

論文 繰り返し荷重を受ける鉄筋コンクリート Timoshenko はりの大変形解析

園部 了*1・田邊 忠顕*2

要旨: せん断変形を Timoshenko はり理論を用いた棒部材に対する有限変形理論に基づいた有限要素法で、大変形問題を解析できるように定式化した¹⁾。またせん断を考慮したファイバーモデル¹⁾を導入した。それらを用いて、せん断の影響のある3供試体について解析を行い実験値と比較した。その結果せん断の影響に関して十分評価できることを確認した。

キーワード: せん断、大変形、Timoshenko はり理論、ファイバーモデル

1. はじめに

構造物が終局状態に近くなると変位、変形が大きくなり有限変形、あるいは大変形理論によって解析したほうが妥当である場合が多くなる。阪神大震災においては多くのコンクリート構造物がせん断破壊したが、せん断破壊はある種の構造不安定破壊とも呼ばれており、真の終局状態（大変形状態）まで解析を行ってそのメカニズムを考慮する必要がある。繰り返し荷重を考慮に入れて、せん断変形を考慮にした棒部材に対する有限変形理論に基づいた有限要素法で、大変形問題を解析した。

2. Timoshenko はり理論の定式化

2.1 仮想仕事方程式

図-1 に示すような座標系をとり、軸力、せん断力、曲げモーメントが作用しているはり部材を考える。せん断変形を考慮するためには要素の x, y, z 方向の各々の変位増分 $U(x, y, z), V(x, y, z), Z(x, y, z)$ を曲げ変形成分並びにせん断変形成分を用い以下のように表す。従来のはりの曲げ理論では、変形前に中立軸に対して垂直な断面は、変形後も中立軸に垂直のままであったが、Timoshenko はりの理論では、変形後は中立軸に対して垂直とはならない。しかし、平面を保つと仮定している。

部材の各位置の変形を変形前の座標で次の

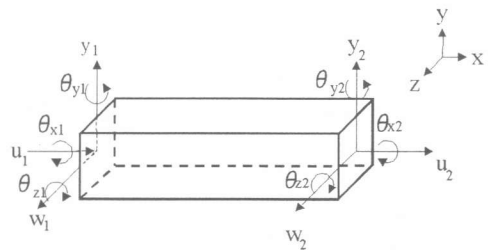


図-1 部材の変形

ように表す。

$$U(x, y, z) = u + y \frac{\partial v_b}{\partial x} - z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (1)$$

$$V(x, y, z) = v_b + v_s \quad (2)$$

$$W(x, y, z) = w_b + w_s \quad (3)$$

ここで、 u : 軸力による軸方向変位増分

v_b, w_b : 曲げによるたわみ変位増分

v_s, w_s : せん断によるたわみ変位増分

式(1)、(2)、(3)に示した変位場を用いると、軸ひずみ、せん断ひずみ成分はそれぞれ次式で与えられる。

$$\epsilon_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_b}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (4)$$

*1 名古屋大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (正会員)

*2 名古屋大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 工博 (正会員)

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (5)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (6)$$

式(4)、(5)、(6)で微小な項は省略した。

ある釣り合い荷重状態においてはり要素に生じている応力、ひずみ、表面力、変位をそれぞれ

$$\begin{aligned} &(\sigma_x^{(0)}, \tau_{xy}^{(0)}, \tau_{xz}^{(0)}, (\varepsilon_x^{(0)}, \gamma_{xy}^{(0)}, \gamma_{xz}^{(0)}), \\ &(f_x^{(0)}, f_y^{(0)}, f_z^{(0)}), (u_x^{(0)}, u_y^{(0)}, u_z^{(0)}) \end{aligned} \quad (7)$$

で表わし、そこからの微小な変位増分を

$$\begin{aligned} &(\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}), (\varepsilon_x, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}), \\ &(f_x, f_y, f_z), (u_x, u_y, u_z) \end{aligned} \quad (8)$$

とする。増分系の仮想仕事方程式に代入すれば、せん断変形を考慮したはり要素に対し、次式の仮想仕事方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} &\iiint \left[\sigma_x \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} \right) + \tau_{xy} \delta \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right. \\ &\left. + \tau_{xz} \delta \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \delta \left(\sqrt{y^2 + z^2} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right] dV \\ &+ \iiint \frac{1}{2} \left[\sigma_x \delta \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial x} \right) \right. \\ &\left. + \sigma_x \delta \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial w_x^{(0)}}{\partial x} \right) \right] dV \\ &+ \iiint \frac{1}{2} \left[\sigma_x^{(0)} \delta \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \sigma_x^{(0)} \delta \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial x} \right)^2 \right] dV \\ &+ \iint (f_x \delta u_x + f_y \delta u_y + f_z \delta u_z) dS = \delta W, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \delta W_x = &\iint (f_x^{(0)} \delta u_x + f_y^{(0)} \delta u_y + f_z^{(0)} \delta u_z) dS \\ &- \iiint \left[\sigma_x^{(0)} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} \right) \right. \\ &\left. + \tau_{xy}^{(0)} \delta \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \tau_{xz}^{(0)} \delta \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \right) + \tau_{yz}^{(0)} \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right] dV \\ &+ \iiint \frac{1}{2} \left[\sigma_x^{(0)} \delta \left(\frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \right. \\ &\left. + \sigma_x^{(0)} \delta \left(\frac{\partial w_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial w_x^{(0)}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) \right] dV \end{aligned} \quad (10)$$

式(9)の第一項が微小変形理論におけるひずみエネルギーの変分で応力がなす仮想仕事を表し、第二項は変形の進行に伴って生じる付加応力成分のなす仮想仕事項、第三項は初期応力 $\sigma_x^{(0)}$ のなす仮想仕事項である。また式(10)は前

段階における釣り合い方程式が完全に満たされないために生じる不平衡力がなす仮想仕事である。式(9)、(10)を基礎として有限要素解析に用いる剛性方程式を導くことができる。

2.2 剛性方程式

せん断変形による、梁のたわみ v_s, w_s は釣り合いを考えることで次のようになる。

$$\frac{dv_s}{dx} = \frac{1}{GA_y} \frac{dM_z}{dx} = -\frac{EI_y}{GA_y} \frac{d^3 v_b}{dx^3} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw_s}{dx} &= -\frac{1}{GA_z} \frac{dM_y}{dx} \\ &= -\frac{EI_z}{GA_z} \frac{d^3 w_b}{dx^3} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで v_b, w_b は曲げによるたわみ変位増分、 GA_y, GA_z は有効断面のせん断剛性であり、RC部材のクラック状態などに依存する。

式(11)、(12)は曲げ変形とせん断変形との関係式であり、部材の変位増分を次多項式と仮定すると、各変位増分の変位関数は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} u &= [N_u] \{du\} \\ v_b &= [N_{vb}] \{dv\} \quad w_b = [N_{wb}] \{dw\} \\ v_s &= [N_{vs}] \{dv\} \quad w_s = [N_{ws}] \{dw\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$N_u = \left[1 - \frac{x}{L}, \frac{x}{L} \right] \quad (14)$$

$$\begin{aligned} N_{vb} &= \frac{1}{1+I_y} \left[1 + \frac{6k_y}{L^2} - \frac{3}{L^2} x^2 + \frac{2}{L^3} x^3, \right. \\ &\quad - \frac{12k_y^2}{L^3} - \frac{4k_y}{L} + \left(\frac{12k_y}{L^2} + 1 \right) x \\ &\quad + \left(-\frac{6k_y}{L^3} - \frac{2}{L} \right) x^2 + \frac{1}{L^2} x^3, \\ &\quad - \frac{6k_y}{L^2} + \frac{3}{L^2} x^2 - \frac{2}{L^3} x^3, \\ &\quad \left. \frac{12k_y^2}{L^3} - \frac{2k_y}{L} + \left(\frac{6k_y}{L^3} - \frac{1}{L} \right) x^2 + \frac{1}{L^2} x^3 \right] \end{aligned} \quad (15)$$

$$N_{ws} = \frac{1}{1+T_z} \left[1 + \frac{6k_z}{L^2} - \frac{3}{L^2}x^2 + \frac{2}{L^2}x^3, \right. \\ \left. - \frac{12k_z^2}{L^2} - \frac{4k_z}{L} + \left(\frac{12k_z}{L^2} + 1 \right) x \right. \\ \left. + \left(-\frac{6k_z}{L^3} - \frac{2}{L} \right) x^2 + \frac{1}{L^2}x^3, \right. \\ \left. - \frac{6k_z}{L^2} + \frac{3}{L^2}x^2 - \frac{2}{L^2}x^3, \right. \\ \left. \frac{12k_z^2}{L^3} - \frac{2k_z}{L} + \right. \\ \left. \left(\frac{6k_z}{L^2} - \frac{1}{L} \right) x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \right] \quad (16)$$

$$N_{vs} = \frac{1}{1+T_y} \left[\frac{6k_y}{L^2} - \frac{12k_y}{L^3}x, \right. \\ \left. - \frac{12k_y^2}{L^3} - \frac{4k_y}{L} + \frac{6k_y}{L^2}x, \right. \\ \left. - \frac{6k_y}{L^2} + \frac{12k_y}{L^3}x, \right. \\ \left. - \frac{12k_y^2}{L^3} + \frac{2k_y}{L} - \frac{6k_y}{L^2}x \right] \quad (17)$$

$$N_{ws} = \frac{1}{1+T_z} \left[\frac{6k_z}{L^2} - \frac{12k_z}{L^3}x, \right. \\ \left. - \frac{12k_z^2}{L^3} - \frac{4k_z}{L} + \frac{6k_z}{L^2}x, \right. \\ \left. - \frac{6k_z}{L^2} + \frac{12k_z}{L^3}x, \right. \\ \left. - \frac{12k_z^2}{L^3} + \frac{2k_z}{L} - \frac{6k_z}{L^2}x \right] \quad (18)$$

$$\text{ここで、 } T_y = \frac{12}{L^2}k_y \quad T_z = \frac{12}{L^2}k_z$$

$k_y (= EI_y/GA_y)$ 、 $k_z (= EI_z/GA_z)$ は曲げ剛性とせん断剛性の比を表わす係数で、せん断剛性が無限大ならば変位関数は曲げと一致する。また、 $\{du\}$ 、 $\{dv\}$ 、 $\{dw\}$ はそれぞれ部材の軸方向および鉛直方向の節点変位増分ベクトルで、次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \{du\}^T &= [u_1, u_2] \\ \{dv\}^T &= [v_1, \theta_{y1}, v_2, \theta_{y2}] \\ \{dw\}^T &= [w_1, \theta_{w1}, w_2, \theta_{w2}] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

上式中、 $v_i, w_i, \theta_{yi}, \theta_{zi}$ ($i=1,2$) はそれぞれ i 節点におけるたわみ増分、曲げによるたわみ角増分である。節点のせん断回転角は、式(11)、(12)より曲げによる回転角に依存しており、節

点の回転角増分を曲げによる回転角増分で表わすことで、はり要素は式(19)の 6 自由度を考えるだけでよくなる。

式(13)を仮想仕事の式に代入することにより次式のはり要素の増分形剛性方程式を得る。

$$\begin{aligned} &([K] + [K_0] + [K_g])^{(n)} \{\Delta d\}^{(n+1)} \\ &= \{\Delta F\}^{(n+1)} + \{F_r\}^{(n)} \end{aligned} \quad (20)$$

ここに、上付きの $(n+1)$ または (n) はそれぞれ、第 $(n+1)$ あるいは第 (n) 段階における諸量を表わす。また $[K]$ 、 $[K_0]$ 、 $[K_g]$ はそれぞれ、構造物の剛性マトリックス、初期ひずみマトリックス、幾何剛性マトリックスであり、式(9)の第一項、第二項、第三項に対応するものである。 $\{F_r\}$ は n 段階における釣り合い方程式が完全に満足されないために生じる不平衡力である。式(20)が

第 (n) 段階の応力・変位の分布が既知であるとき、第 $(n+1)$ 段階の変形を決定する方程式である。

2.3 ファイバーモデル

はり要素のモデル化には、部材断面をいくつかのファイバーと呼ばれる微小要素に分割し、それぞれの要素ごとに応力・ひずみ関係を考えるファイバーモデルを用いた。本研究におけるファイバーモデルはせん断を考慮している。

解析手順を簡略に示すと、まず前ステップにおいてえられた節点増分変位より、各ファイバーでの増分ひずみを求める。そして、この増分ひずみを用いて、コンクリート、鉄筋それぞれの構成則に従い、各ファイバーでの接線剛性を求める。次に、各ファイバーでの接線剛性を積分することにより断面の剛性を求め、さらに、この断面の剛性を要素軸方向に積分することで最終的にはり要素の剛性マトリックスが求められる。

3. 解析方法

3.1 コンクリートの構成則

本研究では、ファイバー分割は、軸方向 (x

軸)、断面高さ方向(y 軸)、断面奥行き方向(z 軸)にそれぞれ分割して解析を行った。

せん断変形を考慮しているのであるから、コンクリートの構成則も 2 次元応力空間のものがより妥当であるが、せん断剛性については曲げ剛性との比で与え、曲げ剛性のみを以下に示す 1 次元の構成則で求めることにした。

解析に用いる応力-ひずみ関係は図-2 に示すように、圧縮領域にあつては、ひずみが ϵ_{c0} (圧縮強度 f_c の時のひずみ)までは 2 次曲線で応力は上昇し、それ以降 ϵ_1 まで直線的に応力が減少するごく一般的なモデルを採用した。

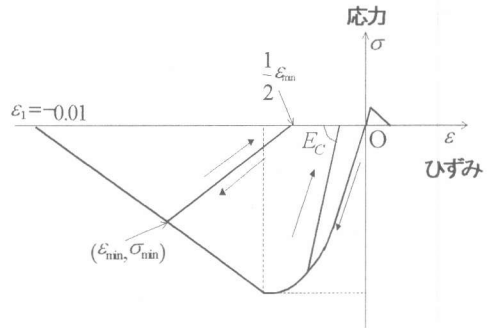


図-2 コンクリートの構成則

$$\sigma = f_c \left\{ \frac{2\epsilon}{\epsilon_0} - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2 \right\} \quad (\epsilon_{c0} \leq \epsilon \leq 0) \quad (21)$$

$$\sigma = E_{c1}(\epsilon - \epsilon_1) \quad (\epsilon_1 \leq \epsilon \leq \epsilon_0) \quad (22)$$

$$\left(E_{c1} = \frac{\sigma_{\min}}{\epsilon_{\min}/2} \right)$$

繰返し曲線は、 ϵ_{\min} が ϵ_0 以上の場合は傾き $E_c \left(E_c = \frac{-2f_c}{\epsilon_0} \right)$ の直線にそつて応力が減少するとし、 ϵ_{\min} が ϵ_0 以下の場合はスケルトンカーブ上の点 $(\epsilon_{\min}, \sigma_{\min})$ と横軸の ϵ 軸上の点 $(0, \epsilon_{\min}/2)$ とを結ぶ傾き $2\sigma_{\min}/\epsilon_{\min}$ の直線にそつて応力は変化するとした。

3.2 鉄筋の繰返し応力状態の構成則

鉄筋の構成則には、一般に適合性がよいとされている Menegotto and Pinto モデルを用いた(図-3)。

単純荷荷の場合鉄筋の応力-ひずみ関係はひずみが降伏ひずみ ϵ_y にいたるまでの弾性域においては $\sigma = E_0 \epsilon$ の関係を用い、降伏後は E_1 の傾きで応力が増加するものとした。

繰返し荷荷の場合、アンローディング、リローディングカーブは次式を用いた。

$$\sigma^* = b\epsilon^* + \frac{(1-b)\epsilon^*}{(1+\epsilon^{*R})^{\frac{1}{R}}} \quad (23)$$

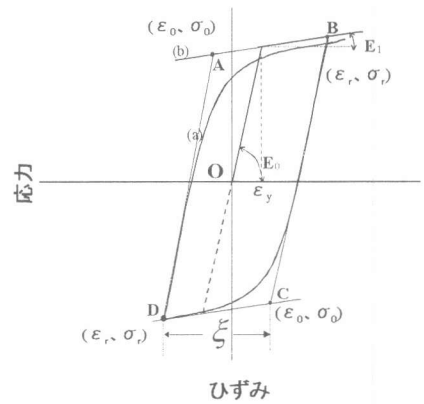


図-3 鉄筋の構成則

ここで、

$$\epsilon^* = \frac{\epsilon - \epsilon_r}{\epsilon_0 - \epsilon_r} \quad (24)$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_r}{\sigma_0 - \sigma_r} \quad (25)$$

式(23)の R は次式により求まる。

$$R = R_0 \frac{a_1 \xi}{a_2 + \xi} \quad (26)$$

ここで R_0 は初期状態の R の値であり、 a_1 、 a_2 は R_0 とともに実験的に定められたパラメータである。本研究においては $R_0 = 20$ 、 $a_1 = 18.25$ 、 $a_2 = 0.17$ を用いた。

b の値は strain-hardening 比である。この値は式 (23) で表される応力-ひずみ関係の曲線の形に影響を及ぼし Bauschinger 効果をよりよく表現するためのパラメータである。

4. 繰り返し荷重下における Timoshenko はりの解析

4.1 実験概要

せん断破壊をする RC はりに対する本研究の妥当性を調べるために、Priestley らにより行なわれた実験³⁾を対象に解析を行った。解析で用いるモデルは、繰り返し荷重を受ける片持ちはりである。(図-4)

供試体は R-1,R-2,R-3 の 3 本を用い、それぞれの寸法、強度は(表-1)に示すとおりである。

解析方法としては、変位制御で完全付着として行った。せん断補強筋による影響は考慮しなかった。代わりに $k = EI/GA$ (k :せん断剛性比)を除荷、再載荷ごとに、線形的に変化させることでせん断による影響を考慮した。 k の値は、 $k = 100 \sim 100000$ の間で設定し、終局状態に近づくほど、 k の値を大きくしていき、せん断の影響をより強くしていった。表-2には、R-2に関する繰り返しサイクルにおけるせん断剛性比の変化を示す。また、図-5には、せん断剛性比の変化を決定するための概念図を示す。

要素分割は、供試体を要素数 5 接点数 6 に分割し、またファイバー分割数は、要素軸方向に 5、断面高さ方向に 8、断面奥行き方向に 5 に分割した。

4.2 解析結果

図-6、図-7、図-8に荷重とはりの荷重載荷点での変位との関係を実験値との比較で表わ

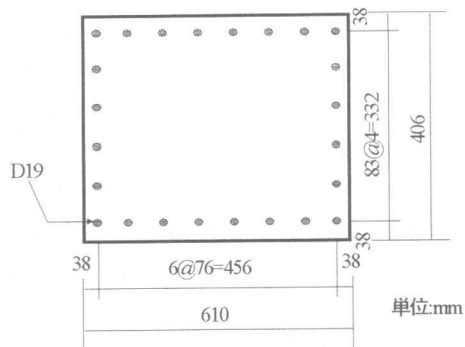


図-4 供試体(断面積)

表-2 せん断剛性比の値の変化

R-2	k_i	k_f
1	100	1000
2	100	1000
3	100	2000
4	2000	60000
5	1000	100000
6	1000	100000

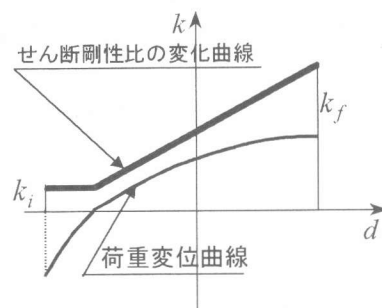


図-5 せん断剛性比の変化概念

表-1 供試体の諸量

	コンクリート		鉄筋	軸力	L
	圧縮強度 f_c' $\times 10^4$ (MPa)	降伏ひずみ ϵ_{c0}	降伏応力 f_y $\times 10^4$ (MPa)	(MPa) $\times 10^4$	(m)
R-1	38	0.002	317	20	2.44
R-2	34		469		2.44
R-3	33		469		1.83

す。R-1(図-6)では、実験結果からわかるように、せん断の影響が少なく、変位が±30mmを超えたところでせん断による耐荷力の減少が始まっているが、解析値では明らかな耐荷力の減少は見られなかった。しかし劣化後のピーク荷重はほぼ一致している。

R-2(図-7)では、実験値を見ると、せん断による劣化が±20mmのあたりで見られる。解析値も同じくせん断による劣化が見られ、実験値とピーク荷重がかなり一致している。R-3(図-8)では、実験値を見ると、せん断による劣化がはっきりとわかる。解析は途中で止まっているが、せん断による影響をしっかりと反映していることがわかる。

5. 結論

本研究により以下の結論が得られた。

1. 繰り返し荷重下でのせん断変形を考慮し、Timoshenko はり理論を用いた有限要素解析を行ったところ、実験値と解析値はほぼ一致した。
2. Timoshenko はり理論を用いた解析は、せん断剛性比 k を考慮することにより、簡易にせん断変形の影響を捉えることができる。

参考文献

- 1) 中村光 : コンクリート構造のポストピーク挙動に関する研究、名古屋大学博士論文、1992.
- 2) 梅原秀哲、田邊忠頭、吉田弥智 : 鋼材の付着状態を考慮した PC ラーメンの履歴挙動に関する研究、土木学会論文集、第396号/V-9、pp89-98、1988]
- 3) Yan xiao, M.J.Nigel Priestley, Frieder Seible: Steel Jacket Retrofit for Enhancing Shear Strength of Short Rectangular Reinforced Concrete Columns, Report No.SSRP-92/07, July 1993

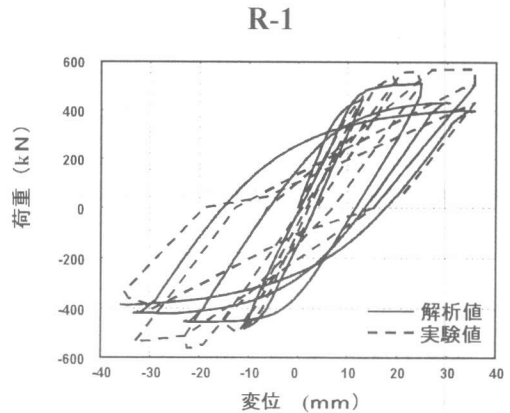


図-6 荷重-変位関係 (R-1)

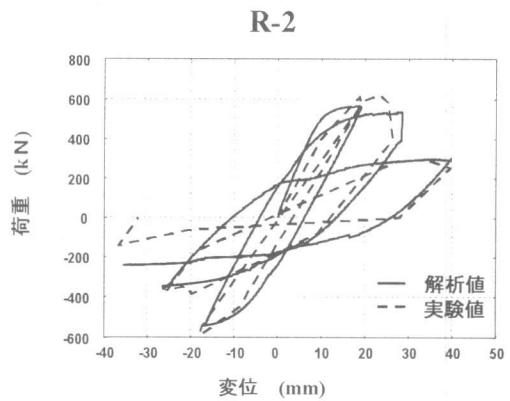


図-7 荷重-変位関係 (R-2)

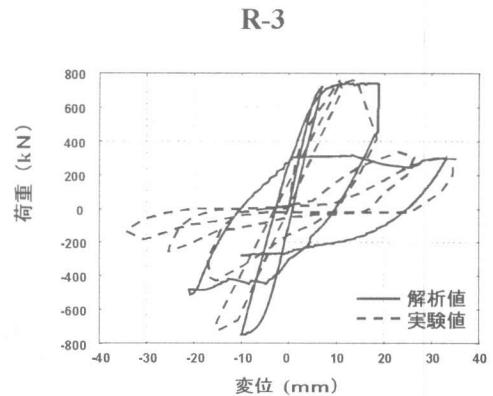


図-8 荷重-変位関係 (R-3)