

## 論文 微視クラックモデルを用いたコンクリートの構成モデル

寺井雅和<sup>\*1</sup>・後藤康明<sup>\*2</sup>・城 攻<sup>\*3</sup>

**要旨:** コンクリートのような脆性材料の非線形な変形挙動をより柔軟に表現するために、様々な寸法、密度、方向を持った微視ひびわれの進展挙動を線形破壊力学の観点からモデル化し、連続体として扱えるコンクリート構成則を構築した。まず、微視クラックの非弾性挙動を陽な形で反映したコンクリートのモデル化を行い、構成則を導出する過程およびその考え方を示した。そして、この構成式を有限要素プログラムに組み込んだ数値解析手法を用いて、一軸荷重下にあるコンクリート部材の数値計算を行い、巨視応答における破壊過程の再現性を確認した。

**キーワード:** コンクリート, 線形破壊力学, 微視クラック, 構成則, 有限要素解析

## 1. はじめに

コンクリートは微視的にも巨視的にも非均質な材料で、低い応力レベルから非線形挙動を示す力学的特性を有している。この非線形性は骨材とモルタルマトリックスの界面などで局所的な応力集中により発生・成長する微視クラックが原因と考えられている。コンクリートの力学的特性を正しく捉えるためには、内部の微小領域で起こっている力学挙動を適切に把握し、これらが巨視応答に及ぼす影響を明確にすることは工学的に重要なことである。

コンクリートに含まれるクラックの数は膨大であり、更に骨材の存在による内部構造の不均質性から個々の微視構造の挙動を定量化・モデル化することは極めて困難であるため、これまでのコンクリート構成則の多くは、コンクリートの破壊試験などでみかけ上観察される平均応力—平均ひずみ関係などの物理量を基に作られた現象学モデルが多かった<sup>1),2)</sup>。近年では、コンピュータの計算処理能力の向上により、クラックなどの微視構造を個々の構造要素として直接モデル化する不連続体解析法が現実のものとなってきている<sup>3)</sup>。しかし、比較的大

きな部材や構造物レベルの大きさのものを解析する際には、コンピュータの処理速度が向上し、低価格・大容量のメモリが使用できるとしても、経済的にも実務的にも限界がある。このような場合には、コンクリートはそれ自体が均質とみなして、クラックを含む材料を等価な連続体に置き換える連続体解析法が有効であると言える<sup>4)</sup>。このような、材料内に存在する不連続面の非線形挙動を重ね合わせて材料全体の構成関係を記述する考え方は、古くから(多結晶)金属材料の塑性挙動の研究において取り扱われていた。

本研究では、コンクリートのような準脆性材料の破壊挙動をシミュレートできる解析手法の開発を目的として、非均質な内部構造をより的確に表現した連続体としてのコンクリート構成則を考案した。微視クラックの破壊挙動を具体的にするために、様々な寸法、密度、方向を持った微視構造要素を仮定し、この力学挙動を破壊力学の観点から定義した。この論文では、まず微視構造のモデル化の概念とコンクリート構成則の導出過程を示した。次に提案した応力—ひずみ関係を有限要素解析プログラムに

\*1 北海道大学大学院 工学研究科建築工学専攻 工修 (正会員)

\*2 北海道大学助教授 大学院工学研究科 工博 (正会員)

\*3 北海道大学教授 大学院工学研究科 工博 (正会員)

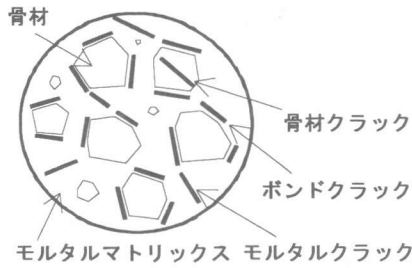


図-1 コンクリートの内部構造

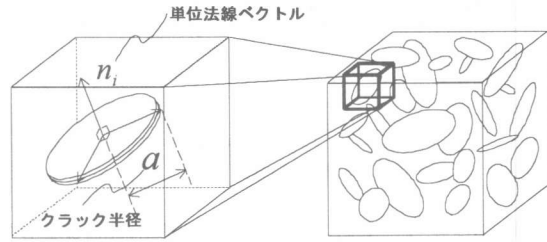


図-2 微視クラック要素のモデル

組み込み、一軸荷重下におけるコンクリートの破壊過程の解析を行い、その適用性を検討した。

## 2. 微視クラック要素の定式化

### 2.1 微視クラックのモデル化

コンクリートは非均質な内部構造のために巨視的にはまだ低い応力レベルから微視的な破壊、すなわち“クラック”が発生している。そのような微視的破壊は、図-1に示すようにコンクリート内部のいたるところに様々な寸法、密度、方向を持って分散して生じている。実現象におけるコンクリート内のクラックは、ボンドクラック・モルタルクラック・骨材クラックと大別され、これらの発生メカニズムや挙動・性状は異なっている。しかし、これらの特性を定量的に把握することは難しく、三種類のひびわれを個別にモデル化することはかえって問題を難しくすることになると考え、本研究では簡単のためにクラックはすべて単一のものとして扱うことにした。また、コンクリート中のクラックは局所的には応力の主軸方向が変化するので、厳密にはクラックの進展方向は変化するはずである。しかし、巨視的には起伏を有し三次元的に複雑な形状をしているクラックも、局所的に見れば平面と見なせると考え、本モデルではクラックは面内方向に等方に進展すると仮定する。

このような破壊の生じる領域を有限の体積を持った“微視クラック要素”としてモデル化する。微視クラック要素は図-2に示すように、弾性体の中に上述した一枚のクラックが含ま

れ、その方向は個々のクラック面に与えられた単位法線ベクトルで定義される。そして、この微視クラック要素の集合体として形成されたものが、コンクリートとしての巨視的な耐荷機構を生成すると考える。

### 2.2 クラック進展とエネルギー平衡

クラック進展破壊のクライテリアは線形破壊力学の概念に基づいて定義する。ここでは、クラック進展の開始条件を具体的な計算で試みるため、Griffithの式を三次元の場合で考える。

図-3に示すような、無限体（弾性係数  $E$ 、ポアソン比  $\nu$ 、単位面積当たりの表面エネルギー  $G_f$ ）の内部に埋没した半径  $a$  の

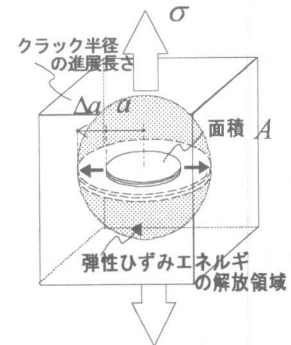


図-3 引張荷重した円形クラック

円形の三次元クラックに、クラックに垂直な引張応力  $\sigma$  を無限遠方で付加する場合を考える。半径  $a$  のクラックの存在により、クラック周囲の半径  $a$  の球形領域内で応力が解放されていると考えれば、平面ひずみ状態を仮定すると解放されている弾性ひずみエネルギー  $U$  は、

$$U = 8(1-\nu^2)a^3\sigma^2/3E, \quad (1)$$

で与えられる<sup>5)</sup>。一方、このクラックのもつ全表面エネルギー  $W$  は、

$$W = 2(\pi a^2)G_f, \quad (2)$$

である。この式で係数の'2'は、クラックの上面と下面があることを表している。今、この線形弾性体に対して、クラック成長におけるエネルギー平衡を考えると、クラックの進展開始条件は、

$$g \geq R, \quad (3)$$

となる。ここで、 $g (=dU/dA)$ は単位クラック面積あたりの弾性エネルギーの変化量を表し、エネルギー解放率あるいはクラック進展力と呼ばれる。 $R (=dW/dA)$ は新生面を形成するのに必要な単位クラック面積あたりのエネルギー量で、クラック進展抵抗と呼ばれる。 $A$ はクラック面積を表す。この式(3)は、エネルギー解放率 $g$ がクラック進展抵抗 $R$ に達すればクラック進展が開始することを表しており、この意味において $R$ を破壊じん性ともいい、クラック進展に対する固体の抵抗の尺度を表している。

破壊じん性は本来、クラック面積に無関係な材料固有の物質定数であるが、微視的な構造の影響を考慮すれば、クラックの通過した面積が増すとそれに対応して破壊じん性値は大きくなる。この破壊に対する抵抗値を、クラック進展半径 $a$ の関数として表したものが $R$ 曲線( $R-a$ 関係)という。この $R$ 曲線の一般的な形状は、とても単純でクラック半径 $a$ の関数として表される。

### 2.3 破壊じん性の定量化

図-3のようなクラック面を含む供試体を法線方向に引張ると、図-4(a)のような荷重応答を示す。一方、この供試体を圧縮しても、“クラックの進展方向は面内方向”と2.1節で仮定しているので、クラック半径が進展することは無く、ただ弾性変形をすることになる。

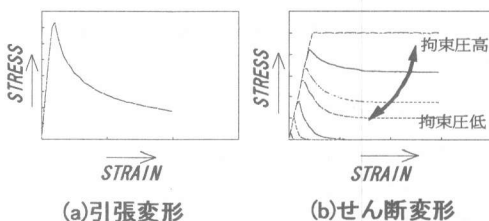


図-4 コンクリートの応力-変形関係

一方せん断応力に対する変形特性は、図-4(b)に示すように垂直方向の拘束を増加すると、せん断摩擦則によりせん断ピーク応力が増加するとともに、ぜい性的性質から延性的性質を示すようになる。逆に、垂直拘束が引張に作用すると、せん断ピーク応力が低下する性状がある。

このような力学的性質を微視クラック要素が定量的および定性的に示すために、 $R-a$ 関係を定義する必要がある。本モデルのクラックは2.1節で述べたように大胆な仮定をしているため、破壊じん性を実験などのデータから直接定義することはあまり意味がない。したがって本モデルでは先述した破壊エネルギー $G_f$ を用いて、次式を仮定した。

$$R = G_f \times [1 - (e^{-a/c_0})^3] \quad (a \geq a_0) \quad (4)$$

ここで、 $a$ はクラックの半径、 $a_0$ は初期クラック半径、 $c_0$ は材料定数。

### 2.4 クラック半径の算定

エネルギー解放率 $g$ は前述したように、式(1)をクラック面積 $A (= \pi a^2)$ で微分したものであり、次式のように応力 $\sigma$ とクラック半径 $a$ をパラメータとして表すことができる。

$$g = 4(1-\nu^2)a\sigma^2/\pi E. \quad (5)$$

本論文の数値解析では応力増大を変位制御で行うので、後述する微視クラック上の構成関係(式(8))を用いて、上式(5)から応力 $\sigma$ を削除すると、次式が得られる<sup>6)</sup>。

$$g = 4a(1-\nu^2)E\varepsilon^2/\pi(e^{a/\alpha})^2. \quad (6)$$

図-5は変位(ひずみ)一定の下での $g-a$ 関係(破線)と $R-a$ 関係(実線)を表している。ただし、 $a_0$ はクラックの初期半径を表す。図中に示すある増分変形時のクラック半径 $a_3$ に関する $g$ と $R$ の関係を考えると、 $\varepsilon_3$ 以下の変形段階( $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_3$ )では式(3)の関係を満たしていないので、このときクラック半径は進展しない。次の増分変形でさらに変形が進み $\varepsilon_4$ になった時に式(3)を満たし、このときのクラック半径は $g(\varepsilon_4, a) = R(a)$ の関係を解くと $a = a_4$ となる。

なお、本モデルでは微視クラック面の垂直方向と二つのせん断方向は互いに独立して評価

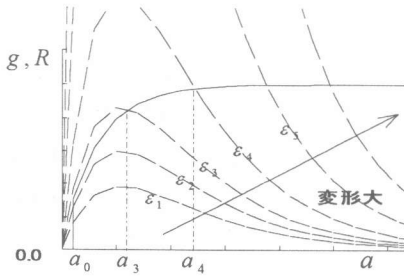


図-5 g-a 関係(破線)および R-a 関係(実線)

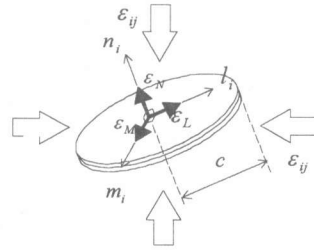


図-6 クラック面上の微視ひずみ

始めに、微視クラック要素としてのクラック面三成分方向に作用する構成関係を定義する。各成分は互いに独立であるとし

するという前提条件から、三方向で進展量をそれぞれ評価し、このうち最も大きいものをこの微視クラックの進展量として採用する。

### 3. コンクリートモデルの定式化

微視クラック面のモデル化およびその定式化には、力学モデルとしてコンクリート材料にも応用されている Bazant らによるマイクロプレーンモデル<sup>1)</sup>を参考にした。なお、本文中で特に断りがない限り、数式で下添字が二回同じ項に現れる場合に総和規約を適用する。

#### 3.1 微視ひずみの定義

ここでは、コンクリート内部に多数存在して様々な方向を持つクラック面に作用する微視的ひずみを定義する。無限速で作用する巨視的ひずみテンソル  $\epsilon_{ij}$  を、運動学的条件によりクラック面の垂直方向およびせん断方向に分解する(図-6)。

垂直成分(N 方向): クラック面に対する単位法線ベクトルを  $n$  とするとき、垂直ひずみ  $\epsilon_N$  は次式で表わされる。

$$\epsilon_N = N_{ij}\epsilon_{ij}; N_{ij} = n_i n_j. \quad (7a, b)$$

せん断成分(M, L 方向): クラック面上で互いに直交する単位ベクトルを  $m, l$  とするとき、各方向のせん断ひずみ  $\epsilon_M, \epsilon_L$  は次式で表される。

$$\epsilon_M = M_{ij}\epsilon_{ij}; M_{ij} = (m_i n_j + m_j n_i)/2, \quad (7c, d)$$

$$\epsilon_L = L_{ij}\epsilon_{ij}; L_{ij} = (l_i n_j + l_j n_i)/2. \quad (7e, f)$$

この単位ベクトル  $m, l$  の方向は一枚のクラック面上で無数に存在するが、 $m$  方向をランダムな値として固定した。 $m$  方向が決まれば、 $l$  方向は  $l = m \times n$  として得られる。

#### 3.2 コンクリート構成関係

て、各々は次式によって定義する。クラックの成長に伴い割線剛性が低減する性状は、簡単のためにクラック半径  $a$  に依存した指数関数を用いて初期剛性から低減することにした。

$$\text{垂直成分: } \sigma_N = E_{N0}/e^{a/\alpha} \cdot \epsilon_N, \quad (8a)$$

$$\text{せん断成分: } \sigma_M = E_{M0}/e^{a/\alpha} \cdot \epsilon_M, \quad (8b)$$

$$\sigma_L = E_{M0}/e^{a/\alpha} \cdot \epsilon_L. \quad (8c)$$

ここで、 $\sigma_N, \sigma_M, \sigma_L$  はクラックの各成分方向に生じる応力、 $a$  はクラックの半径、 $E_{N0}, E_{M0}$  はクラック面に対する垂直・せん断初期弾性剛性、 $\alpha$  は低減定数を表わす。

次に、コンクリートの巨視レベルにおける増分形式の釣り合い関係式は、対象としている材料内の微視クラック面の構成関係と巨視的ひずみに対して仮想仕事の原理を適用して導く。仮想ひずみ増分テンソル  $\delta\epsilon_{ij}$  を体積  $V$  のコンクリートに対して作用させると次式が成立する。

$$V d\sigma_{ij} \delta\epsilon_{ij} = \sum_{\mu=1}^N \left( \frac{V}{N} dw^\mu \right), \quad (9)$$

$$dw = d\sigma_N \delta\epsilon_N + d\sigma_M \delta\epsilon_M + d\sigma_L \delta\epsilon_L. \quad (10)$$

ここで、コンクリート内部における微視クラック要素による仕事(式(9)の右辺)は、コンクリートボリューム内に存在するランダムな方向を持つ単位法線ベクトルを重心に集めることを考えて、仮想仕事の原理を適用している<sup>8)</sup>。式(7)によると次の巨視ひずみ増分と微視ひずみ増分の関係が成り立つ。

$$\delta\epsilon_N = N_{ij} \delta\epsilon_{ij}, \quad (11a)$$

$$\delta\epsilon_M = M_{ij} \delta\epsilon_{ij}, \quad (11b)$$

$$\delta\epsilon_L = L_{ij} \delta\epsilon_{ij}. \quad (11c)$$

この関係を式(9)の右辺に適用し、変形すると次式の関係が得られる。

$$V \left( d\sigma_{ij} - \sum_{\mu=1}^N \left( \frac{1}{N} ds_{ij}^{\mu} \right) \right) \delta \varepsilon_{ij} = 0, \quad (12)$$

$$ds_{ij} = d\sigma_N N_{ij} + d\sigma_M M_{ij} + d\sigma_L L_{ij}. \quad (13)$$

式(12)は、任意の  $\delta \varepsilon_{ij}$  に対して成り立つので、次の関係が得られる。

$$d\sigma_{ij} \approx \sum_{\mu=1}^N \omega_{\mu} ds_{ij}^{\mu}. \quad (14)$$

ここで、 $\omega_{\mu}$  は  $\mu$  番目のクラックに対する重み係数を表し、全体積内にクラックが  $N$  枚あるとき、次の関係がある。

$$\sum_{\mu=1}^N \omega_{\mu} = 1.0. \quad (15)$$

#### 4. モデルの検証

##### 4. 1 数値計算の概要

以上のようにして導かれた構成式(式(14))を、既存の三次元有限要素解析プログラム<sup>9)</sup>の材料構成則を評価する部分に組み込み数値シミュレーションを行う。構成関係の計算では、内部積分点におけるひずみ増分量を基に、式(11)から有限要素内部に含まれる各クラック面上の微視ひずみが求まる。次にクラックの進展量を計算するが、本モデルでは微視クラック面の垂直方向と2つのせん断方向は互いに独立して評価するので、3方向( $l, m, n$ )で進展量を夫々評価しこのうち最も大きいものをこの微視クラックの進展量として採用する。このようにして各クラック半径の進展量が求まれば、式(8)(14)から巨視の応力増分量が計算できる。

コンクリートの材料特性、および計算で用いた各種パラメータや定数を表-1に示す。本解析では圧縮強度が約-36.0MPa(本論文では圧縮を負としている)となるようなコンクリートを想定して各値を設定しているが、圧縮強度を直接与えているわけではない。また、本モデルでは、コンクリート内部非均質性をクラックに関する初期設定値の違いとして表現している。例えば、粗骨材寸法の違いや細骨材率の違いなどは供試体内部に含まれるクラックの密度(総数  $N$ )やクラック初期半径( $\alpha_0$ )の違いとして表

表-1 材料諸元

$E_0$ : 初期弾性係数(GPa)	27.8
$\nu$ : ポアソン比(-)	0.18
$\tau_0$ : 微視クラック面のせん断応力(MPa)	20.0
$\sigma_t$ : 微視クラック面の引張強度(MPa)	40.0
$E_{N0}$ : 微視垂直初期弾性剛性(GPa); 式(8a)	43.4
$E_{M0}$ : 微視せん断初期弾性剛性(GPa); 式(8b,c)	10.3
$\alpha_0$ : 初期クラック半径(m)	0.001
$\alpha$ : 材料定数(m); 式(8)	1.00
$N$ : クラック総数(枚); 式(14)	30

現される。

しかし、本研究で提案したモデルは、クラックのモデル化など、随所に大胆な簡略化が行われており、現実のコンクリート内部構造と、本モデルとの定量的な相関性については十分な検証がなされていない。そこで、現時点ではパラメトリックな解析の結果から、表-1に示す諸値を与えることにした。つまり、解析の対象としているのは、コンクリート平板を模擬した単純一軸載荷部材であるが、この体積内(約  $2.5 \times 10^{-4} \text{m}^3$ )に、ランダムな方向を向いた初期半径0.001mの微視クラックが30枚含まれている。そのクラックの引張破壊強度が20MPaであり、せん断破壊強度が40MPaである。 $E_{N0}, E_{M0}$ の値は、マイクロブレンモデル<sup>10)</sup>を参考に、次の解析解から計算した。

$$E_{N0} = \frac{E_0}{1-2\nu}, E_{M0} = \frac{(1-4\nu)E_0}{(1-2\nu)(1+\nu)}. \quad (16a, b)$$

ここに、 $E_0$ は初期弾性係数、 $\nu$ はポアソン比。

##### 4. 2 数値シミュレーションの評価

引張方向に一軸の変形増分を与えた解析結果を図-7に示す。部材軸方向の荷重応答は、2.7MPa位まで線形性を示した後、一部のクラックが進展を始め、およそ3.2MPaをピークに軟化経路をたどるぜい性的な変形挙動を表現している。本解析では、圧縮強度に約-36.0MPaを想定して各種パラメータを設定してあるので、引張強度3.2MPaは圧縮強度の約1/10であり、ほぼ理論値通りの結果が得られたことになる。

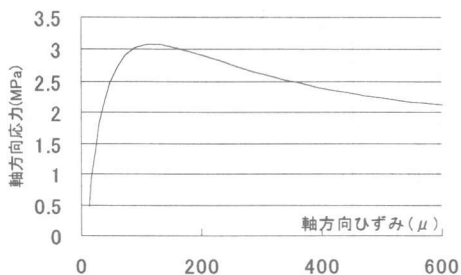


図-7 引張コンクリートの変形挙動

次に、圧縮方向に一軸の変形増分を载荷した軸方向の荷重応答、および横方向の応答結果を図-8に示す。図中には、強度が同程度の実験結果<sup>11)</sup>をあわせて示す。ピーク強度までの非線形挙動と最大耐力後の軟化挙動が表現できており、最大耐力までの計算結果はほぼ実験結果と同じ推移を示している。材料定数としてピーク時の応力値やその時のひずみ値を与えていないにもかかわらず、最大耐力時の変形量も実験値と同程度の結果が得られた。

本モデルでは、巨視のコンクリート構成関係は、対象とする領域内に含まれるマイクロ構成関係を式(14)により平均化したものとして導かれる。そのため、本モデルで行った解析では実現象として観察される“ひずみの局所化”や、コンクリート供試体の圧縮試験で観察される破壊パターン<sup>12)</sup>などは表現できない。

## 5. まとめ

本研究では、内部にクラックなどの不連続面を含む材料の物理モデルを考え、このモデルに基づいてコンクリートの構成則を導くための考え方を示した。クラックは、破壊力学の概念に基づいて進展条件が規定されている。そして、巨視応答としてのコンクリートの非線形挙動は、このクラックの半径によって決定される。この構成式を組み込んだ有限要素プログラムで一軸部材の解析を行い、コンクリートの非弾性応答をシミュレートできることを確認した。

本研究におけるクラックの進展挙動は、平面ひずみ状態を仮定してモデル化しているが、実

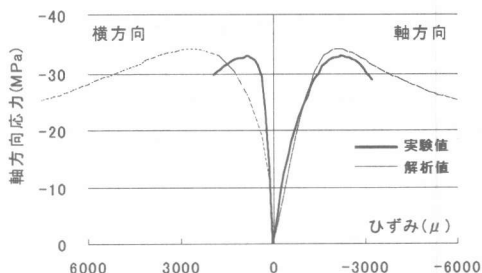


図-8 圧縮コンクリートの変形挙動

際のコンクリートでは内部応力の不均一から、クラックの進展過程において必ずしもこの仮定が成り立つとは限らない。さらに、本モデルのクラックは円形を仮定しており、その進展方向も面内方向に限っている。これらの簡略化したモデル化によって、実際の変形挙動がどの程度矛盾なく表現できるのか、今後詳細に検討する必要があると考えられる。また、本論文では一軸载荷による単調変形の解析しか行っていないが、二軸や三軸などの多軸载荷条件下にあるコンクリートの変形挙動についても、本モデルの有効性を確認する必要がある。

**謝辞** 本研究の筆頭者は日本学術振興会の特別研究員であり、本研究はその研究課題の一環として行われた。また、本研究は平成十年年度文部省科学研究費補助金(特別研究員奨励金)により行われた。記してここに感謝致します。

## 参考文献

- 1) 前川宏一・長谷川俊昭：コンクリート構成則の研究動向と課題，コンクリート工学，Vol.32，No.5，1994.5
- 2) 土木学会コンクリート委員会：構成モデル小委員会(301)成果報告書，1997
- 3) 森泉和人：破壊の局所化をシミュレートする微視構造モデルの研究動向，コンクリート工学，Vol.36，No.6，pp.27-30，1998.6
- 4) 吉田秀典，堀井秀之：マイクロメカにクス基づく岩盤の連続体モデルと大規模空洞掘削の解析，土木学会論文集，No.535/III-34，pp.23-41，1996.3
- 5) 小林英男：破壊力学，共立出版，1993
- 6) Bazant,Z.P. and Jaime Planas：FRACTURE AND SIZE EFFECT in Concrete and Other Quasibrittle Materials, CRC Press, pp.130-134, 1998
- 7) Bazant,Z.P., Xiang,Y. and Prat,P.C.:Microplane Model for Concrete, J.Engng.Mech., ASCE,pp.245-254, 1996.3
- 8) T.Hasegawa: Multi Equivalent Series Phase Model For Nonlocal Constitutive Relations of Concrete, Proc.3rd Int'l Conf. On Fracture Mechanics of Concrete Structures (FRAMCOS-3), AEDIFICATIO Publishers, pp.1043-1054, 1998
- 9) 田中忠次ほか共著：地盤の三次元弾塑性有限要素解析，丸善株式会社，1996
- 10) 長谷川俊昭：一般化マイクロプレーンコンクリートモデルの再構築，土木学会論文集，No.538/V-31，pp.129-147，1996.5
- 11) Kupfer,H., H.K.Hilsdorf and H.Rusch: Behavior of Concrete under Biaxial Stresses, J. of ACI, Vol.66, No.8, pp.656-666, Aug.1969.
- 12) 畑中重光，水野英二，小池狭千朗：圧縮下のコンクリートの破壊性状とそのモデル化について，コンクリート工学年次論文報告集，Vol.16，No.2，1994.