

論文 せん断を考慮した外ケーブル PC はりの終局強度解析

寺尾大輔¹・田邊忠顕²

要旨：本研究は、外ケーブルPC構造物をはり要素で終局状態まで解析する際に、せん断の影響を入れると、曲げ理論のみの場合とどのような違いが現れるかを考察し、また、実構造物解析の構成則としてマイクロプレーンモデルを用いることが有効か検証したものである。

キーワード：せん断変形, マイクロプレーン, 非線形 FEM 解析

1. はじめに

一般にスパン桁高比が大きくとれる PC 構造物の解析においては曲げ理論のみによる解析が行われる場合が多々ある。

しかしながら実際の問題としては、曲げ変形の他にせん断変形も存在しており、ひび割れ発生後（状態Ⅱ）においてはこれを無視することはできない。特にスパン桁高比 l/h が 12 以下である場合には状態Ⅱにおける全たわみ量のうち、せん断変形による場合が曲げ変形によるものの 0.2~3.0 倍にもなる¹⁾。

せん断を考慮した曲げ変形理論として最も単純なものに Timoshenko はり理論があるが、断面高さ方向に対し、応力の変化が著しい場合や断面内に異なる材料を用いている場合には、構造物を単純はり要素に分割した一要素の剛性について一定値を用いるのは危険である。そこで、本解析においてはこのような場合に構造物の挙動を正しく評価するための有用な手段であるファイバーモデルを用いた。ファイバーモデルを用いた Timoshenko はりの剛性マトリックスの算出は中村ら²⁾によって行われており、理論としては図-1 に示すように曲げによるたわみ変位増分 v_b とせん断によるたわみ変位増分 v_s との和 $v_s + v_b$ をそのステップによるたわみ変位増分とするもので、これにより簡単にせん断変形の影響を評価することができる。

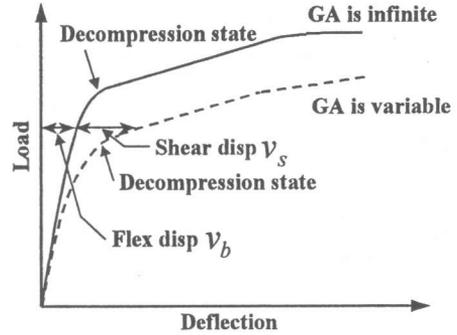


図-1 せん断変形が PC 構造物の挙動に及ぼす影響

せん断変形の影響を評価することができる。

また、ファイバー分割した微小要素における曲げ、せん断剛性の計算は Farahat ら³⁾のマイクロプレーンモデルを用い、筆者らの開発した外ケーブル PC はりの骨組応力解析手法によって終局強度によって終局強度まで解析した。

2. 有限要素法による定式化

2.1 コンクリートの要素剛性マトリックス

一般的な $x-y$ 座標系をとり、軸力、せん断力、モーメントが作用しているはり部材を考える。せん断変形を考慮するためはり要素の x, y 方向の各々の変位増分 $U(x, y), V(x, y)$ を曲げ変形成分並びにせん断変形成分を用いて以下のよ

¹ 名古屋大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (正会員)

² 名古屋大学 工学部 土木工学科, 工博 (正会員)

うに表す。この時、Timoshenko はりの理論に基づき断面は変形後も平面を保つとしている。

$$U(x, y) = u - y \frac{\partial v_b}{\partial x} \quad (1)$$

$$V(x, y) = v_b + v_s \quad (2)$$

ここで u : 軸力による軸方向変位増分

v_b : 曲げによるたわみ変位増分

v_s : せん断によるたわみ変位増分

(1), (2)式に示した変位場を用いると、軸ひずみ、せん断ひずみ成分はそれぞれ次式で与えられる。

$$\varepsilon_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_b}{\partial x} - \frac{\partial v_s}{\partial x} \right)^2 \quad (3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_s}{\partial x} \quad (4)$$

(3)式で $\left(\frac{\partial v_b}{\partial x} - \frac{\partial v_s}{\partial x} \right)^2$ は微量なので省略する。

また、 v_s は釣り合いを考えることで次のようになる。

$$\frac{\partial v_s}{\partial x} = -\frac{EI}{GA} \frac{dM}{dx} = -\frac{EI}{GA} \frac{\partial^3 v_b}{\partial x^3} \quad (5)$$

ここで EI は曲げ剛性、 GA はせん断剛性であり、はりのクラック状態などに依存する。

(5)式は曲げ変形とせん断変形の関係式であり、部材の変位増分を 3 次元多項式と仮定すると、各変位増分の変位関数は次のように表される。

$$w = [N_u] \{du\}$$

$$v_b = [N_{vb}] \{dv\}$$

$$v_s = [N_{vs}] \{dv\}$$

$$N_u = \left[1 - \frac{x}{L}, \frac{x}{L} \right]$$

$$N_{vb} = \frac{1}{1+12k/L^2} \left[1 + \frac{6k}{L^2} - \frac{3}{L^2} x^2 + \frac{2}{L^3} x^3, \right.$$

$$\left. -\frac{12k^2}{L^3} - \frac{4k}{L} + \left(\frac{12k}{L^2} + 1 \right) x + \left(-\frac{6k}{L^3} - \frac{2}{L} \right) x^2 + \frac{1}{L^2} x^3, \right.$$

$$\left. -\frac{6k}{L^2} + \frac{3}{L^2} x^2 - \frac{2}{L^3} x^3, \frac{12k}{L^3} - \frac{2}{L} + \left(\frac{6k}{L^3} - \frac{1}{L} \right) x^2 + \frac{1}{L^2} x^3 \right]$$

$$N_{vs} = \frac{1}{1+12k/L^2} \left[\frac{6k}{L^2} - \frac{12k}{L^3} x, \frac{12k^2}{L^3} + \frac{4k}{L} - \frac{6k}{L^2} x, \right.$$

$$\left. -\frac{6k}{L^2} + \frac{12k}{L^3} x, -\frac{12k^2}{L^3} + \frac{2}{L} - \frac{6k}{L^2} x \right] \quad (6)$$

ここに、 $k (= EI/GA)$ は曲げ剛性とせん断剛性の比を表す係数である。また、 $\{du\}$ 、 $\{dv\}$ はそれぞれ部材の軸方向および鉛直方向の節点変位増分ベクトルで次式によって表される。

$$\{d\}^T = \begin{Bmatrix} \{du\}^T \\ \{dv\}^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [u_1, u_2] \\ [v_1, \theta_1, v_2, \theta_2] \end{Bmatrix} \quad (7)$$

上式中、 v_i 、 θ_i ($i=1,2$) はそれぞれ i 節点におけるたわみ増分、曲げによるたわみ角増分である。節点のせん断回転角は(5)式により曲げによる回転角に依存しており、節点の回転角増分を曲げによる回転角増分で表すことで、はり要素は(7)式の 6 自由度を考えるだけでよくなる。

また、(3)、(4)式から求められる要素内の軸ひずみ増分 ε_x 、せん断ひずみ増分 γ_{xy} は(6)、(7)式を用いて次式に書き換えられる。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{N_u, -yN_{vb}''\} \\ \{0, N_{vs}'\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{du\}^T \\ \{dv\}^T \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$= \begin{bmatrix} [A] \\ [B] \end{bmatrix} [d]$$

よって、コンクリートの要素剛性マトリックス $[K_C]$ は(9)式のようになる。

$$[K_C] = \iiint_{VOL} \left[[A]^T [D] [A] + [B]^T [D_G] [B] \right] dV \quad (9)$$

ここで、 $[D]$ 、 $[D_G]$ は応力-ひずみマトリックスであり、一般的にはり要素においてはヤング率及びせん断弾性係数で表される。しかし、実際にはりには高さがあり、1 要素内において

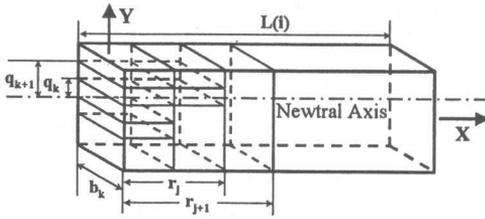


図-2 ファイバー要素

線形領域以外では剛性のばらつきが生じてくる。

そこで、このばらつきを評価するためにファイバーモデルを用いた。ファイバーモデルとは図-2のように一要素を X 軸方向に M, Y 方向に N 微小分割し、それぞれの微小要素ごとの接線剛性を用いて各々の剛性マトリックスを求め、それらを要素軸方向に積分することによって一要素の剛性マトリックスを算出する方法である。

ファイバーモデルを用いると、(9)式は次式のようにになる。

$$[K_C] = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^M \left[b_k \left(E_{jk} [A]^T [A] + G_{ij} [B]^T [B] \right) \right] \quad (10)$$

ここで、 E_{jk} は図-2における X 軸方向に j 番目、Y 軸方向に k 番目の微小要素の接線剛性であり、 b_k は微小要素の幅である。 $[K_C]$ は 6×6 のマトリックスであるが、ここでは 2 行 2 列の成分 K_{C22} について記す。

$$K_{C22} = \sum_{j=1}^M \frac{EI(j)}{L_i^6 (1+T_j)^2} \left\{ (36L_i^2 + 144k_j)(r_{j+1} - r_j) - 72L_i(r_{j+1}^2 - r_j^2) + 48(r_{j+1}^3 - r_j^3) \right\}$$

$$T_j = \frac{12k_j}{L_i^2}$$

$$EI(j) = \sum_{k=1}^N E_{ijk} b_k \left\{ \frac{1}{3}(q_{k+1}^3 - q_k^3) + y_0(q_{k+1}^2 - q_k^2) + y_0^2(q_{k+1} - q_k) \right\}$$

$$k_j = \sum_{k=1}^N \frac{E_{ijk} b_k}{G_{ijk} b_k (q_{k+1} - q_k)} \left\{ \frac{1}{3}(q_{k+1}^3 - q_k^3) + y_0(q_{k+1}^2 - q_k^2) + y_0^2(q_{k+1} - q_k) \right\} \quad (11)$$

ここで、 y_0 は中心軸との距離である。 E_{ijk}

は微小要素の接線剛性で、 G_{ijk} はせん断に関する剛性値であり、線形領域ではせん断弾性係数と一致する。

2.2 PC 鋼材の要素剛性マトリックス

PC 構造物解析において、コンクリートとケーブルに付着が存在する場合は PC 鋼材のひずみはその位置のコンクリートのひずみと一致するので一般的にはりとして扱えるが、付着が存在しない場合には PC 鋼材の伸びとコンクリートの伸びが等しいという変形の適合条件を満足させて挙動を計算させなければならない。

筆者ら⁴⁾はこの適合条件から、PC 鋼材のひずみをコンクリートのひずみで表し、ディビエーター D_i での摩擦による PC 鋼材のひずみの変化を考慮して、その差を次式で表した。

$$\Delta \varepsilon_{S(i+1)} - \Delta \varepsilon_{Si} = \frac{k_{Di}}{l_{i+1} - l_i} \int_0^{l_{i+1}} \Delta \varepsilon_{CS} dx \quad (12)$$

l_i : ケーブル直線部の長さ

ここで、 k_{Di} は摩擦係数 (一般的なクーロン摩擦ではない) で、ディビエーターによるひずみの変化やそこでの鋼材のすべりなどを鹹味できる。これを考慮して、剛性マトリックスは PC 鋼材のひずみエネルギーを変位増分で微分することにより求めている。

3. 修正マイクロプレーンモデル

マイクロプレーンモデルは現在でも Bazant らによって精力的な研究が積み重ねられ、コンクリートの構成則として有力なモデルと考えられるようになってきた。しかし、式が複雑で解析時間がかかる、使用する材料パラメータが多数あり、それらを実験から求めるのには時間と労力を費やすなどの理由から実構造物解析に対する構成則としては敬遠されていた。

しかし、マイクロプレーンモデルには一般の構成則に比して多軸応力状態の解析に適しており、繰り返し挙動の解析の精度を上げることが

できるなど有利な点も多々ある。

筆者らの研究室でも Farahat らによりマイクロプレーンモデルは拡張，修正され本研究ではこれをコンクリートの構成則として用いることとした。

マイクロプレーンモデルによれば，マイクロひずみテンソル ε_n はマクロひずみテンソル $\bar{\varepsilon}_{ij}$ の構成要素であるという仮定を用いている。

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{ij} n_i n_j \quad (13)$$

n_i, n_j : 骨材-骨材及び骨材-モルタルの接触方向余弦

マイクロプレーンモデルによってマイクロ挙動を考える場合，骨材の接触(C1)のみでなく骨材とモルタルの接触(C2)も考慮すると，(14)式のマクロ応力-マクロひずみ関係が得られる。

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \Delta \bar{\varepsilon}_{kl} \quad (14)$$

$$D_{ijkl} = \eta_1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [k_n^{C1} n_i n_j n_k n_l + k_t^{C1} (\delta_{ij} n_j n_k - n_i n_j n_k n_l) \sin \phi] d\phi d\theta + \eta_2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [k_n^{C2} n_i n_j n_k n_l + k_t^{C2} (\delta_{ij} n_j n_k - n_i n_j n_k n_l)] \sin \phi] d\phi d\theta$$

η_1, η_2 はそれぞれの骨材相互の接触，骨材とモルタルの接触についてのパラメータである。

本研究において，接点でのマイクロの応力ひずみ関係 ($\sigma_n - \varepsilon_n$) から得られる垂直剛性 k_n は Farahat らの式を用いた。また，マイクロのせん断応力-せん断ひずみ ($\tau_n - \gamma_n$) から得られるマイクロのせん断剛性 k_t は簡略化のためパラメータ λ を介して k_n に線形に關係する

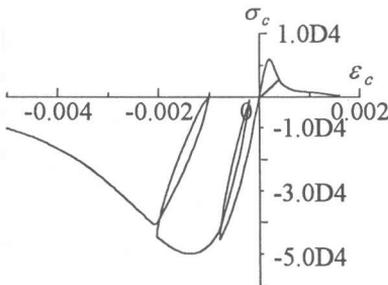


図-3 マクロの応力-ひずみ履歴

($k_t = \lambda k_n$) とした。

(14)式によれば，任意断面のマクロ軸ひずみ ε_{11} からマクロの接戦剛性 D_{1111} が求まり，マクロせん断ひずみ ε_{12} からマクロのせん断剛性 $(D_{1212} + D_{1221})/2$ を求めることができる。

よってこれらを(11)式の E_{ijkl} と G_{ijkl} として扱った。

図-3 はマイクロプレーンモデルから得られたマクロ軸応力-軸ひずみ関係である。

4. 既存実験との比較

本解析の妥当性を検証するためにバンコク第二高速道路建設の際行われた実物大破壊試験⁶⁾ (スパン 40.8m) のデータを用いた。この実験は外ケーブル方式の PC 桁を対象としており，プレキャスト桁であるところを本解析では考慮していないが，一般的な PC はりに適用可能か検証することを旨とするためこれを採用した。

実験供試体は図-4 に示すようなはりで，曲げ破壊するまで単純載荷されている。計 6 本のケーブル (No.1~No.5 (D527mm), No.6 (D333mm)) はすべて外ケーブル方式であり，ディビエーター D1, D2, D3 に定着している。

この実験の解析にあたり，解析モデルは図-4 のように実験モデルを 26 要素のはり要素に分割した。ケーブルは一本一本座標位置を確定して剛性マトリックスの中に取り込み，初期プレストレスの減少 (42000kN → 37000kN) は実験データを参考にして初期ひずみとして扱った。また，コンクリート要素は X 軸方向に 1 つ，Y 軸方向に 8 つにファイバー分割し，ディビエ

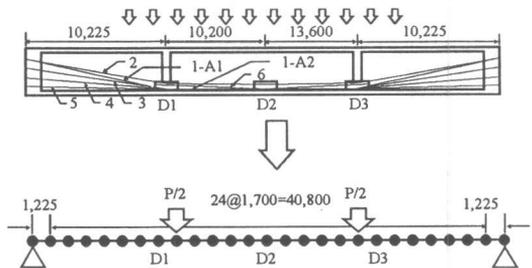


図-4 実験モデル及び解析モデル

表-1 解析に使用した摩擦係数

ケーブル	初期ひずみ解放	
	前	後
D ₁	1.0	1.0~0.5
D ₂	0.0	0.0~0.2
D ₃	1.0	1.0~0.5

ーターでの摩擦によるひずみの比はデコンプレッション前までは摩擦係数 k_{Di} を一定、その後は滑りが生じるため k_{Di} ((12)式)を表1のように変化させた。

解析は変位制御ではりが終局するまで行った。解析に用いた材料パラメータ及びPC鋼材の構成則を表-2、図-5に示す。

5. 解析結果

解析は次の2ケースについて行った。

Case.1 : 曲げ変形のみ考慮

Case.2 : 曲げ変形+せん断変形を考慮

これはつまり、Case.1では(11)式における $k(=EI/GA)$ を0、Case.2においては k を変数として扱い、せん断による影響が要素剛性マトリックスに入り、かつせん断によるたわみ変位増分 v_s が現れるようにしたのである。

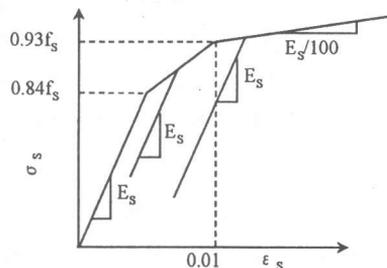
3章で述べたとおり E_{ijkl} および G_{ijkl} は(11)式の D_{ijkl} として求めているが、コンクリート部材において曲げ引張りひび割れ発生後にはせん断剛性が急激に低下することが分かっており、ひび割れ発生後では $E_{ijkl}/G_{ijkl}=10.0$ となるようにした。

図-6は桁中央モーメントと桁中央たわみとの関係をグラフにしたものである。ケーブルの緊張による初期ひずみが解放されるまではCase1, Case.2に大きな差は見られず、若干Case.1の方の剛性が大きい程度であるが、その後、桁下端に引張りひび割れが発生し始めると同モーメントに対するたわみの差が徐々に開いていっている。これは、せん断変形の影響である。実験では行われていなかったが、図-7に繰り返し時の結果も示した。曲げ変形のみ考慮したCase.1においては除荷の履歴ループが原

点に向かってのに対し、せん断変形も考慮したCase.2では残留変位がかなり出ている。終局モーメントは共に60,000kN-mあたりと

表-2 材料特性

コンクリート	圧縮強度	50 MPa
	ヤング係数	41,000 MPa
PC鋼材	降伏強度	1,920 MPa
	ヤング係数	193,000 MPa



E_s : PC鋼材のヤング係数
 f_s : PC鋼材の降伏強度

図-5 鉄筋の応力-ひずみ関係

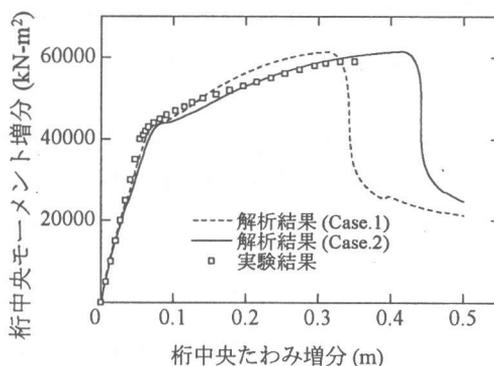


図-6 モーメント-たわみ曲線 1

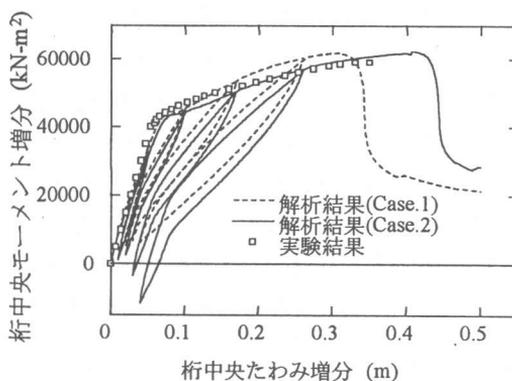


図-7 モーメント-たわみ曲線 2

なり、実験結果とほぼ等しい値が得られた。これはマイクロプレーンモデルが実構造物解析の構成則として有効である事を示していると考えられる。

図-8及び図-9はモーメントとPC鋼材(No.1)の関係である。図-8においてディビエーターでの摩擦を考慮することにより、それぞれにディビエーター前(A1)、後ろ(A2)でのひずみを正しく表すことができた。終局状態近くに実験結果と差異があるが、これは実験モデルがプレキャスト桁であるため終局近くでジョイント部で開きが生じ、中立軸が急激に上方に移動したためと考えられる。図-8のモーメント-PC鋼材ひずみ(No.6)では、繰り返し载荷の下でも鋼材ひずみを表すことができ、PC鋼材の降伏がコンクリートの圧壊に対し、やや先行していることが確かめられた。

今回用いたモデルはスパン桁高比が18とかなり大きいにもかかわらず、終局時にせん断による影響がかなりあることが認められており、今後、スパン桁高比の小さな柱及び桁について、その終局状態を解析するとき、特に繰り返し载荷を行う場合には必ずせん断による変位を考慮する必要があると考えられる。

6. 結論

- 1)ほとんど全ての構造物の破壊形態にはせん断変形が関与しており、いくら桁スパン比が大きなPC構造物においてもこれを無視することはできないと考えられた。
- 2)実構造物解析のコンクリートの構成則としてマイクロプレーンモデルを用いた結果、実験結果と比較的良好一致を示すことが明らかとなり、ファイバーモデルという簡単な範囲ではあるが、その有効性がうかがえた。

今回の数値計算ではせん断変形が特に重要な柱部材について行えなかったが、今後検討するつもりである。

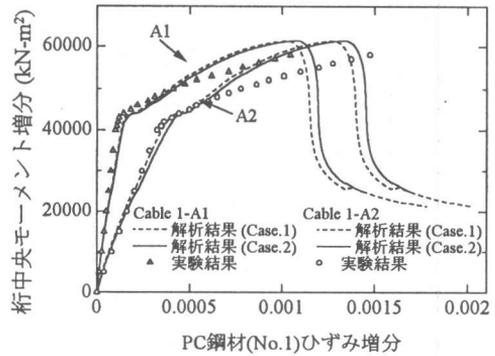


図-8 モーメント-PC鋼材ひずみ(No.1)

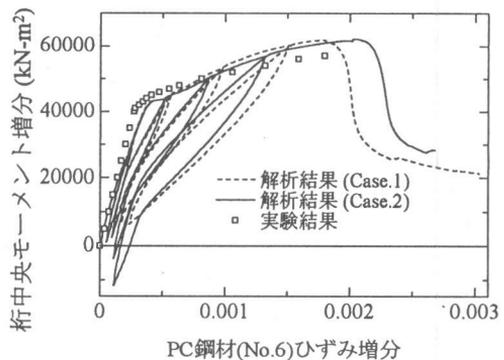


図-9 モーメント-PC鋼材ひずみ(No.6)関係

参考文献

- 1)F.レオンハルト (道長英雄監訳) : レオンハルトのコンクリート講座④ コンクリート構造の限界状態と変形、鹿島出版社、1983、PP135-136
- 2)中村光 : コンクリート構造のポストピーク挙動に関する解析的研究、名古屋大学博士論文、1991
- 3)Farahat.A.M., T.Tanabe : Development of Concrete Models Based on the Micro Mechanics of Granular Material, Dept. of Civil Eng. Nagoya -Uni., 1988
- 4)寺尾大輔, 田邊忠顕 : ディビエーターでの摩擦を考慮した外ケーブル PC 桁の非線形 FEM 解析 : JCI 年次論文報告集, 1997, pp1371-1376
- 5)竹林稔雄, K.DEEPRASERTWONG, Y.W.LEUNG : ドライジョイント・外ケーブル方式のプレキャストセグメント桁の実物大破壊試験, プレストレスコンクリート, Vol.36, No.5, 1994, pp41-53