

論文 マイクロプレーンモデルを用いた繰り返し载荷を受ける RC ティモシェンコはりの解析

丸尾 宗朋*1・田辺 忠顕*2

要旨:コンクリート構成則には、数多くのものがあるが、その多くは一軸圧縮試験のマクロ挙動に基づき提案されているため、多軸応力状態への適用には困難を伴う。そこで、コンクリート内のマイクロ挙動に注目する事で提案されたマイクロプレーンモデルを用いて、従来のはり理論とは異なりせん断変形を考慮した繰り返し载荷を受ける RC ティモシェンコはりの解析を行った。

キーワード:マイクロプレーン、ティモシェンコはり

1. 序論

マイクロプレーンモデルは、コンクリート内の微視的な挙動に注目して提案された構成則モデルである。複合非均質材料であるコンクリートの巨視的な(マクロの)非線形挙動が、コンクリート内の微視的な(マイクロの)挙動,すなわち骨材-モルタル間の界面(マイクロプレーン)に生じるマイクロクラックによるものであるという仮定がこの構成則モデルにおける最大の特徴である。

本研究では、我々の研究室において行われた Farahat らによる 2 次元領域のマイクロプレーンモデルに基づく構成則モデルをファイバーモデル¹⁾によるはり要素非線形有限要素解析プログラムに組み込み、繰り返し载荷を受ける RC ティモシェンコはりに対しシミュレーション解析を行い、マイクロプレーンモデルの有限要素解析におけるコンクリートの構成則としての有効性の検証を行った。

2. マイクロプレーンモデル

2.1 マイクロプレーンの理想化

マイクロプレーンモデルでは、コンクリー

トは骨材粒子とモルタル粒子の 2 種類の粒子によって構成されるものと理想化される。この理想化により、コンクリート中において骨材粒子相互、骨材粒子-モルタル粒子の接触面の存在を考慮することができる。

2.2 平均接触点力増分で表した平均マクロ応力増分

ある領域内における平均的なマクロ応力増分を、粒子相互の接触点に働く力の増分,すなわち接触点力増分で表すことを考える。

ひとつの粒子に注目し、体積 v の粒子 p がマクロ応力増分 $\Delta\bar{\sigma}_i$ を受け、この粒子の応力状態が釣り合っているならば、平均マクロ応力増分 $\Delta\bar{\sigma}_i^p$ は、以下のように書くことができる。

$$\Delta\bar{\sigma}_i^p = \frac{1}{v} \int_V \Delta\sigma_{ij} dv \quad (1)$$

体積 V の任意の大きさの領域についての平均マクロ応力増分 $\Delta\bar{\sigma}_i$ を、この領域に含まれる骨材、モルタル両粒子のすべてのものに対するマクロ応力増分の和であると定義すると、式(2)のように書くことができる。

*1 名古屋大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (正会員)

*2 名古屋大学 工学部土木工学科 工博 (正会員)

$$\Delta\bar{\sigma}_v = \frac{1}{V} \sum_a \Delta\bar{\sigma}_{va} + \frac{1}{V} \sum_m \Delta\bar{\sigma}_{vm} \quad (2)$$

ここで、添え字 a, m はそれぞれ骨材 (aggregate), モルタル (mortar) を表している。式(2)は以下のように変形される。

$$\Delta\bar{\sigma}_v = \frac{1}{V} \left[\sum_{\alpha_1} \Delta f_i^{\alpha_1} l_j^{\alpha_1} + \sum_{\alpha_2} \Delta f_i^{\alpha_2} l_j^{\alpha_2} + \sum_{\alpha_3} \Delta f_i^{\alpha_3} l_j^{\alpha_3} \right] \quad (3)$$

ここで、 C_1 は領域内の骨材粒子相互の接触点総数、 C_2 は骨材粒子-モルタル粒子の接触点総数、 α_1 と α_2 はそれぞれ領域内の骨材粒子とモルタル粒子の各接触点を区別する指標である。式(3)の第一項と第二項は骨材粒子の影響を表している。これは、すべての骨材粒子は2種類の接触、すなわち骨材粒子相互の接触と、骨材粒子-モルタル粒子の接触、を持っているという理想化によるものである。一方、第三項はモルタル粒子の影響を表している。

コンクリート材料には、そのマイクロ構造に非均質性があると考えられる。式(3)において接触点総数を存在確率密度関数 $E(\theta)$ で考慮する。これにより、接触点における法線のなす角度が θ から $\theta + \Delta\theta$ の間に含まれる接触点の数は、接触点総数を C とすると $CE(\theta)\Delta\theta$ となる。

さらに、接触面に垂直な方向余弦 $n = (\cos\theta, \sin\theta)$ を用いると、以下のように積分の形に書き換えられる。

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\sigma}_v = & \frac{C_1 \bar{l}^1}{V} \int_0^{2\pi} \Delta \bar{f}_i^1(\theta) n_j(\theta) E(\theta) d\theta \\ & + \frac{C_2 \bar{l}^2}{V} \int_0^{2\pi} \Delta \bar{f}_i^2(\theta) n_j(\theta) E(\theta) d\theta \quad (4) \\ & + \frac{C_3 \bar{l}^3}{V} \int_0^{2\pi} \Delta \bar{f}_i^3(\theta) n_j(\theta) E(\theta) d\theta \end{aligned}$$

以上により、平均マクロ応力増分を平均接触点力増分により表すことができた。

2.3 平均接触点力増分とマクロひずみ増分の関係

次に、平均接触点力をマクロひずみ増分で表すことを考える。

接触点における接点力増分とマイクロひずみ増分は、接触点における垂直、せん断方向のマイクロ剛性を介して次式のように関連づけられるとする。

$$\Delta f_n = K_n \Delta \varepsilon_n \quad (5a)$$

$$\Delta f_t = K_t \Delta \varepsilon_t \quad (5b)$$

ここで、 $\Delta \varepsilon_n, \Delta \varepsilon_t$ は接触点の垂直、せん断マイクロひずみ増分、 K_n, K_t は接触点の垂直、せん断剛性、 $\Delta f_n, \Delta f_t$ は垂直、せん断接触点力増分である。

骨材粒子-モルタル粒子の接触点のコントロール領域内の垂直、せん断マイクロひずみ $\varepsilon_n^m, \varepsilon_t^m$ は、マクロひずみテンソル ε_v の構成要素であると仮定し、接触面に垂直な方向余弦 $n = (\cos\theta, \sin\theta)$ 、接触面接線方向の方向余弦 $t = (-\sin\theta, \cos\theta)$ を用いて、以下のように定義する。このことはすなわち、ひずみ場に関してはマクロひずみもマイクロひずみも同一であることを示している。

$$\varepsilon_n^{am} = \varepsilon_{ij} n_i n_j \quad (6a)$$

$$\varepsilon_t^{am} = \varepsilon_{ij} t_i t_j \quad (6b)$$

ここで、マイクロひずみ分布の非均一性、すなわち、同じ方向に対して骨材粒子相互の接触点のマイクロひずみは、骨材粒子-モルタル粒子の接触点のマイクロひずみとは異なることを考慮するために、骨材粒子相互の接触点のマイクロひずみを、非均一パラメータ K を用いて以下のように定義する。

$$\varepsilon_n^a = K \varepsilon_n n n, \quad (7a)$$

$$\varepsilon_t^a = K \varepsilon_t t n, \quad (7b)$$

2.4 平均マクロ応力増分と平均マクロひずみ増分の関係

前節までで、平均マクロ応力増分-平均接触点力増分関係、平均接触点力増分-マクロひずみ増分関係が得られた。よって、式(4), (6), (7) より、次に示すような平均マクロ応力増分-平均マクロひずみ増分関係が得られる。

$$\Delta\bar{\sigma}_y = D_{\mu\mu} \Delta\bar{\epsilon}_y \quad (8)$$

ここで、

$$D_{\mu\mu} = \eta_1 \int_0^{2\pi} (k_n a_{\mu\mu} + k_t b_{\mu\mu})^2 \tilde{E}(\theta) K d\theta \\ + \eta_2 \int_0^{2\pi} (k_n a_{\mu\mu} + k_t b_{\mu\mu})^2 \tilde{E}(\theta) d\theta$$

$$a_{\mu\mu} = n_1 n_2 n_3 n_4$$

$$b_{\mu\mu} = t_1 n_2 t_3 n_4$$

$$\eta_1 = C_1 \bar{l}^2 \bar{a}_1 / 2\pi V$$

$$\eta_2 = C_2 \bar{l}^2 \bar{a}_2 / 2\pi V + C_3 \bar{l}^2 \bar{a}_2 / 2\pi V$$

$$k_n = K_n / \bar{a}$$

$$k_t = K_t / \bar{a}$$

$$\tilde{E}(\theta) = 2\pi E(\theta) = 1 + A \cos 2\theta$$

\bar{a}_1 と \bar{a}_2 はそれぞれ、骨材粒子相互、骨材粒子-モルタル粒子の平均接触面積である。また k_n と k_t はそれぞれ接触点でのマイクロ応力-マイクロひずみ関係から得られる垂直、せん断マイクロ剛性である。マイクロ剛性は、以下のようにマイクロ応力-マイクロひずみ曲線に対する接線となる。

$$k_n = \frac{d\sigma_n}{d\epsilon_n} \quad (9a)$$

$$k_t = \frac{d\tau_t}{d\epsilon_t} \quad (9b)$$

σ_n と ϵ_n は接触点の垂直マイクロ応力と垂直マイクロひずみ、 τ_t と ϵ_t は同じ接触点のせん断マイクロ応力とせん断マイクロひずみである。問題の簡略化と、パラメータの削減のために、せん断マイクロ剛性 k_t が以下のように、垂直マイクロ剛性 k_n に対しパラメータ λ を介して関連づけられることとした。

$$k_t = \lambda k_n \quad (10)$$

2.5 ミクロ応力-マイクロひずみ関係

マイクロ応力 σ_n -マイクロひずみ ϵ_n 関係を骨材粒子間接触、骨材粒子-モルタル粒子間接触のそれぞれに対し、以下のように仮定する。

2.5.1 骨材粒子-モルタル粒子間接触

図-1 に示すようなパスを仮定する。

図-1 では圧縮強度 30.0MPa、初期マクロ剛性 2.50×10^4 MPa のコンクリートに対して実際に計算した結果を示してある。

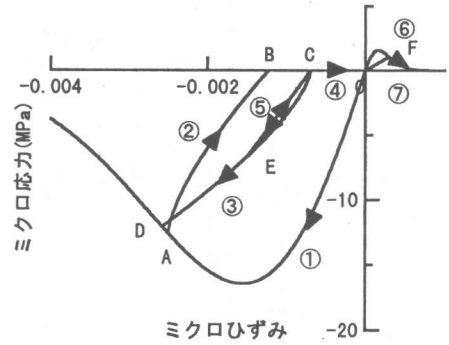


図-1 ミクロ応力-ひずみ関係 (骨材-モルタル)

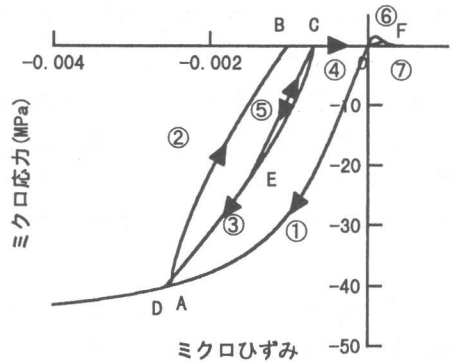


図-2 ミクロ応力-マイクロひずみ関係 (骨材-骨材)

2.5.2 骨材粒子間接触

図-2 に示すようなパスを仮定する。

図-2 はマクロ圧縮強度 30.0MPa、初期マクロ剛性 2.50×10^4 MPa のコンクリートに対して実際に計算を行った結果を示してある。

3. 解析方法

3.1 鉄筋の応力-ひずみ関係

鉄筋の応力-ひずみ関係は中村²⁾が用いた履歴モデルに基づき、一部修正を加え、図-3 に示すように仮定する。図-3 は降伏強度 300MPa の鉄筋に対して計算を行った結果である。

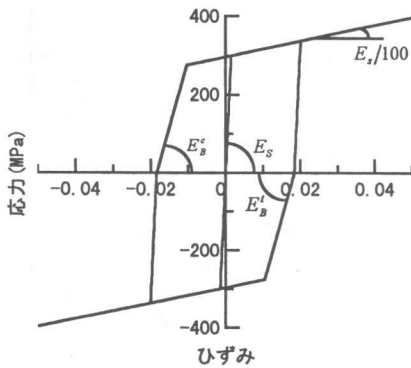


図-3 鉄筋の応力-ひずみ関係

3.2 ティモシェンコはり理論

従来のはりの曲げ理論では、変形前に中立軸に対して垂直な断面は、変形後も直線のまま、かつ変形後の中立軸に対して垂直であるという仮定を用いている。せん断変形を考慮するとき、この二つの仮定はともに成立しなくなるが、このうち後者の仮定を考えないのがティモシェンコはり理論である。

ここで、 x 、 y 方向の変位増分 U 、 V を曲げ変形成分と、せん断変形成分を用いて以下のように表す。

$$U = u - y \frac{\partial v_b}{\partial x} \quad (11)$$

$$V = v_b + v_s \quad (12)$$

u : 軸力による軸方向変位増分

v_b : 曲げによるたわみ変位増分

v_s : せん断によるたわみ変位増分

上式を、6自由度を有するはり要素の変位関数で表わすと、式(13)と式(14)になる。

$$\Delta u^e = [N_u] \{ \Delta d_u^e \} \quad (13)$$

$$\Delta v^e = [N_{vb}] \{ \Delta d_v^e \} \quad (14)$$

Δd_u^e 、 Δd_v^e はそれぞれ、対応する節点変位増分ベクトルで、図中の記号を用い、次式で表される。

$$\{ \Delta d_u^e \}^T = [u, u_x] \quad (15)$$

$$\{ \Delta d_v^e \}^T = [v, \theta, v_x, \theta_x] \quad (16)$$

なお、添え字 e は部材座標系であることを示す。また、形状関数 $[N_u]$ 、 $[N_{vb}]$ は、具体的に次のように書くことができる。

$$[N_u] = \left[1 - \frac{x}{l}, \frac{x}{l} \right] \quad (17)$$

$$[N_{vb}] = -\frac{1}{1 + \frac{12k}{l^2}} \left[\left(1 + \frac{6k}{l^2} - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \right), \right. \\ \left. \left(-\frac{12k^2}{l^3} - \frac{4k}{l} + \left(\frac{12k}{l^2} + 1 \right) x + \left(-\frac{6k}{l^3} - \frac{2}{l} \right) x^2 + \frac{x^3}{l^2} \right), \right. \\ \left. \left(\frac{6k}{l^2} + \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right), \left(\frac{12k^2}{l^3} - \frac{2k}{l} + \left(\frac{6k}{l^3} - \frac{1}{l} \right) x^2 + \frac{x^3}{l^2} \right) \right] \quad (18)$$

要素内の軸方向ひずみ増分 $\Delta \epsilon_x^e$ は x 方向に微分することによって、次のように表される。

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} \\ = [N_u]' - y [N_{vb}''] \{ \Delta d_u^e \} \\ = [B_b] \{ \Delta d_v^e \} \quad (19)$$

$[B_b]$ は接点変位増分ベクトル-軸方向ひずみ増分マトリクスである

次に、せん断ひずみを考える上で必要なせん断変形によるはりのたわみ v_s は、釣合を考慮することで、次のようになる。

$$\frac{dv_s}{dx} = -\frac{1}{GA} \frac{dM}{dx} \\ = -\frac{EI}{GA} \frac{d^3 v_b}{dx^3} \quad (20)$$

(20)式は曲げ変形とせん断変形との関係式であり、部材の変位増分を三次多項式と仮定すると、各変位増分の形状関数は次のように表される。

$$\Delta v_s^e = [N_{vs}] \{ \Delta d_v^e \} \quad (21)$$

よって、せん断ひずみは次式に表される。

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (22) \\ &= \left[\frac{1}{2} N_{vs} \right] \{ \Delta d_v^e \} \\ &= [B_s] \{ \Delta d_v^e \} \end{aligned}$$

$[B_s]$ は接点変位増分ベクトル-せん断ひずみ増分マトリクスである。また、形状関数 $[N_{vs}]$ は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} [N_{vs}] &= \frac{1}{1 + \frac{12k}{l^2}} \left[\left(\frac{6k}{l^2} - \frac{12k}{l^3} x \right), \left(\frac{12k^2}{l^3} + \frac{4k}{l} - \frac{6k}{l^2} x \right), \right. \\ &\quad \left. \left(-\frac{6k}{l^2} + \frac{12k}{l^3} x \right), \left(-\frac{12k^2}{l^3} + \frac{2k}{l} - \frac{6k}{l^2} x \right) \right] \quad (23) \end{aligned}$$

ここに、 $k (=EI/GA)$ はせん断剛性と曲げ剛性の比を表している。(18)、(23) で与えられた形状関数は、せん断剛性が無限大ならば一般に知られているものと等しくなる。

このマトリクスを用い要素剛性マトリクスは、次式により与えられる。

$$[K^e] = \iiint [B]^T [D] [B] dx dy dz \quad (24)$$

ここで、応力増分-ひずみ増分マトリクス $[D]$ は、ティモシェンコはり要素の場合には断面の接線剛性とせん断剛性によって表される。しかし、断面内の応力状態は一様でないために、その接線剛性とせん断剛性は断面内の位置によって異なる。

そこで、はり要素のモデル化には、部材断面をいくつかのファイバーと呼ばれる微小要素に分割し、それぞれの微小要素に軸方向の応力-ひずみ関係を考える、いわゆるファイバーモデルを用いた。

解析手順を簡単に示すと、まず前ステップにおいて得られた節点増分変位より、式(19)の関係をを用いて、各ファイバーでの増分ひずみを求める。そして、この増分ひずみを用いて、コンクリート、鉄筋それぞれの履歴ルールに従い、各ファイバーでの接線剛性を求める。次に、各ファイバーでの接線剛性を積分することにより断面の剛性を求め、さらに、

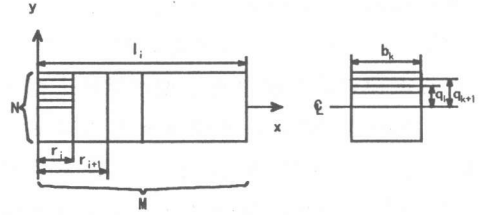


図-4 ファイバー分割

この断面の剛性を要素軸方向に積分することで最終的にはり要素の剛性マトリクスが求められる。

具体的なファイバーの分割は、図-4 に示すように要素を軸方向 (x 方向) に M 等分、断面の高さ方向 (y 方向) に N 等分する方法を採った。

ファイバーモデルを導入することにより式(24)の積分形式は以下のように各ファイバーの総和となる。

$$[K^e] = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^M b_k E_{jk} B_b^T B_b + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^M b_k G_{jk} B_s^T B_s \quad (25)$$

ここで、 E_{jk} 、 G_{jk} 図-4 における軸方向に j 番目、断面高さ方向に k 番目の各ファイバー要素毎にマイクロプレーンモデルより求めた接線剛性とせん断剛性である。 G_{jk} はコンクリートにひび割れが発生した後、つまりコンクリートの接線剛性 E_{jk} の降伏後 $G_{jk} = E_{jk} / 100$ としている。 b_k ははり要素の幅である。

解析は、以上のようにして求めた各要素の増分形剛性マトリクスを全体座標形に変換し、構造物全体の剛性マトリクスを求め、変位増分法により行う。

4. 繰り返し载荷された RC ティモシェンコはりへの適用

4.1 実験概要

3 章までに述べたマイクロプレーンモデルの有効性を検証するために、RC はりの繰り返し载荷実験³⁾を対象として有限要素解析を行

い、実験結果との比較を行った。

供試体は図-5 に示すような単純はりで、対称 2 点荷重により繰返し曲げ試験を行っている。断面は、25.4 cm×50.8 cm で、D25 mm の鉄筋（降伏点：318.5MPa）が上下に 2 本ずつ配置されており、コンクリートの圧縮強度は 23.7MPa である。

供試体には、せん断補強筋があり、これはせん断力の一部を負担すると同時に、斜めひび割れの進展を抑制し、圧縮部コンクリートのせん断抵抗を向上させるため、せん断スパン比 $a/d=1.97$ であっても斜め引張破壊は起こらず、曲げ破壊の挙動を示している。

4.2 解析結果

要素分割は、図-6 に示すように供試体を要素数 10、節点数 11 に分割した。

またファイバー分割数は、要素軸方向に 4、断面高さ方向に 10 とした。

図-7 に荷重-はり中央変位関係の履歴ループに関する実験値と解析値との比較を示す。

図-7 をみるとはりの降伏までのループで解析値の方が若干堅い傾向を示しているが、全体的には充分に実験値の傾向を表しているといえる。また、除荷、再荷荷部分の曲線についてはかなり一致しているといえる。

ティモシェンコはり理論によりせん断変形を考慮することで、曲げ変形の場合よりたわみが増加し降伏点までの剛性は弱くなり実験値に近づいたといえる。

この結果は、ティモシェンコはり理論を用いたファイバーモデルに基づく解析手法の妥当性、繰返し荷重におけるマイクロプレーンモデルの有効性を示していると考えられる。

5. 結論

コンクリートの構成則にマイクロプレーンモデルを用い、繰返し荷重を受ける RC はりに対し、ファイバーモデルに基づく非線形

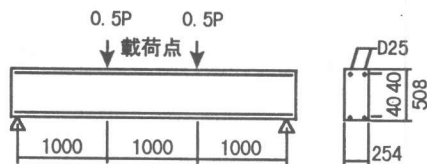


図-5 はり供試体

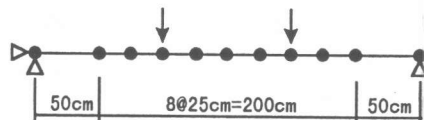


図-6 要素分割

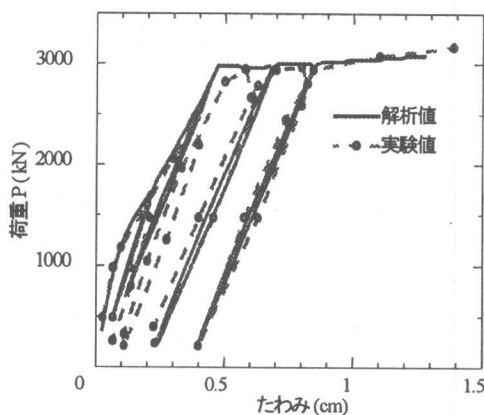


図-7 荷重-変位曲線

FEM 解析を行ったところ実験値と解析値は比較的良い一致を示した。このことより、ティモシェンコはり理論をファイバーモデルに導入し、マイクロプレーンモデルを構成則として用いることは有効であるといえる。

参考文献

- 1) 梅原秀哲, 田辺忠顕, 吉田弥智 : 鋼材の付着状態を考慮した PC ラーメンの履歴挙動に関する研究, 土木学会論文集, 第 396 号/V-9, pp89-98, 1988
- 2) 中村光 : コンクリート構造のポストピーク挙動に関する研究, 名古屋大学博士論文, 1992.
- 3) 異形鉄筋コンクリート設計法研究会 : 異形鉄筋コンクリート設計法, 鋼材倶楽部, p. 60, 1971.