

論文 平面格子の等価連続体化法による RC はりの弧長法を用いた非線形挙動解析

横山文彦^{*1}・余国雄^{*2}・田邊忠顕^{*3}

要旨：本研究では、従来のコンクリート供試体の解析に弧長法を導入することにより、せん断破壊を生じる供試体のポストピーク以降のスナップバックを伴う挙動を数値解析的に捉えることを試みた。解析モデルには従来から提案されているひび割れたコンクリート体を格子成分として考え、単純な一軸応力-ひずみ関係を用いる格子モデルを、そして、この格子モデルを等価な連続体構成式へと導くことにより得られた RC 要素構成則を用いたモデルを使用した。さらに解析結果を実験データと比較することで弧長法を導入する有効性が確認できた。

キーワード：格子モデル，弧長法，RCはり

1. はじめに

一般に、計算アルゴリズムとして変位制御を用いれば、荷重-変位曲線におけるプレピーク、ポストピーク点を乗り越えることができるとともに、スナップスルー挙動をも解析することができる。しかし、プレーンコンクリートやせん断破壊時に見られるスナップバック挙動を解析することは不可能である。

そこで本研究では、スナップバック挙動をするコンクリートはりの解析的表現を目的として、計算のアルゴリズムに弧長法を用いた。弧長法を解析アルゴリズムに取り込むことは、次に示す特徴を持つ。

- ・ 常時行われる荷重増分、変位増分の二つの方法を総合し、荷重-変位曲線の弧の長さを増分パラメータとして用いることにより、荷重及び変位の極限点、変極点型の特異点を自動的に乗り越えることができる。

さらに本解析では、収斂計算手法に修正 Newton-Raphson 法(mNR 法)を用いることにより、次の利点を持つ。

- ・ 修正 Newton-Raphson 収斂過程により、

通常行われる Newton-Raphson 法よりも収斂の可能性の高い増分過程に対する法線方向へ進むことができる。また、荷重及び変位の極限点、変極点近傍でも収斂操作が可能となる。

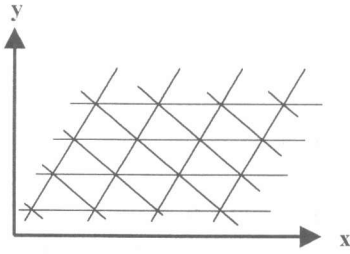
本解析では、以上に示す二つの手法を用いることにより、スナップバック挙動を示すコンクリート供試体の解析を可能とした。

次に、ひび割れが生じた RC 構造の解析はコンクリート体の方向性を精度よく表す必要があり、コンクリートの応力-ひずみ関係を正確に記述することは、最も基本的な要件である。従来、コンクリートの構成則に関する研究は膨大な数の研究成果が公表されている。その中から本研究では、ひび割れを有するコンクリート体を図-2のような格子状のモデルとして取り扱う単純な一軸応力-ひずみ関係として扱い、鉄筋と共同して格子を形成するモデルを用いる。さらに、この格子モデルを等価な連続体構成式へと導くことで得られた RC 要素構成則を用いた。なお、コンクリートのひび割れの角度は固定せずパラメータとして扱い、ひび割れ発生前は連続体とした。

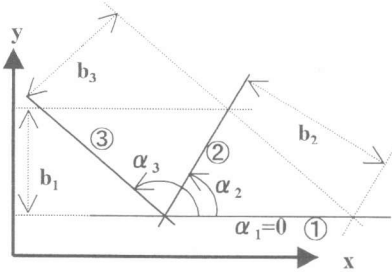
*1 名古屋大学大学院工学研究科土木工学専攻 (正会員)

*2 名古屋大学大学院工学研究科土木工学専攻助手 工博 (正会員)

*3 名古屋大学大学院工学研究科土木工学専攻教授 工博 (正会員)



図—1 平面格子



図—2 格子平面の一部

ただし、 α_n は最大引張・圧縮両主応力による。また、 b_n は一要素の大きさによる。

2. 平面格子の連続体化への理論

2.1 剛性マトリックスの作成

図—1のように平行なバーの列を持つ格子平面を考える。格子が存在している連続体のひずみを $\varepsilon = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{xy}]^T$ ，格子の応力を

$f = [f_x \quad f_y \quad f_{xy}]^T$ とする。ここで、 f の単位は N/m である。この格子平面の一部を取り出し、図—2に示す。i番目の列の方向角を α_i ，その剛性を $E_i A_i$ ，平行な列の間の距離を b_i とする。各部材の部材方向のひずみを $\hat{\varepsilon}$ とすると連続体のひずみ ε より、ひずみの回転マトリックスを用いて、

$$\hat{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_1 & \sin^2 \alpha_1 & \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos^2 \alpha_i & \sin^2 \alpha_i & \cos \alpha_i \sin \alpha_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos^2 \alpha_n & \sin^2 \alpha_n & \cos \alpha_n \sin \alpha_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

と表すことができる。

次に応力は、格子部材をすべて一軸応力状

態とするので、その部材方向の応力 \hat{f} は

$$\hat{f} = R_n \hat{\varepsilon} \quad (2)$$

となり、ここで、

$$R_n = \begin{bmatrix} r_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & r_i & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & r_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$r_i = \frac{E_i A_i}{b_i}$$

である。応力の回転マトリックスを適用することによって、格子の応力 f は、

$$f = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_1 & \cdots & \cos^2 \alpha_i & \cdots & \cos^2 \alpha_n \\ \sin^2 \alpha_1 & \cdots & \sin^2 \alpha_i & \cdots & \sin^2 \alpha_n \\ \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 & \cdots & \cos \alpha_i \sin \alpha_i & \cdots & \cos \alpha_n \sin \alpha_n \end{bmatrix} \hat{f} = L_\varepsilon^T \hat{f} \quad (4)$$

となる。したがって、

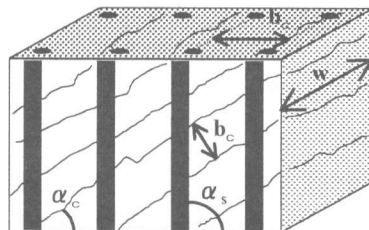
$$f = L_\varepsilon^T R_n L_\varepsilon \varepsilon = D \varepsilon \quad (5)$$

となり、剛性マトリックス D が次式で求められる。

$$D = \begin{bmatrix} \sum_1^n r_i \cos^4 \alpha_i & \sum_1^n r_i \cos^2 \alpha_i \sin^2 \alpha_i & \sum_1^n r_i \cos^3 \alpha_i \sin \alpha_i \\ & \sum_1^n r_i \sin^4 \alpha_i & \sum_1^n r_i \cos \alpha_i \sin^3 \alpha_i \\ \text{symm.} & & \sum_1^n r_i \cos^2 \alpha_i \sin^2 \alpha_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

2.2 RC 2次元要素への適用

式(6)より得られた剛性マトリックスを RC 2



図—3 ひび割れが発生したRC要素

次要素に適用する場合、コンクリートと鉄筋をそれぞれトラス部材に置き換えることになる。図-3のような要素について考える。コンクリートについては断面積はひび割れの間隔と厚さの積であると考えられるので、コンクリート、鉄筋をモデル化したものをそれぞれ r_c 、 r_s とすると、

$$r_c = \frac{E_c A_c}{b_c} = \frac{E_c b_c w}{b_c} = E_c w \quad (7)$$

$$r_s = \frac{E_s A_s}{b_s}$$

となる。ひび割れや鉄筋が複数ある場合も同様にする。

3. 弧長法の理論

3.1 球弧長法 (the spherical arc-length method) ならびに円筒弧長法 (the cylindrical arc-length method)

弧長法では、荷重—変位関係の弧増分を制御して解析を進める。Spherical arc-length method では、弧増分は次のようになる。

$$\Delta P^T \Delta P + \Delta \lambda^2 \varphi^2 q_{ef}^T q_{ef} = \Delta l^2 \quad (8)$$

ΔP : 変位増分ベクトル

$\Delta \lambda$: 荷重レベルパラメータ増分

φ : スケーリングパラメータ

Δl : 弧増分

式(8)でスケーリングパラメータ $\varphi = 0$ としたものが Cylindrical arc-length method である。本解析では、後者の Cylindrical arc-length method を用いた。よって式(8)は次のようになる。

$$\Delta P^T \Delta P = \Delta l^2 \quad (9)$$

$$a = \Delta P^T \Delta P - \Delta l^2 = 0 \quad (9a)$$

ここで、弧増分 Δl は、解析時に自ら定めても良いが、適切な Δl をある外力ベクトルに対して定めるためにも、本解析では次のようにした。

$$\Delta P_1^T \Delta P_1 = \Delta l^2 \quad (10)$$

小文字の下指標は、ステップ数を示す。

収斂過程において、釣り合い状態に達したと

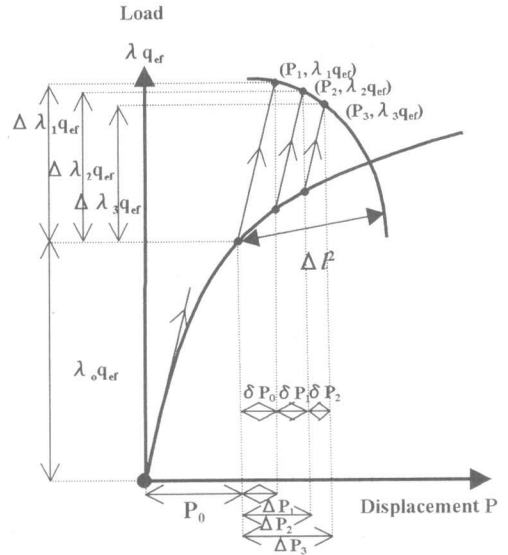


図-4 弧長法の概念図

き、内力と外力は等しくなり不平衡力は0となる。つまり、

$$g(P, \lambda) = q_i(P) - \lambda q_{ef} = 0 \quad (11)$$

$g(P, \lambda)$: 収斂内のある変位ベクトル、荷重レベルパラメータの関数の不平衡力ベクトル

$q_i(P)$: ある変位P時の内力ベクトル

q_{ef} : 外力ベクトル

λ : 荷重レベルパラメータ

また、本解析では、載荷荷重パターンを proportional loading とし、幾何学的境界条件が free に対応する外力ベクトル q_{ef} は一定とする。図-4に示すように、収斂過程において変位 P は更新される。

$$\Delta P_2 = \Delta P_1 + \delta P_1$$

$$\Delta P_3 = \Delta P_2 + \delta P_2$$

⋮

$$\Delta P_n = \Delta P_{n-1} + \delta P_{n-1}$$

(12)

式(12)の小文字下指標は n ; new, o : old とする。

一般に変位荷重制御手法を用いた場合、 δP は次のように求められる。

$$\delta P = -K_i^{-1}g \quad (13)$$

g は不平衡力である。弧長法では式(13)に式(11)を代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} \delta P &= -K_i^{-1}g(P_o, \lambda) \\ &= -K_i^{-1}(q_i(P_o) - \lambda_n q_{ef}) \\ &= -K_i^{-1}(g(P_o, \lambda_o) - \delta \lambda q_{ef}) \\ &= -K_i^{-1}g_o + \delta \lambda K_i^{-1}q_{ef} \\ &= \delta \bar{P} + \delta \lambda \delta P_i \end{aligned} \quad (14)$$

式(13)に式(11)を代入して次を得る。

つまり、 $\delta P = \delta \bar{P} + \delta \lambda \delta P_i$ となる。ここで、

$\delta P_i = K_i^{-1}q_{ef}$ であり本解析では、収斂計算に修正 Newton-Raphson 法を用いるため、 δq_{ef} は全ステップ及び収斂内で一定とする。式(14)を式(12)に代入すると次のように表すことができる。

$$\Delta P_n = \Delta P_o + \delta \bar{P} + \delta \lambda \delta P_i \quad (15)$$

さらに式(9)を書き直すと、

$$\Delta P_o^T \Delta P = \Delta P_n^T \Delta P_n = \Delta l^2 \quad (16)$$

式(16)に式(15)を代入すると

$$a_1 \delta \lambda^2 + a_2 \delta \lambda + a_3 = 0 \quad (17)$$

ここで、 a_1, a_2, a_3 はそれぞれ

$$a_1 = \delta P_i^T \delta P_i \quad (18.a)$$

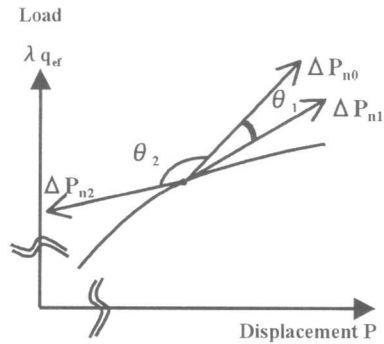
$$a_2 = 2\delta P_i^T (\Delta P_o + \delta \bar{P}) \quad (18.b)$$

$$a_3 = (\Delta P_o + \delta \bar{P})^T (\Delta P_o + \delta \bar{P}) - \Delta l^2 \quad (18.c)$$

式(17)の $\delta \lambda$ に関する二次方程式を解くことにより、 $\delta \lambda$ を求めることができる。

3.2 The cylindrical Arc-length method におけるパスの選択

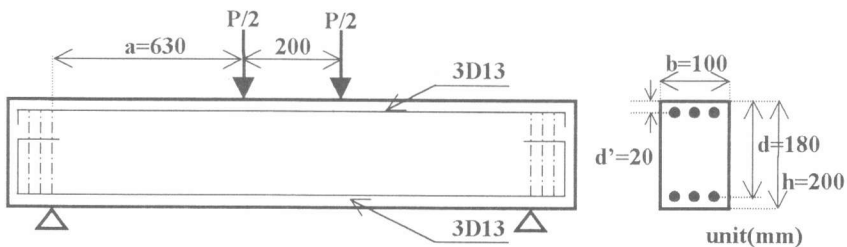
式(17)は、 $\delta \lambda$ の二次方程式である。つまり、通常、 $\delta \lambda$ は二つ存在することになる。このため、式(15)に示す ΔP_n は二つ存在する。



図—5 パスの選択

$$\Delta P_{n1} = \Delta P_o + \delta \bar{P} + \delta \lambda_1 \delta P_i \quad (19.a)$$

$$\Delta P_{n2} = \Delta P_o + \delta \bar{P} + \delta \lambda_2 \delta P_i \quad (19.b)$$



Concrete

Fc'	Young's Modulus	Poisson's Ratio
24 MPa	$2 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$	0.19

Steel

Size	Yield Point	Tensile Strength	Young's Modulus	Surface
D13	373 MPa	550 MPa	2.07×10^6	Deformed
$\phi 6$	246 MPa	565 MPa	2.22×10^6	Smooth

図—6 供試体の寸法、配筋、載荷点

基本的な ΔP_{n1} の選択方法は次のようにした。図—5に示すように、 ΔP_{n1} と ΔP_{n2} が存在した時、 ΔP_{n0} となす角が小さい方を選択する。つまりこの場合では ΔP_{n1} が選択される。しかし、急激なスナップバック挙動をする場合、前述の通り ΔP_{n1} を選択すると結果として発散することとなる。よって、この場合、 ΔP_{n2} を選択する。

4. 解析方法

実験値として用いた解析対象になるコンクリートは供試体の詳細を図—6に示す。解析は片側 1/2 に対して行った。この実験結果に対して収斂に弧長法を用いた有限要素法により非線形解析した。要素は4節点アイソパラメトリック要素を用いた。この解析に用いた各材料の応力—ひずみ関係を図—7に示す。

収束判定条件は全外力の二乗和の平方根に対して不平衡力の二乗和の平方根が 1%以下になるときとした。

解析では図—7において、各要素のコンクリートの引張、圧縮応力のどちらも A 点を超えていないときは連続体として扱った。このときコンクリートと鉄筋はともに等方弾性体とするので、それぞれの剛性マトリックス D_c 、 D_s は 2 次元応力状態で、

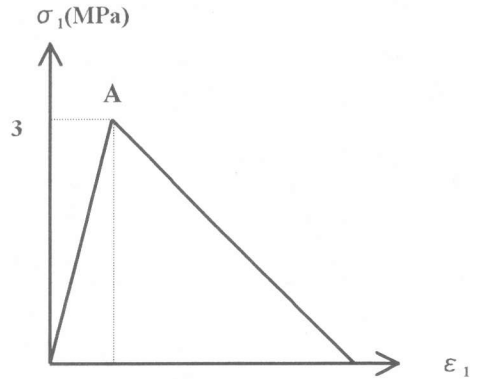
$$D_c = \frac{E_c}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$D_s = \begin{bmatrix} E_s & 0 & 0 \\ 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

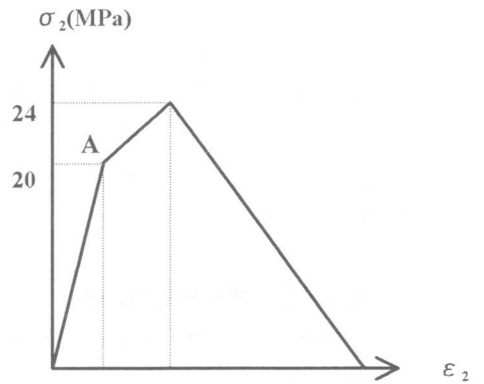
と書ける。ここで ν はポアソン比で $\nu = 0.19$ とした。本研究の構成則の応力の単位は N/m となっているので、コンクリート、鉄筋の厚さを t_c 、 t_s とし、剛性マトリクスに、

$$D = t_c D_c + t_s D_s \quad (22)$$

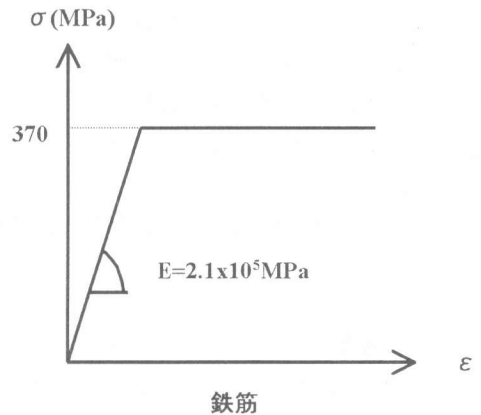
を適用した。ひび割れが入った後は、式(6)の構成則を用いている。



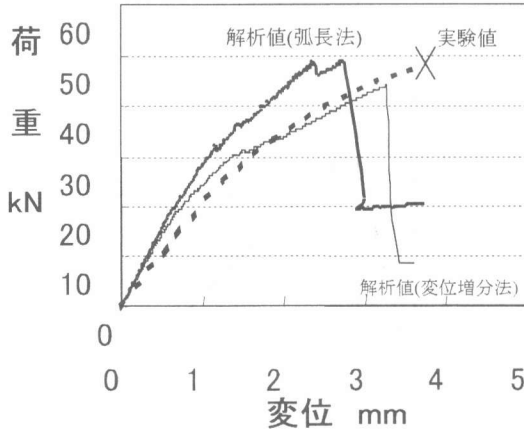
コンクリート(引張)



コンクリート(圧縮)



図—7 材料の応力ひずみ関係



図—8 荷重—変位曲線

次に、コンクリートの引張、圧縮応力のどちらかが A 点を超えたら、その要素を格子モデルとして扱うこととする。格子モデルは、コンクリートの引張、圧縮およびスターラップの 3 部材からなっている。

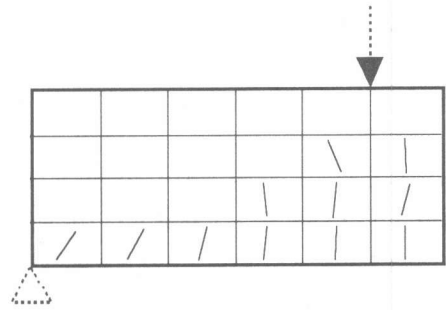
5. 実験結果と解析結果の比較

図—8 に実験結果に対する解析結果を示す。解析結果は弧長法による結果に加え、従来の変位増分法による結果も併せて示した。プレーク時は従来の変位増分法による解析値の方が実験値とよく合っているが、スナップバック挙動をともなうポストピーク以降の挙動は、弧長法による解析値が表現している。荷重低下途中でわずかではあるがスナップバック現象が見られる。

なお、図—9 に破壊時の要素ごとのひび割れ方向を示す。

6. 結論

従来の比較的簡単な理論によって定式化されたモデルに対して弧長法を導入することで、従来のニュートンラプソン法に代表される収斂方法では表現できなかったポストピーク以降のスナップバック挙動をわずかではあるが数値解析的に表現することができた。また、



図—9 破壊時のひび割れ方向

荷重—たわみ曲線全体も実験値、および従来の解析値に対して比較的近い値であった。今後、発生する大きな荷重低下に対して、アンローディングを考慮した構成則を導入するなど、さらに検討を進める必要がある。

参考文献

- 1) M.A.Crisfield : An arc-length method including line searches and accelerations, International journal methods in engineering, vol. 19 pp.1269~1289, 1983
- 2) 細野透: 弧長法による弾性座屈問題の解析, (その2) 数値解析法としての弧長法, 日本建築学会論文報告集, 1976.4.
- 3) 久米敦子, 余国雄, Fawzy Mohamed EL-BEHAIRY, 二羽淳一郎: 平面格子の等価連続体化法による RC 材料の構成則の構築, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.20, No.3 pp.73~78, 1998
- 4) 二羽淳一郎: 「はり選定試験体」選定理由および実験データの概要, 第2回 RC 構造のせん断問題に対する解析的研究に関するコロキウム, 解析モデル検証用試験体の実験データ集, 1983.10