201-1202,1990.10
- 12) 西山功:合成構造の設計法と問題点,混合構造柱RCはりS),コンクリート工学,Vol.28,No.10,pp70-76,1990.10