

論文 マイクロプレーンモデルを用いた RC ティモシェンコはりの解析

丸尾宗朋*1, 田邊忠顕*2

要旨: マイクロプレーンモデルは巨視的レベルでの載荷基準を必要とせず, マイクロプレーン上のひずみに基づく簡単な載荷, 除荷の基準のみが使用されるため, 複雑な載荷条件を持つ従来の巨視的な構成則に比べ大きな利点を持つ。我々の研究室で開発したマイクロプレーンモデルを用いてティモシェンコはり理論に基づく有限要素法による, 二軸応力状態にある構造物の解析を行った。また, 従来の曲げ理論に基づく有限要素解析との比較検討も行った。

キーワード: マイクロプレーンモデル, ティモシェンコはり理論

1. 序論

コンクリートは粗骨材とモルタルからなる複合非均質材料であるといえる。この骨材等粒子間の界面をマイクロプレーンと呼び, ここで生じる微視的な応答を重ね合わせたものをコンクリートの構成則とするのがマイクロプレーンモデル¹⁾である。

我々の研究室で独自に開発したマイクロプレーンモデルは, 骨材-モルタル粒子間, 骨材粒子間のマイクロプレーン上の応答が独立している, よりミクロの実挙動に基づいたコンクリート構成則である。現在までに繰り返し載荷への拡張がなされているが一軸応力状態での解析しか行っておらず, せん断力を受けることで多軸応力状態にある構造物の構成則として用いるには不十分であった。そこで, このマイクロプレーンモデルを二軸応力状態に適用できる構成則に拡張すると共に, せん断変形の基本関係を導入して曲げ剛性方程式を修正するティモシェンコはり理論を用いた有限要素解析を行った。

2. マイクロプレーンモデル

2.1 基本概念

マイクロプレーンモデルでは, コンクリートは骨材粒子とモルタル粒子の2種類の粒子によって構成されるものと理想化される。この理想化により, コンクリート中において骨材粒子相互, 骨材粒子-モルタル粒子の接触面の存在を考慮することができる。

体積 V の任意の大きさの領域についての平均マクロ応力増分 $\Delta\bar{\sigma}_{ij}$ を, この領域に含まれる骨材, モルタル両粒子のすべてのものに対するマクロ応力増分の和であると定義すると, 式(1)のように書くことができる。

$$\Delta\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \left[\sum_{\alpha_1}^{c_1} \Delta f_i^{\alpha_1} l_j^{\alpha_1} + \sum_{\alpha_2}^{c_2} \Delta f_i^{\alpha_2} l_j^{\alpha_2} + \sum_{\alpha_2}^{c_2} \Delta f_i^{\alpha_2} l_j^{\alpha_2} \right] \quad (1)$$

ここで, c_1 は領域内の骨材粒子相互の接触点総数, c_2 は骨材粒子-モルタル粒子の接触点総数, α_1 と α_2 はそれぞれ領域内の骨材粒子とモルタル粒子の各接触点を区別する指標である。また, Δf_i は接触点における接点力増分, l_j^α は α 番目の接触点に対する粒子の位置ベクトルである。

コンクリート材料には, そのミクロ構造に非均質性があると考えられ, 式(1)において接触

*1 名古屋大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (学生会員)

*2 名古屋大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 工博 (正会員)

点総数を存在確率密度関数 $E(\theta)$ で考慮する。これにより、接触点における法線のなす角度が θ から $\theta + \Delta\theta$ の間に含まれる接触点の数は、接触点総数を C とすると $CE(\theta)\Delta\theta$ となる。

さらに、接触面に垂直な方向余弦 $n = (\cos\theta, \sin\theta)$ を用いると、以下のように積分の形に書き換えられる。

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\sigma}_{ij} = & \frac{C_1 \bar{l}^1}{V} \int_0^{2\pi} \Delta \bar{f}_i^1(\theta) n_j(\theta) E(\theta) d\theta \\ & + \frac{C_2 \bar{l}^1}{V} \int_0^{2\pi} \Delta \bar{f}_i^2(\theta) n_j(\theta) E(\theta) d\theta \\ & + \frac{C_2 \bar{l}^2}{V} \int_0^{2\pi} \Delta \bar{f}_i^2(\theta) n_j(\theta) E(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 \bar{l}^1 と \bar{l}^2 はそれぞれ骨材粒子とモルタル粒子の半径の平均である。

次に、平均接触点をマイクロひずみ増分で表すことを考える。接触点における垂直、せん断接触点力増分 Δf_n 、 Δf_t と垂直、せん断マイクロひずみ増分 $\Delta \varepsilon_n$ 、 $\Delta \varepsilon_t$ は、接触点における垂直、せん断方向のマイクロ剛性を介して次式のように関連づけられるとする。

$$\Delta f_n = K_n \Delta \varepsilon_n \quad (3a)$$

$$\Delta f_t = K_t \Delta \varepsilon_t \quad (3b)$$

ここで、各々のマイクロプレーンの垂直ひずみ ε_n 、せん断ひずみ ε_t 、側方ひずみ ε_L は、ひずみテンソル ε_{ij} をそれぞれマイクロプレーンの垂直方向、せん断方向、平行方向に分解したものと定義する。いわゆる、運動学的拘束条件とする。ここで、接触面に垂直な方向余弦 $n = (\cos\theta, \sin\theta)$ と接触面接線方向の方向余弦 $t = (-\sin\theta, \cos\theta)$ を用いて次のように書くことができる。

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{ij} n_i n_j \quad (4a)$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{ij} t_i t_j \quad (4b)$$

$$\varepsilon_L = \varepsilon_{ij} t_i t_j \quad (4c)$$

ここで、我々の研究室で開発されたマイクロプレーンモデルの修正点として、垂直圧縮応答がマイクロプレーンの平行な方向へ幾何学的に分解して得られる側方ひずみに直接的に依存するという定式化を用いた。これは各マイクロプレーンの応答がそのマイクロプレーンのひず

みによって決定されることを表し、個々のマイクロプレーンが独立であることを示す。この側方ひずみの存在により二軸応力状態における圧縮応答をうまく表すことができる。

以上より、次に示すような平均マクロ応力増分-平均マクロひずみ増分関係が得られる。

$$\Delta\bar{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \Delta\bar{\varepsilon}_{kl} \quad (5)$$

ここで、

$$D_{ijkl} = \eta_1 \int_0^{2\pi} (k_n a_{ijkl} + k_t b_{ijkl})^1 \bar{E}(\theta) K d\theta \quad (6)$$

$$+ \eta_2 \int_0^{2\pi} (k_n a_{ijkl} + k_t b_{ijkl})^2 \bar{E}(\theta) d\theta$$

$$a_{ijkl} = n_i n_j n_k n_l$$

$$b_{ijkl} = t_i n_j t_k n_l$$

$$\eta_1 = C_1 \bar{l}^1 \bar{a}_1 / 2\pi V$$

$$\eta_2 = C_2 \bar{l}^1 \bar{a}_2 / 2\pi V + C_2 \bar{l}^2 \bar{a}_2 / 2\pi V$$

$$\bar{E}(\theta) = 2\pi E(\theta) = 1 + A \cos 2\theta$$

k_n は接触点でのマイクロ応力-マイクロひずみ関係から得られる垂直マイクロ剛性である。マイクロ剛性は、以下のようにマイクロ応力 (σ_n) - マイクロひずみ (ε_n) 曲線に対する接線となる。

$$k_n = \frac{d\sigma_n}{d\varepsilon_n} \quad (7)$$

問題の簡略化と、パラメータの削減のために、せん断マイクロ剛性 k_t が以下のように、垂直マイクロ剛性 k_n に対しパラメータ λ を介して関連づけられることとした。

$$k_t = \lambda k_n \quad (8)$$

ここで、一軸ひずみ状態における、微小ひずみに対する関係を考えることより、ポアソン比 ν 、垂直剛性-せん断剛性間のパラメータ λ 、非均質パラメータ A の関係、さらに初期マイクロ剛性 E と初期マイクロ剛性 E_1 、 E_2 の間の関係が以下のように得られる。

$$\nu = \frac{1-\lambda}{4-2A} \quad (9)$$

$$E = \frac{\pi}{4} (3 + \lambda - 2A) (\eta_1 E_1 K + \eta_2 E_2) \quad (10)$$

2.2 ミクロ応力-マイクロひずみ関係

マイクロ応力 σ_n - マイクロひずみ ε_n 関係を骨材粒

子間接触, 骨材粒子-モルタル粒子間接触のそれぞれに対し, 図. 1, 2 のように仮定する。

2.3 マイクロプレーンモデルを用いた計算例

単一要素を用いて二軸圧縮-引張試験の解析を行った。これは, Kupfer の二軸圧縮-引張試験²⁾を対象とした。(図. 3)

3. 解析方法

3.1 ティモシェンコはり理論

従来の曲げ剛性マトリクスにせん断変形を組み込む一つの手法をティモシェンコはり理論という。これは, たわみを曲げたわみとせん断たわみに分解しせん断変形の基本関係を導入して曲げ剛性方程式を修正する方法で定式化する。

せん断変形を考慮するためにはり要素の x , y 方向の各々の変位増分 $W(x, y)$, $V(x, y)$ を曲げ変形成分並びにせん断変形成分を用いて以下のように表す。

$$W(x, y) = w - y \frac{\partial v_b}{\partial x} \quad (11)$$

$$V(x, y) = v_b + v_s \quad (12)$$

w : 軸力による軸方向変位増分

v_b : 曲げによるたわみ変位増分

v_s : せん断によるたわみ変位増分

(9), (10) で示した変位場を用いると, 軸ひずみ, せん断ひずみ成分はそれぞれ次式で与えられる。

$$\varepsilon_x = \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} \right) \quad (13)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v_s}{\partial x} \quad (14)$$

ここで, 増分形の仮想仕事方程式は

$$\begin{aligned} \delta W &= \iiint \left\{ \sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} \right\} dV \\ &= \iiint \left\{ \sigma_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} \right) + \tau_{xy} \delta \left(\frac{\partial v_s}{\partial x} \right) \right\} dV \end{aligned} \quad (15)$$

となり上式より有限要素法解析に用いる剛性方程式を求める。

まずせん断変形を含めた y 軸まわりの曲げ変形を考えるために, はり要素の両端 i, j におけ

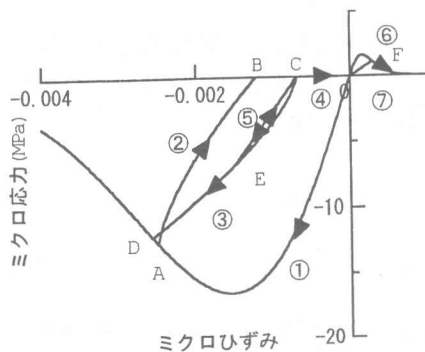


図. 1 ミクロ応力-ひずみ関係 (骨材-モルタル)

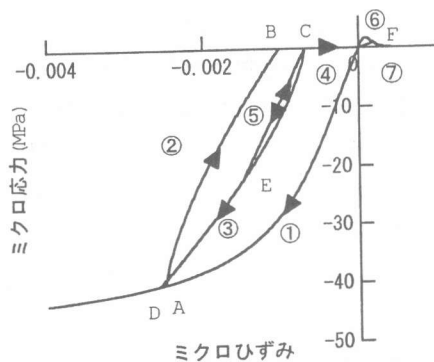


図. 2 ミクロ応力-ひずみ関係 (骨材-骨材)

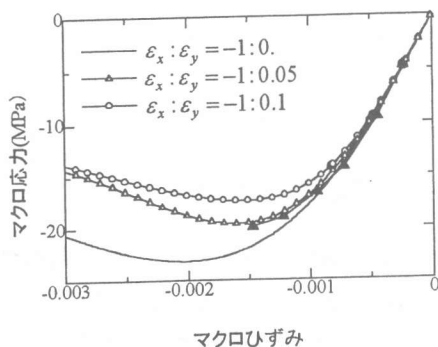


図. 3 Kupfer の二軸圧縮-引張試験の解析

る節点力としてせん断力 Q_i , Q_j , 曲げモーメント M_i , M_j が次の関係を満足する必要がある。

$$Q_i = -Q_j = \frac{M_i + M_j}{l} \quad (16)$$

従って、はり要素は、せん断力 Q_i を受けているので、せん断変形によるはりのたわみ v_s については、次の関係式が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{dv_s}{dx} &= -\frac{Q_i}{GA} = -\frac{1}{GA} \frac{dM}{dx} \\ &= -\frac{EI}{GA} \frac{d^3 v_b}{dx^3} \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、 EI は断面の曲げ剛性、 GA は有効断面のせん断剛性であり RC 部材のクラック状態などに依存する。これは後に述べるせん断剛性モデルから求める。

上式は曲げ変形とせん断変形との関係式であり、部材の変位増分を三次多項式と仮定すると、各変位増分の変位関数は次のように表される。

$$w = [N_w] \{du\} \quad (18)$$

$$v_b = [N_{vb}] \{dv\} \quad (19)$$

$$v_s = [N_{vs}] \{dv\} \quad (20)$$

$$N_u = \left[1 - \frac{x}{L}, \frac{x}{L} \right] \quad (21)$$

$$N_{vb} = \frac{1}{1 + \frac{12k}{L^2}} \left[1 + \frac{6k}{L^2} - \frac{3}{L^2} x^2 + \frac{2}{L^2} x^3, \right. \\ \left. - \frac{12k^2}{L^3} - \frac{4k}{L} + \left(\frac{12k}{L^2} + 1 \right) x + \left(-\frac{6k}{L^3} - \frac{2}{L} \right) x^2 + \frac{1}{L^2} x^3, \right. \\ \left. - \frac{6k}{L^2} + \frac{3}{L^2} x^2 - \frac{2}{L^3} x^3, \right. \\ \left. \frac{12k^2}{L^3} - \frac{2k}{L} + \left(\frac{6k}{L^3} - \frac{1}{L} \right) x^2 + \frac{1}{L^2} x^3 \right] \quad (22)$$

$$N_u = \frac{1}{1 + \frac{12k}{L^2}} \left[\frac{6k}{L^2} - \frac{12k}{L^2} x, \frac{12k^2}{L^2} + \frac{4k}{L} + \frac{6k}{L^2} x, \right. \\ \left. - \frac{6k}{L^2} + \frac{12k}{L^2} x, \frac{12k^2}{L^2} + \frac{2k}{L} - \frac{6k}{L^2} x \right] \quad (23)$$

ここで $k = EI/GA$ である。もしせん断剛性 (GA) が無限大であったら、上式の変位関数は従来の曲げに関するものと一致する。また $\{du\}$, $\{dv\}$ は材料の部材方向、鉛直方向の節点変位増分ベクトルである。このマトリクスを用い要素剛性マトリクスは、次式により与えられる。

$$[K] = \iiint [B]^T [D] [B] dx dy dz \quad (24)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} B_b \\ B_s \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} E & E^* \\ G^* & G \end{bmatrix}$$

ここで、 $[B_b]$ は節点変位増分-軸ひずみ増分マ

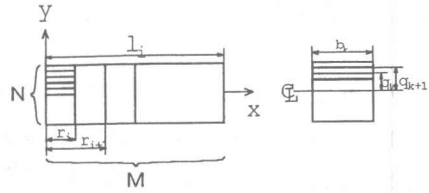


図.4 ファイバー分割

トリクス、 $[B_s]$ は節点変位増分-せん断ひずみ増分マトリクスである。 $[D]$ は応力増分-ひずみ増分マトリクスである。ここで、注意すべき点は $[D]$ が二次式となり、軸方向応力がせん断ひずみの影響を受けることである。

3.2 せん断変形を考慮したファイバーモデル

はり要素のモデル化には、部材断面をいくつかのファイバーと呼ばれる微小要素に分割し、それぞれの微小要素ごとに応力-ひずみ関係を考えるファイバーモデル³⁾を用いた。但し、本研究におけるファイバーモデルの特徴はせん断変形を考慮していることである。

解析手順を簡単に示すと、まず前ステップにおいて得られた節点増分変位より、各ファイバーでの増分ひずみを求める。そして、この増分ひずみを用いて、コンクリート、鉄筋それぞれの履歴ルールに従い、各ファイバーでの接線剛性を求める。次に、各ファイバーでの接線剛性を積分することにより断面の剛性を求め、さらに、この断面の剛性を要素軸方向に積分することで最終的にはり要素の剛性マトリクスが求められる。

具体的なファイバーの分割は、図.4 に示すように要素を軸方向 (x 方向) に M 等分、鉛直方向 (y 方向) に N 等分する方法を採った。

ファイバーモデルを導入することにより式 (22) の積分形式は以下のように各ファイバーの総和となる。

$$[K] = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^M b_k E_{jk} B_b^T B_b + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^M b_k E_{jk}^* B_b^T B_s \\ + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^M b_k G_{jk}^* B_s^T B_b + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^M b_k G_{jk} B_s^T B_s \quad (25)$$

ここで、 E_{jk} , E_{jk}^* , G_{jk} , G_{jk}^* は図.4 における

軸方向に j 番目, 断面高さ方向に k 番目の各ファイバー要素毎にマイクロプレーンモデルより求めた接線剛性である。また, b_k ははり要素の幅である。

解析は, 以上のようにして求めた各要素の増分形剛性マトリクスを全体座標形に変換し, 構造物全体の剛性マトリクスを求め, 変位増分法により行う。収斂は行っておらず変位増分を細かくして誤差を少なくしている。

3.3 せん断剛性モデル

ティモシェンコはり理論を用いる場合に必要なせん断剛性 (GA) は, 初期状態においてはポアソン比から求める。

$$GA = \frac{EA}{2(1+\nu)} \quad (26)$$

次に, 斜めひび割れが発生した後はトラスモデルから導いたせん断剛性を使う。

$$GA = E_s \cdot b_w \cdot d \left(\frac{r}{1+4nr} \right) \quad (27)$$

$$r = \frac{A_v}{b_w \cdot S}, \quad n = \frac{E_s}{E_c}$$

ここで, E_c , E_s はコンクリート, 腹鉄筋の接線剛性, A_v は腹鉄筋の断面積, b_w , d は断面幅, 有効高さである。これにより図.5 のような劣化せん断剛性モデルとなっている。

4. RC はりへの適用

4.1 実験概要

二軸応力場において以上で述べたマイクロプレーンモデルが有効であるか, クラーク⁴⁾によって行われた実験でのせん断破壊を起こす試験体を対象として, ファイバーモデルを用いた有限要素解析を行った。

試験体は, せん断スパン比 (a/d) が 2.35 で, コンクリート圧縮強度 24.6MPa, 鉄筋降伏応力 320MPa の 1 点集中荷重の矩形はりである。この試験体にはせん断補強筋が入っており, スターラップ比 0.38% である (図.6)。

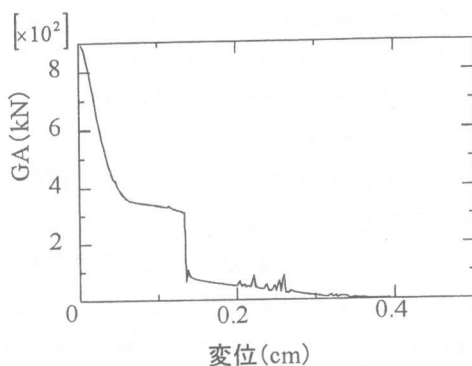


図.5 せん断剛性モデル

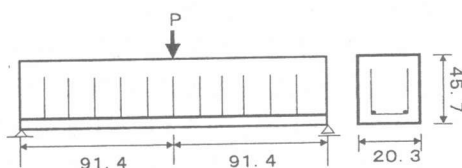


図.6 はり供試体

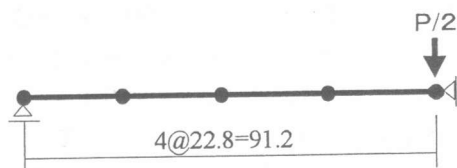


図.7 要素分割

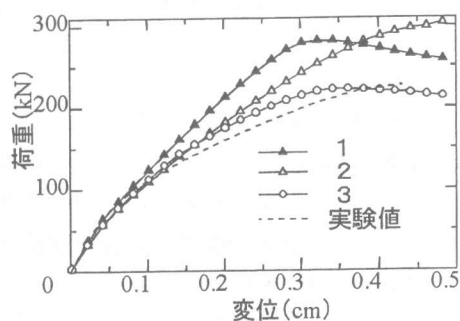


図.8 荷重-はり中央変位関係

4.2 解析結果

要素分割は, 図.7 に示すように要素数 4, 節点数 5, ファイバー分割は軸方向 4, 鉛直方向 10 としている。

図.8 に実験値と解析値の比較を示すが, 1

は一軸の構成則とせん断変形を考慮していない従来の変位関数を用いたもの、2は一軸の構成則とティモシェンコはり理論を用いたもの、3を二軸の構成則とティモシェンコはり理論を用いたものをそれぞれ示す。

1は軸方向鉄筋が降伏するまで強い剛性を保ち実験値とは合っていない。

2は1に比べせん断変形が加わる分変形が進むが耐荷力が高くなっている。これは一軸の構成則を用いているために斜め引張ひずみによるピーク圧縮応力が低下しないことと、せん断変形の割合が高くなることで曲げ変形の場合より曲率が小さくなるためである。

3は斜め引張ひずみの影響を受け、部材中央付近のピーク圧縮応力が低下している(図10の④)ことから剛性が徐々に落ち実験値と良く合っている。また、図9の部材中央付近でのミクロの挙動は図11でわかるように単調な荷重であるが個々のマイクロプレーンで荷重、除荷が起こっている。また、 θ が99度から135度間でせん断変形による斜め引張ひずみにより粒子間に亀裂が生じていることがわかる。

軸鉄筋降伏前に荷重点付近の圧縮部コンクリートが圧壊していることから試験体の破壊挙動と一致しておりせん断破壊したといえる。

5. 結論

- 1) 我々の研究室で開発した骨材-モルタル粒子間、骨材粒子間のマイクロプレーンを独立したものと考えるマイクロプレーンモデルを二軸応力場に適用できる構成則に拡張することができた。
- 2) ティモシェンコはり理論に基づくファイバーモデルを用いて行った有限要素解析の結果が実験値と比較的良好一致を示した。これより構造物の実験を対象とした解析においてマイクロプレーンモデルをコンクリート構成則とする有効性が示された。

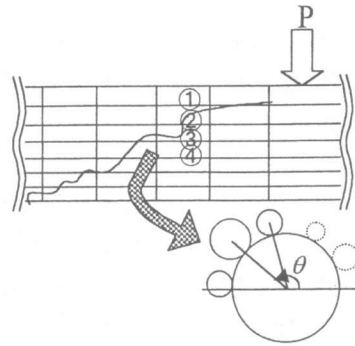


図.9 内部挙動

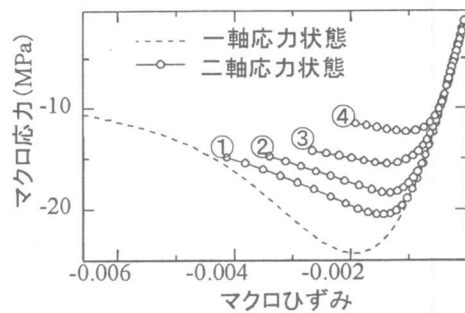


図.10 部材内の位置ごとの
応力-ひずみ関係

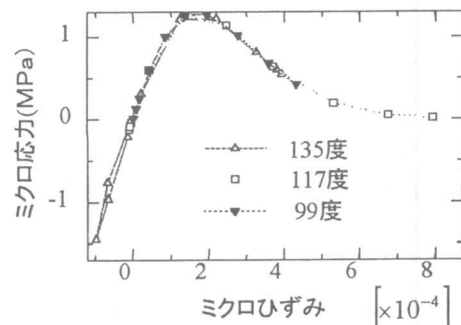


図.11 ③の θ 方向でのミクロ挙動

参考文献

- 1) 長谷川俊昭：マイクロプレーンコンクリートモデルの開発，東京大学博士論文，1994。
- 2) W. F. Chen, 色部誠，河角誠，安達洋監訳：コンクリート構造物の塑性解析，1985
- 3) 中村光：コンクリート構造のポストピーク挙動に関する研究，名古屋大学博士論文，1992。
- 4) Clark, A. P : Diagonal Tension in Reinforced Concrete Beams, ACI J., pp. 145~156, 1951