

論文 せん断補正要素によるコンクリートはりの引張軟化解析に関する研究

伊良波繁雄*1・富山潤*2・瑞慶山良延*3・和仁屋晴謹*4

要旨: コンクリートはりの引張破壊を有限要素法で解析するとき、解析の精度を高めるために、破壊力学を考慮した解析が多数行われてきた。筆者らは、曲げや軸力を受ける部材に対してはり要素を用いたコンクリートの引張軟化を考慮した解析法を提案した。はり要素による解析結果は平面要素による解析結果に比べれば精度は少し劣るが、計算コストやデータの作成面での優位性がある。本研究は、筆者らが提案してきたはり要素を用いた解析法をさらに改良するために、藤谷によって提案された、せん断変形を考慮したはりの変位関数を用いて再度検討した。

キーワード: 破壊力学, 引張軟化, 有限要素法, せん断変形

1. はじめに

コンクリートのひび割れを取り扱う方法として、離散ひび割れを仮定する方法と分布ひび割れを仮定する方法がある¹⁾。有限要素法でコンクリートの引張軟化を考慮したひび割れ解析を行うとき、平面要素の代わりにトラス要素やはり要素を用いて解析することができれば、計算効率や入力データの作成の上からより有利になる。筆者らは、トラス要素やはり要素のような一次元要素を用いて、図-1に示す二直線モデルで表した引張軟化を考慮した増分解析法を提案した^{2), 3), 4) 5)}。解析方法の適用例として、無筋コンクリートはりの曲げ試験、鋼繊維補強コンクリートはりの曲げ試験、低鉄筋比コンクリートはりの曲げ試験等に良好な結果を得ることができた。また、筆者らは解析手法も山田らによって提案された Rmin 法を応用した増分法や運動方程式を用いた増分法を提案している⁵⁾。

これらの研究で用いられているはり理論はせん断力を考慮しない単純なはり理論を用いているが、本研究では、近年藤谷⁶⁾によって開発され、高層立体骨組構造、鉄道車両構体等の解

析に有効な、せん断補正要素を用いて、せん断力を考慮した引張軟化解析方法を示した。

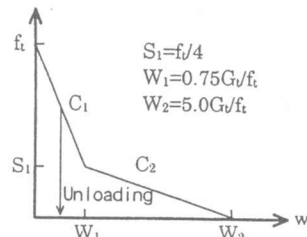


図-1 引張軟化曲線

2. 解析方法

2.1 剛性マトリックス

図-2の座標系で $x-z$ 面内だけの変形を仮定し、 x 方向の変位を U 、 z 方向の変位を W とし、せん断変形による軸方向付加変位を W_s とする。この時、せん断変形を考慮したはり要素の変位関数は藤谷が示しているように次式のようになる⁶⁾。

$$\left. \begin{aligned} U &= u \\ W &= w - x \frac{\partial u}{\partial z} + W_s \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

x 、 z 軸のみ考慮しているの、ひずみエネルギーは次式のようになる。

* 1 琉球大学助教授 工学部環境建設工学科 工博 (正会員)

* 2 琉球大学 理工学研究科 工学修士 (正会員)

* 3 琉球大学工学研究科 理工学研究科 (正会員)

* 4 琉球大学助教授 工学部環境建設工学科 (正会員)

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dV \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} \iiint \left[E \left(\frac{\partial w}{\partial z} - x \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial W_s}{\partial z} \right)^2 + G \left(\frac{\partial W_s}{\partial x} \right)^2 \right] dV$$

剛性方程式を求めるため、はり理論でよく用いられているように式(1)において軸方向の変位 w を式(3)に示すように 1 次式、 u を式(4)に示すように 3 次式で仮定する。

$$w = \beta^T \mathbf{w}^T \quad (3)$$

ここで

$$\beta^T = (\beta_1 \ \beta_2) \quad , \quad \mathbf{w}^T = (w_L \ w_R)$$

$$\beta_1 = 1 - \frac{z}{l} \quad , \quad \beta_2 = \frac{z}{l}$$

である。

$$u = \alpha^T \mathbf{u}^T \quad (4)$$

ここで

$$\alpha^T = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4) \quad , \quad \mathbf{u}^T = (u_L \ \theta_L \ u_R \ \theta_R)$$

$$\alpha_1 = 1 - 3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 + 2 \left(\frac{z}{l} \right)^3$$

$$\alpha_2 = l \left\{ \left(\frac{z}{l} \right) - 2 \left(\frac{z}{l} \right)^2 + \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right\}$$

$$\alpha_3 = 3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 - 2 \left(\frac{z}{l} \right)^3$$

$$\alpha_4 = l \left\{ - \left(\frac{z}{l} \right)^2 + \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right\}$$

である。

せん断補正変位 W_s は式(5)に示すように 1 次式で仮定した。

$$W_s = a^T \mathbf{W}_s^T \quad (5)$$

ここで

$$\mathbf{a}^T = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4) \quad , \quad \mathbf{W}_s^T = (W_{Lj} \ W_{Lj} \ W_{Ri} \ W_{Rj})$$

$$a_1 = \left(1 - \frac{x_1}{h} \right) \cdot \left(1 - \frac{z}{l} \right) \quad , \quad a_2 = \frac{x_1}{h} \cdot \left(1 - \frac{z}{l} \right)$$

$$a_3 = \left(1 - \frac{x_1}{h} \right) \cdot \frac{z}{l} \quad , \quad a_4 = \frac{x_1}{h} \cdot \frac{z}{l}$$

である。 h は図-2 に示すように、せん断補正要素の高さ、 x_1 はせん断補正要素の局所座標、 l ははり要素の長さ、 W_{Lj} 、 W_{Lj} 、 W_{Ri} 、 W_{Rj} はせん断補正要素の材軸方向変位である。

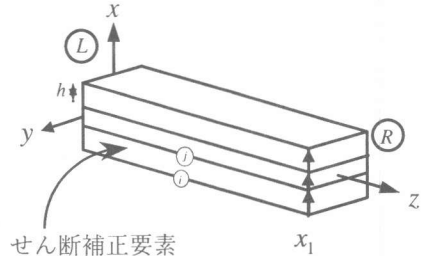


図-2 はり要素の座標系

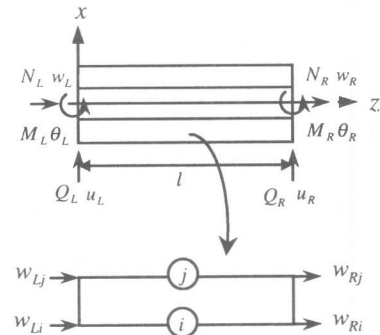


図-3 せん断補正要素

式(3)、(4)、(5)を式(2)代入すると式(2)は式(6)のように表すことができる。

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{w}^T A_1 \mathbf{w} + 2 \mathbf{w}^T A_2 \mathbf{u} + 2 \mathbf{w}^T A_3 W_s + \mathbf{u}^T A_4 \mathbf{u} + 2 \mathbf{u}^T A_5 W_s + W_s^T A_6 W_s + W_s^T A_7 W_s \right\} \quad (6)$$

ここで

$$A_1 = \int E \frac{\partial \beta}{\partial z} \cdot \frac{\partial \beta^T}{\partial z} dV \quad , \quad A_2 = - \int E x \frac{\partial \beta}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \alpha^T}{\partial z^2} dV$$

$$A_3 = \int E \frac{\partial \beta}{\partial z} \cdot \frac{\partial \alpha^T}{\partial z} dV \quad , \quad A_4 = \int E x^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 \alpha^T}{\partial z^2} dV$$

$$A_5 = - \int E x \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial \alpha^T}{\partial z} dV \quad , \quad A_6 = \int E \frac{\partial \alpha}{\partial z} \cdot \frac{\partial \alpha^T}{\partial z} dV$$

$$A_7 = \int G \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot \frac{\partial \alpha^T}{\partial x} dV$$

である。

式(6)で \mathbf{w} 、 \mathbf{u} 、 W_s についての停留条件を求めるとせん断変形を考慮した剛性マトリックスが得られる。剛性マトリックスと節点力を同時に示

すと式(7)となる。

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2^T & A_4 & A_5 \\ A_3^T & A_5^T & A_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ u \\ W_S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_w\} \\ \{f_u\} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ここで

$$A_8 = A_6 + A_7$$

$$\{f_w\}^T = \{N_L \ N_R\}$$

$$\{f_u\}^T = \{Q_L \ M_L \ Q_R \ M_R\}$$

である。なお、 N_L と N_R は図-3に示すように、それぞれ、節点 L と節点 R の軸方向節点力である。また、 Q_L, M_L, Q_R, M_R は図-3の節点 L や節点 R のせん断力やモーメントの節点力を意味する。

2. 増分計算の方法

ひび割れの進展を知りためには、増分法が用いられる。増分計算法は筆者らが提案したRmin法(山田の方法)を応用した増分法²⁾を用いて解析した。

せん断補正要素を含むはりの剛性マトリックスを求めるとき各項は要素に関する体積積分となっている。このために、図-2に示すようにはり高方向に補正要素で分割し(図-2の例は補正要素で3分割した図である)、さらに、補正要素を層状に分割して計算を行った。

なお、剛性マトリックスを求めるとき各項は要素に関する体積積分となっている。このとき、弾性係数の積分 $\int E dV, \int E x dV, \int E x^2 dV$ 等が現れるが、これらは補正要素を層状に分割した各層で積分を行った。すなわち、せん断補正要素を Δx 間隔で n 層に分割したときの式を示すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \int E dV &= lb \sum_{j=1}^n E_j \Delta x, \int E x dV = lb \sum_{j=1}^n E_j x_j \Delta x \\ \int E x^2 dV &= lb \sum_{j=1}^n E_j x_j^2 \Delta x \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで要素の長さは l 、幅は b である。

式(8)はヤング係数の積分だけを示してあるが、せん断弾性係数 G の積分も同様にすればよい。

普通コンクリートの引張軟化曲線として図-1に示す六郷らの提案した1/4モデルを使用し、各増分段階における j 番目層のヤング率を E_j とすると、 E_j は次のようになる。

$$\text{弾性状態} \quad E_j = E$$

$$\text{引張状態} \quad E_j = \frac{C_1 E l}{E + C_1 l} \quad (0 < W < W_1)$$

$$E_j = \frac{C_2 E l}{E + C_2 l} \quad (W_1 < W < W_2)$$

また、コンクリートの圧縮域での塑性は図-4のように仮定しているので、各増分段階における j 番目層のヤング率を E_j とすると、 E_j は図-4に示すように、各荷重の大きさによって E_{c1}, E_{c2}, E_{c3} を用いればよい。なお、図-4で f_c' はコンクリートの圧縮強度である。引張軟化曲線は図-1の2直線モデルを仮定し、ひび割れ面でのせん断弾性係数は引張軟化曲線のひび割れ幅 W_2 までは弾性時 $G = E/(2(1+\nu))$ と同じ値を仮定し、 W_2 より大きくなるとゼロと仮定した。引張軟化時の除荷は図-1に示す経路を用いた。

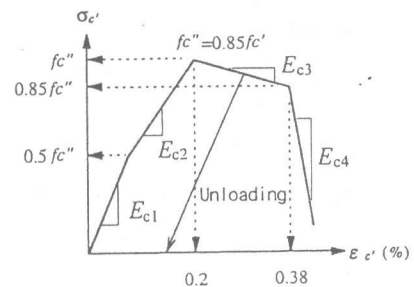


図-4 コンクリートの応力ひずみ曲線

3. 数値解析例

3.1 片持ち平板の面内変形解析

せん断補正要素を用いた解析の計算例として、最初に、図-5に示す片持ちばりが自由端に集中荷重を受ける問題に適用した例を示す。要素分割は、はりの長さ方向に5分割、はりの深さ

方向にはせん断補正要素で10分割し、1個のせん断補正要素につき10層に分割して数値積分した。解析で用いたはりのヤング係数は20000KN/cm²、ポアソン比は0.25として計算し図-6にはりの軸方向の応力 σ_x 分布とせん断応力 τ_{xz} の分布を示した。

軸方向応力分布の比較で、実線は筆者らの解析結果、破線はせん断変形を無視した従来のはり理論解を示している。せん断補正要素を用いることによって、はりの固定端付近で通常のはり理論では求めることのできない、せん断遅れの現象が見られる。しかし、固定端部から離れるに従って、通常のはり理論の結果と一致する。せん断応力の分布は図-7に示した。同図で実線は筆者らの解析結果、破線はせん断流理論解⁶⁾を示している。はりの固定端付近では理論値よりも少し高めであるが、固定端部から離れるに従って、理論値に近づく。

3.2 片持ち無筋コンクリート平板の面内変形解析

ここでは、せん断補正要素を用いてコンクリートのひび割れ解析を行うとき、ひび割れ面でのせん断力の伝達は簡単に考慮することができるので、その解析例を示す。解析例は計算例3.1と同様に図-5に示す片持ちコンクリート平板が自由端に集中荷重を受ける問題に適用した例を示す。要素分割は、はりの長さ方向に5分割、はりの深さ方向にはせん断補正要素で10分割し、1個のせん断補正要素につき10層に分割して数値積分した。コンクリートのヤング係数は24500N/mm²、ポアソン比は0.2、圧縮強度44.1 N/mm²、引張強度は3.9N/mm²、破壊エネルギー G_f は0.12 N/mmとする。

解析結果を図-8に示す。ひび割れははりの固定端近くの要素下面に発生に、順次上の方に進展していく、この時、はり固定端部の第1番目の要素のせん断応力の分布から、引張ひび割れが進行するにつれて、ひび割れ間で伝達されるせん断応力が徐々に低下しているのがわかる。

なお、この問題に対する、実験や他の解析手法による例はないので、詳しい検討を行うことはできないが、せん断補正要素を用いてコンクリートのひび割れ解析を行うとき、ひび割れ面でのせん断力の伝達は簡単に考慮することができる事がわかる。

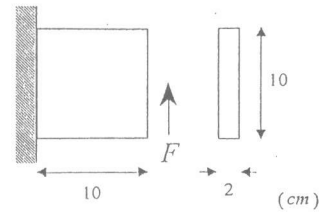


図-5 要素寸法

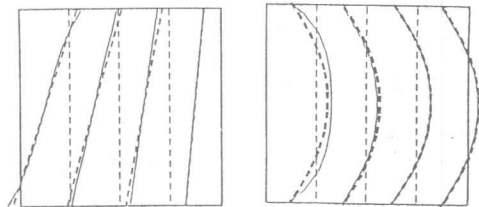


図-6 軸方向応力

図-7 せん断応力分布

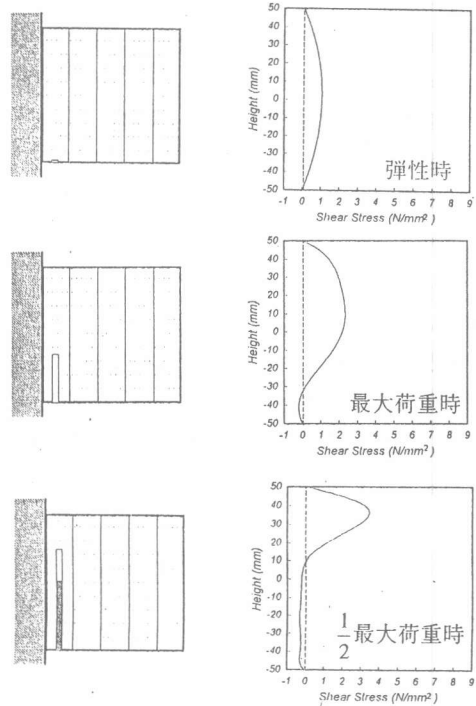


図-8 ひび割れ面でのせん断応力の分布

3.3 無筋コンクリートの曲げ破壊

1993年JCIで「コンクリート構造の破壊に関する共通解析および実験」が実施され、解析モデルや解析手法の比較検討が行われた¹⁾。ここでは共通解析¹⁾の内、試験体番号#2の普通コンクリートはり（はり高20cm）の解析を行った。材料特性値はヤング係数を 27500N/mm^2 、ポアソン比を0.2、圧縮強度を 34.3N/mm^2 、引張強度を 2.9N/mm^2 、破壊エネルギー G_f を 0.1N/mm とした。はり高方向にせん断補正要素を10分割し、さらに、1個のせん断補正要素に対し10層分割を行った。分割した要素の長さはいり高の $1/3$ の長さを用いた²⁾。なお、モーメントスパンのはいり底面の引張応力は一定であるので、初期ひび割れを発生させるために、図-9のはいり中央の要素番号5のはいり高を1%小さくして解析した。

図-10に試験体番号#2の普通コンクリートはりの荷重とたわみの関係を示した。同図にはせん断補正要素による解析(SCE)、せん断変形を考慮に入れていないはいり要素による解析(BE)、内田らによる実験結果、内田らによる平面三角形要素による解析比較を示す。図-10より明らかのように、せん断補正要素による解析のほうが、通常のはり要素による解析に比較して実験結果に対し良好な結果を得ることができる。これは、せん断力の影響によるものと思われる。また内田らによる平面三角形要素の解析と比較すると、本解析とほぼ一致していることがわかる。せん断補正要素によって解析した#2普通コンクリートはりのひび割れ図を図-11に示してある。ひび割れは、最初中央の要素番号5に発生し、次いで隣の要素にひび割れが発生し、ひび割れが進行していく。荷重が最大値付近($P=45.657\text{kN}$)になると、中央の要素5以外のひび割れは除荷が生じ、中央のひび割れだけが進行する。なお、他の無筋コンクリートはりの共通試験体についても、本論文で示した解析結果と同様に良好な結果を得ることができた。

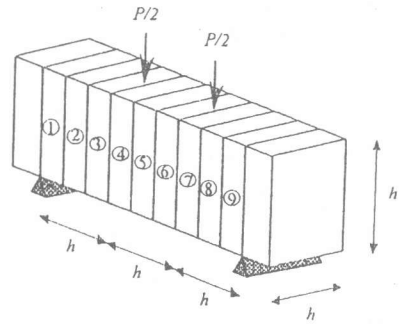


図-9 要素分割

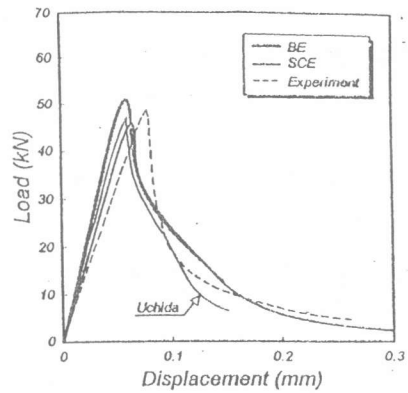


図-10 荷重-変位曲線

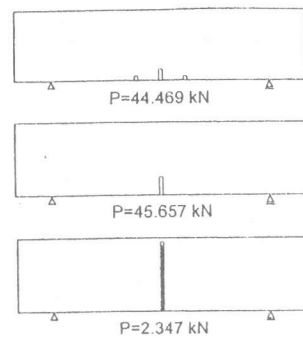


図-11 ひび割れ進展図

3.4 鋼繊維補強コンクリートはりの曲げ破壊

ここで示す解析例も、JCIから提案された共通解析¹⁾の内、試験体番号#4の鋼繊維補強コンクリートはり（はり高10cm）の解析例で

ある。解析では、3.3の無筋コンクリートと同じ条件で解析した。なお、鋼繊維補強コンクリートの引張軟化曲線は通常、図-12に示すような多直線モデルで解析されるが、ここでは、同図に示すように、多直線モデルをさらに、二直線モデル(1/4と1/5モデル)で近似して解析した。材料特性値はヤング係数を29400N/mm²、ポアソン比を0.2、圧縮強度を44.1N/mm²、引張強度を3.9N/mm²、破壊エネルギーG_fを8.29N/mmとした。

荷重とたわみの関係を図-13に示した。同図では平面要素による内田らの解とのせん断補正要素を用いた解の比較を示しているが、引張軟化曲線を図-12の1/5モデルで表した方が平面要素による解に近い。なお、ここでは、実験結果を示していないが、参考文献1)、4)と比較すると実験結果との一致は良好である。

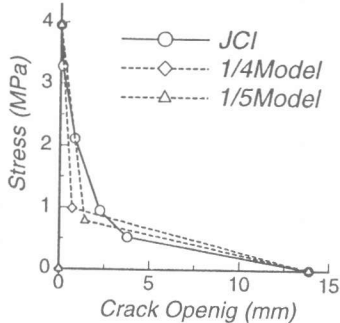


図-12 鋼繊維補強コンクリートの引張軟化曲線

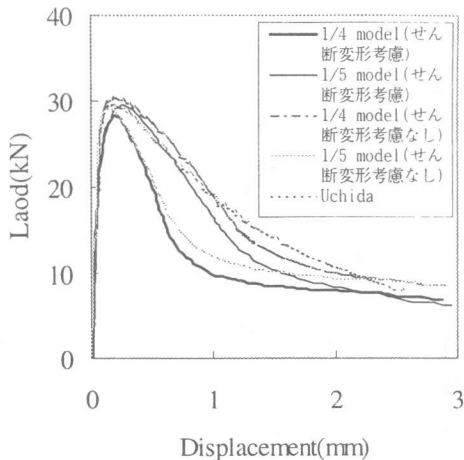


図-13 荷重-変位曲線

5. まとめ

本研究では、近年藤谷⁶⁾によって開発され、高層立体骨組構造、鉄道車両構体等の解析に有効な、せん断補正要素を用いて、せん断力を考慮した引張軟化解析方法を示した。せん断要素を用いた有限要素解析は、通常のはり要素を用いた解析に比べると、定式化が複雑で解析プログラムを作成するのも困難であるが、ひび割れ面でのせん断応力の伝達が容易に取り扱える利点がある。

JCI 共通解析の内、無筋コンクリートはり、鋼繊維補強コンクリートはりの曲げ試験の解析を1体ずつ示したが、いずれも良好な結果を示した。

謝辞: 本研究を進めるにあたり広島大学工学部 藤谷義信教授より多くの助言を頂きました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 破壊力学の応用研究委員報告書：日本コンクリート工学協会，1993.10
- 2) 伊良波繁雄：ハイブリッドストレスモデルによるコンクリートの引張軟化解析，コンクリート工学年次論文報告集，Vol.12,No.2,pp.753-758，1990
- 3) 伊良波繁雄：はり要素による引張軟化の解析的研究，コンクリート工学年次論文報告集，Vol.14,No.2,pp.897-901，1992
- 4) 伊良波繁雄，和仁屋晴謹，具志幸昌：はり要素によるコンクリートの破壊解析，コンクリート工学年次論文報告集，Vol.16,No.2,pp.15-20，1994
- 5) 富山潤，伊良波繁雄，和仁屋晴謹：新しい増分解析法によるコンクリートの曲げ破壊挙動の解析，コンクリート工学年次論文報告集，Vol.19,No.2,pp.63-68，1997
- 6) 藤谷義信：薄肉はり構造解析，培風館，1990.6