

論文 平面格子の等価連続体化法による RC 材料の構成則の構築

久米敦子*1・余国雄*2・Fawzy Mohamed EL-BEHAIRY*3・二羽淳一郎*4

要旨: 本研究ではひび割れたコンクリート体を格子の 1 または 2 成分と考え、単純な一軸応力ひずみ関係を用い、鉄筋と共同して格子モデルを形成することを考える。さらに、この格子モデルを等価な連続体構成式へと導くことによって、より簡易と思われる RC 要素構成則を検討する。また、この構成則を用いて RC 部材の変形解析において重要な意味を持つと言われている直交異方性についても検討した。さらに解析結果を実験データと比較することによって、本モデルの有望性が認められた。

キーワード: 格子モデル, 連続体構成式

1. 序論

RC 構造の解析はひび割れたコンクリート体の方向性を精度よく表す必要があり、コンクリートの応力-ひずみ関係を正確に記述することは、最も基本的な要件である。従来、コンクリートの構成則に関する研究は膨大な数にのぼり、当研究室だけでも、2 次元、3 次元塑性モデルを始め、2 次元、3 次元マイクロプレーンモデルに関する研究成果が公表されている。これらはいずれも厳密な理論構成の上でモデルが構築されているものの、実際の応用となると、多くの計算時間が必要で、簡便な利用は不可能であることも多い。そのため本研究ではひび割れを有するコンクリート体を図-2 のような格子状モデルとして取り扱い、単純な一軸応力-ひずみ関係を用い、鉄筋と共同して格子モデルを形成することを考える。さらに、この格子モデルを等価な連続体構成式へと導くことによって、より簡易と思われる RC 要素構成則を検討してみる。従来、ひび割れたコンクリート体の解析を行う場合、コンクリートのひび割れの角度は 45 度に固定されることが多かったが、本研究で提案する構成則はこの角度を固定しないで、パ

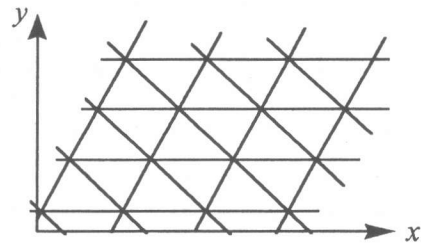


図-1 格子平面

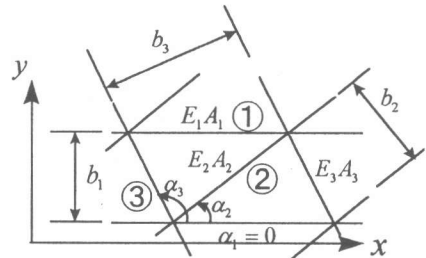


図-2 格子平面の一部

ラメータとして扱うことができる。さらにその構成則による解析結果を実験結果と比較し、本研究の妥当性を検証する。

2. 平面格子の連続体化への理論

*1 名古屋大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (正会員)

*2 名古屋大学助手 工学部土木工学科 工博 (正会員)

*3 名古屋大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (正会員)

*4 東京工業大学教授 工学部土木工学科 工博 (正会員)

2. 1 剛性マトリックスの作成

図-1 のように平行なバーの列を持つ格子平面を考える。格子が存在している連続体のひずみを $\varepsilon = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T$, 格子の応力を

$f = [f_x \ f_y \ f_{xy}]^T$ とする。ここで、 f の単位は N/m である。この格子平面の一部を取り出し、図-2 に示す。 i 番目の列の方向角を α_i , その剛性を $E_i A_i$, 平行な列の間の距離を b_i とする。各部材の部材方向のひずみを $\hat{\varepsilon}$ とすると連続体のひずみ ε より、ひずみの回転マトリックスを用いて、

$$\hat{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_i & \sin^2 \alpha_i & \cos \alpha_i \sin \alpha_i \\ \cos^2 \alpha_i & \sin^2 \alpha_i & \cos \alpha_i \sin \alpha_i \\ \cos^2 \alpha_i & \sin^2 \alpha_i & \cos \alpha_i \sin \alpha_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

と表すことができる。次に応力であるが、格子部材はすべて一軸応力状態とするので、その部材方向の応力 \hat{f} は

$$\hat{f} = R_n \hat{\varepsilon} \quad (2)$$

となり、ここで、

$$R_n = \begin{bmatrix} r_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & r_i & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & r_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$r_i = \frac{E_i A_i}{b_i}$$

である。応力の回転マトリックスを適用することによって、格子の応力 f は、

$$f = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_i & \cdots & \cos^2 \alpha_i & \cdots & \cos^2 \alpha_i \\ \sin^2 \alpha_i & \cdots & \sin^2 \alpha_i & \cdots & \sin^2 \alpha_i \\ \cos \alpha_i \sin \alpha_i & \cdots & \cos \alpha_i \sin \alpha_i & \cdots & \cos \alpha_i \sin \alpha_i \end{bmatrix} \hat{f} = L_i^T \hat{f} \quad (4)$$

となる。したがって、

$$f = L_\varepsilon^T R_n L_\varepsilon \varepsilon = D \varepsilon \quad (5)$$

となり、剛性マトリックス D が次式で求められる。

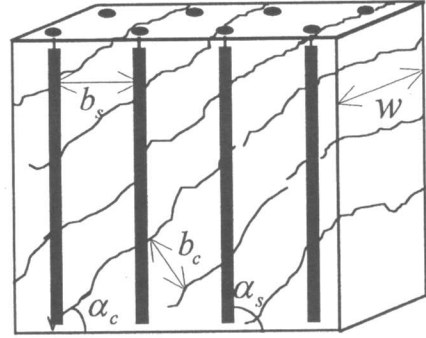


図-3 ひびわれが発生した RC 要素

$$D = \begin{bmatrix} \sum_i r_i \cos^2 \alpha_i & \sum_i r_i \cos^2 \alpha_i \sin^2 \alpha_i & \sum_i r_i \cos^2 \alpha_i \sin \alpha_i \\ \text{symm.} & \sum_i r_i \sin^2 \alpha_i & \sum_i r_i \cos \alpha_i \sin^2 \alpha_i \\ & & \sum_i r_i \cos^2 \alpha_i \sin^2 \alpha_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

2. 2 RC2 次元要素への適用

式(6)より得られた剛性マトリックスを RC2 次元要素に適用する場合、コンクリートと鉄筋をそれぞれトラス部材におきかえることになる。図-3 のような要素について考える。コンクリートについては断面積はひび割れの間隔と厚さの積であると考えられるので、コンクリート、鉄筋をモデル化したものをそれぞれ r_c, r_s とすると、

$$r_c = \frac{E_c A_c}{b_c} = \frac{E_c b_c w}{b_c} = E_c w \quad (7)$$

$$r_s = \frac{E_s A_s}{b_s}$$

となる。ひび割れや鉄筋が複数ある場合も同様にする。

2. 3 一般的なはり部材の要素剛性の特質

直交異方性は RC 部材の変形解析において重要な意味を持つと言われている。そこで、直交異方性になる条件について調べてみる。 xy 座標を角 φ だけ回転させた $\xi\eta$ 座標における回転後の剛性マトリックス \tilde{D} は D の α_i を $\alpha_i - \varphi$ で置き換えたもので表すことができる。この剛性マトリックス \tilde{D} の \tilde{D}_{13} 成分と \tilde{D}_{23} 成分が同時に 0

を満たすとき、すなわち、次の 2 式を同時に満たすとき、直交異方性である。

$$\tilde{D}_{13} = \sum_{i=1}^n r_i \cos^3(\alpha_i - \varphi) \sin(\alpha_i - \varphi) = 0 \quad (8)$$

$$\tilde{D}_{23} = \sum_{i=1}^n r_i \cos(\alpha_i - \varphi) \sin^3(\alpha_i - \varphi) = 0 \quad (9)$$

これらを整理すると

$$4(D_{13} - D_{23}) \cos 4\varphi - (D_{11} + D_{22} - 6D_{12}) \sin 4\varphi = 0 \quad (10)$$

$$2(D_{13} + D_{23}) \cos 2\varphi - (D_{11} - D_{22}) \sin 2\varphi = 0 \quad (11)$$

が得られる。これより、

直交異方性条件

$$D_{11} + D_{22} - 6D_{12} - (D_{11} - D_{22}) \left(\frac{D_{11} - D_{22}}{D_{11} + D_{22}} - 4 \frac{D_{11} + D_{22}}{D_{11} - D_{22}} \right) = 0 \quad (12)$$

主方向角

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \left(2 \frac{D_{13} + D_{23}}{D_{11} - D_{22}} \right) \quad (13)$$

となる。すなわち、求めた剛性マトリックスが式(12)をみたすならば、それは直交異方性であるといえる。

ここで、例として、よく現れる鉄筋コンクリートはりのせん断問題における構成則を考えてみる。引張鉄筋とスターラップの断面積がそれぞれ A_s 、 A_w で、有効高さが d 、スターラップの間隔が s 、厚さが w であるはり部材を考える。また、コンクリートのひび割れは 45 度に発生すると考えると、

$$\tilde{D}_n = 2E_s w \cos 2\varphi + \left(E_s w - \frac{E_s A_s}{d} - \frac{E_s A_s}{s} \right) \sin 4\varphi - 2 \left(\frac{E_s A_s}{d} - \frac{E_s A_s}{s} \right) \sin 2\varphi \quad (14)$$

$$\tilde{D}_n = 2E_s w \cos 2\varphi - \left(E_s w - \frac{E_s A_s}{d} - \frac{E_s A_s}{s} \right) \sin 4\varphi - 2 \left(\frac{E_s A_s}{d} - \frac{E_s A_s}{s} \right) \sin 2\varphi \quad (15)$$

となる。式(14)と式(15)の 2 式が同時に 0 をみたすとき直交異方性となるが、この 2 式は同時に 0 になることはない。これは、RC はりのせ

ん断変形にともなう、ダイラタンシー、すなわち体積変化が生じることを意味している。したがって、ひび割れの角度を 45 度に固定すると鉄筋の断面積などのパラメータを変化させても直交異方性にはならない。そこで、 \tilde{D}_{13} 成分と \tilde{D}_{23} 成分のどちらか一方が 0 となるときを考える。いくつかの数値計算を行ったところ、 $\tilde{D}_{13} = 0$ となるときの φ を φ_1 、 $\tilde{D}_{23} = 0$ となるときの φ を φ_2 とすると、 $\varphi_1 + 90^\circ = \varphi_2$ の関係があることがわかった。

次に、互いに垂直な 2 方向の鉄筋を持つ RC 壁において、この構造物が直交異方性になるときのコンクリートのひび割れの方向角 α_1 を考える。鉄筋の方向角をそれぞれ $\alpha_2 = 0$ 、 $\alpha_3 = 90^\circ$ とすると、直交異方性条件より、

$$\cos^2 \alpha_1 = \frac{-r_2(-r_1 + r_2 - r_3)}{r_1(r_2 + r_3) - (r_2 - r_3)^2} \quad (16)$$

したがって、 α_1 が式(16)をみたすとき、直交異方性となる。またそのときの主方向角 φ は、式(13)より、

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{2r_1 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1}{r_1(2\cos^2 \alpha_1 - 1) + r_2 - r_3} \quad (17)$$

である。このように、ひび割れの角度をパラメータとしたとき、RC 部材が直交異方性となる主方向角 φ が存在することがわかった。

3. 実験データとの比較

3.1 RC 壁の実験との比較

(1) 解析方法

式(6)で表される剛性マトリックスを用いると、2 次元平面応力状態での応力ひずみ関係は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (18)$$

比較のために用いた実験データは Collins らの実験²⁾によるものである。ここで用いた供試体は、荷重はせん断力のみで、 x 方向と y 方向の鉄筋比はそれぞれ 1.306%、1.785%である。この供試体の $\tau_{xy} - \varepsilon_x$ 関係、 $\tau_{xy} - \varepsilon_y$ 関係、 $\tau_{xy} - \gamma_{xy}$ 関係を求めた。ここで、ひび割れ、 x 方向の鉄筋、 y 方向の鉄筋がなす角度をそれぞれ α_1 、 α_2 、 α_3 とした。このとき、コンクリートのひび割れ発生後の鉄筋の角度の変化も考慮して、 E_c 、 α_1 、 α_2 、 α_3 をパラメータとして変化させた。解析においては鉄筋は完全弾性体であると仮定し、ヤング率は $E_s = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$ とした。

(2) 実験結果と解析結果の比較

パラメータをさまざまに変化させた数値実験を行った結果、実験値とほぼ一致させることができるパラメータを同定することが可能となった。これらのパラメータは

$$E_c = 1.5 \times 10^4 \text{ MPa},$$

$$\alpha_1 = 135^\circ, \alpha_2 = -3^\circ, \alpha_3 = 93^\circ$$

であった。実験結果および解析結果を図-4 に示す。ここで、せん断応力 τ_{xy} の単位は MPa である。 α_2 と α_3 は荷重を作用させる前は理論上それぞれ 0° 、 90° であるが、鉄筋の dowel 効果により、同定された値は数度ほどずれた値となっている。また数値実験の過程において α_2 、 α_3 のパラメータはかなり敏感に変形挙動に影響を及ぼすことが示された。ゆえにせん断力を受ける鉄筋コンクリートの変形においては dowel 効果の影響がかなり大きいと考えられる。このような単純なモデルで、せん断変形時の体積変形まで表し得ることが示されたが、これは、本モデルの有効性を示すものであって、厳密な構成モデルでも、なかなか簡単ではないと言われている。

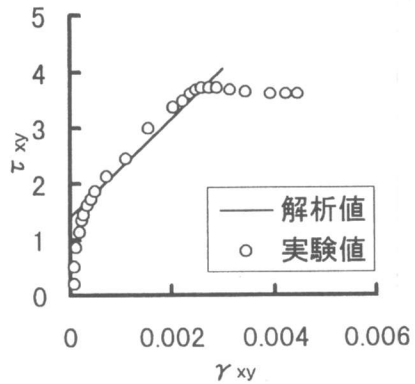
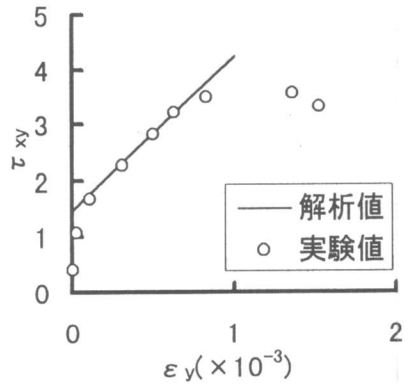
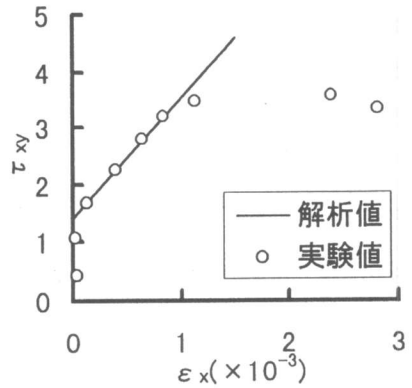
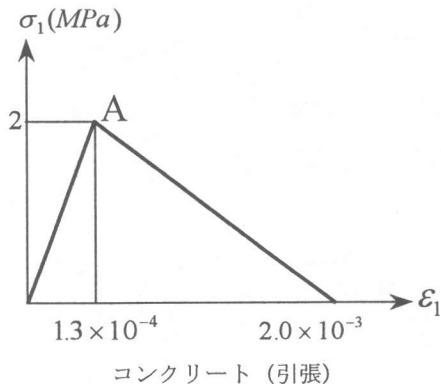


図-4 応力ひずみ関係

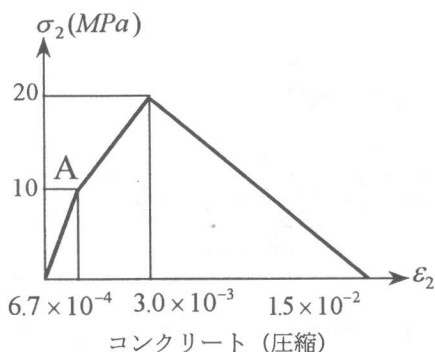
3. 2 RC はりの実験との比較

(1) 解析方法

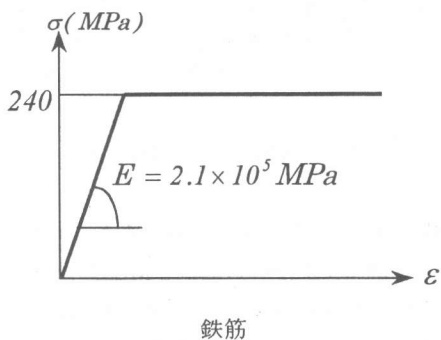
実験に用いたはりの供試体は Type-A、Type-B の 2 種類である (図-6)。Type-A はスターラップ量が極端に少なく、一方、Type-B は Type-A に比べ、約 4 倍のスターラップ量である。実験は荷重の単純漸増載荷で行い、スパン中央点の



コンクリート (引張)



コンクリート (圧縮)



鉄筋

図-5 材料の応力ひずみ関係

たわみを測定した。

この実験を有限要素法により非線形解析した。要素は 4 節点アイソパラメトリック要素を用いた。この解析に用いた各材料の応力-ひずみ関係を図-5 に示す。

解析では図-5 において、各要素のコンクリートの引張、圧縮応力のどちらも A 点を超えていないときは連続体として扱った。このときコンクリートと鉄筋はともに等方弾性体とするの

で、それぞれの剛性マトリックス D_c 、 D_s は 2 次元応力状態で、

$$D_c = \frac{E_c}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$D_s = \begin{bmatrix} E_s & 0 & 0 \\ 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

と書ける。ここで、 ν はポアソン比で $\nu = 0.15$ とした。本研究の構成則の応力の単位は N/m となっているので、コンクリート、鉄筋の厚さを t_c 、 t_s とし、剛性マトリックスに、

$$D = t_c D_c + t_s D_s \quad (21)$$

を適用した。

次に、コンクリートの引張、圧縮応力のどちらかが A 点を超えたら、格子モデルとして扱うこととする。格子モデルは、コンクリートの引張、圧縮およびスターラップの 3 部材からなっている。

(2) 実験結果と解析結果の比較

図-7 に実験結果および解析結果を示す。

Type-A、Type-B とも解析の方が、多少硬い傾向を示しているが、Type-B については荷重の最大値はほぼ一致している。図-8 に破壊時の要素ごとのひび割れの方向を示す。線の太さはひび割れの大きさを表している。スターラップ量が極端に少ない Type-A は斜めひび割れが生じ、スターラップが入っている Type-B には曲げひび割れが生じ、さらに圧縮部のコンクリートが圧壊していることがわかる。図-8 より、解析においても斜めひび割れの発生をよくシミュレートできていることがわかる。

4. 結論

以上、比較的簡単な理論によって、ひび割れたコンクリート体を格子モデルに置き換え、さらに等価な連続体構成式に導き、構成則を構築した。はり部材の要素剛性の特質についてもすべてのパラメータについてはではないが、一部の

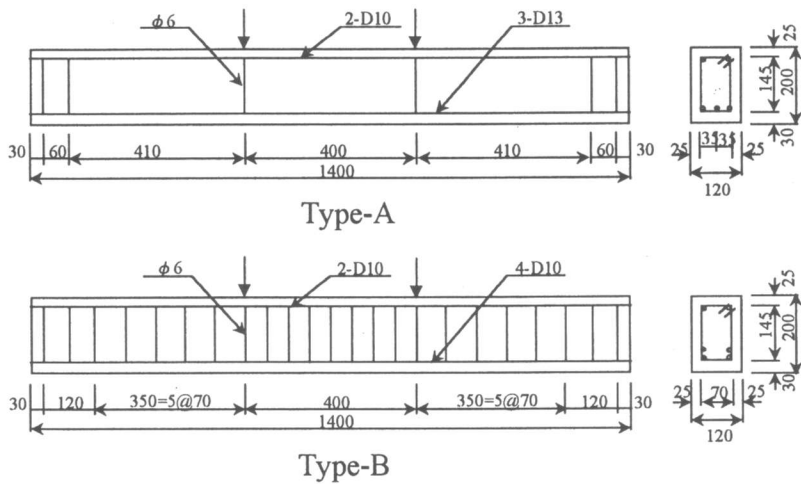


図-6 供試体の寸法, 配筋, 載荷点

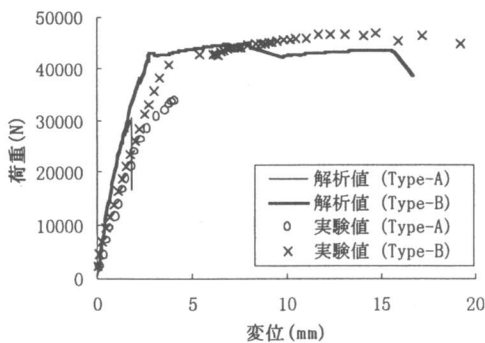


図-7 荷重変位曲線

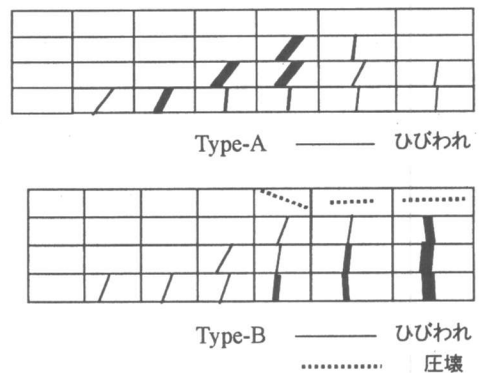


図-8 破壊時のひびわれの方向

ものについては定式化することができた。この構成則での解析結果を Collins の実験や RC はりの実験の結果と比較したところ、どれも実験値に近い値が得られた。また、本モデルにより、せん断変形時の体積変化まで表し得ることが示された。したがって、本モデルの有望性が認められた形となったが、さらに詳細な検討が必要であることは言うまでもない。

参考文献

1) Kollar, L. and Hegedus, I. : Analysis and Design of Space Frames by the Continuum Method, Elsevir, pp. 118-127, 1985

2) Vecchio, F. J. and Collins, M. P. : The Response of Reinforced Concrete to In-plane Shear and Normal Stresses, University of Toronto Publication, No.82-03, Mar. 1982
 3) Owen, D. R. J. and Hinton, E. : Finite Element in Plasticity : Theory and Practice, Pineridge Press, pp. 3-269, 1980