

論文 ハイブリッドストレスモデルによる弾塑性解析法

伊良波繁雄*1・富山潤*2・和仁屋晴謹*3

要旨:近年,近藤らによってハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理から導かれるはり要素が鋼構造骨組,鉄筋コンクリート構造骨組の弾塑性崩壊解析の研究に用いられている。筆者らもハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理から導かれる二次元ハイブリッドストレスモデルを開発し,要素境界ですべり破壊や引張破壊を考慮することのできる離散ひび割れ解析法を提案した。そして,コンクリートの引張軟化を考慮した破壊の問題に同解析方法を適用し良好な結果を得た。本研究は,筆者らが提案した二次元ハイブリッドストレスモデルを近藤らと同様に要素内で塑性を評価し,弾塑性解析に応用する方法を示した。数値解析例からは良好な解析結果が得られた。

キーワード:有限要素法,ハイブリッドストレスモデル,弾塑性解析

1. はじめに

有限要素法でコンクリートの引張軟化を考慮した離散ひび割れ解析法として筆者らは図-1に示すような二次元ハイブリッドストレスモデルを提案した¹⁾。この三角形要素はハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理から導かれる有限要素であるのでハイブリッドストレスモデルまたはハイブリッドストレス要素といわれる。図-1の三角形要素は図-2に示すような要素境界に沿うすべり破壊や引張破壊を取り扱うことができ金属,地盤の極限解析²⁾およびコンクリートの引張軟化を考慮した離散ひび割れ問題¹⁾に適用できる。

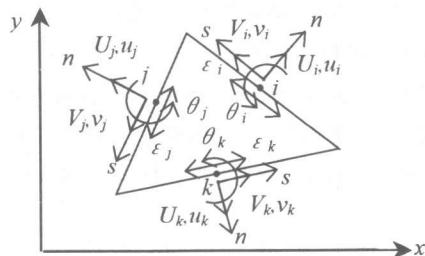


図-1 二次元ハイブリッドストレス要素

る方法によって導かれるはり要素を用いて鋼構造骨組,鉄筋コンクリート構造骨組の弾塑性崩壊解析の研究³⁾に成果を上げつつある。本研究は,筆者らが提案した二次元ハイブリッドストレスモデルを近藤らと同様に要素内で塑性を評価する方法で弾塑性解析に適用する方法を示した。この解析方法は一般的に用いられている要素内で分布した塑性⁴⁾を取扱うのに適している。

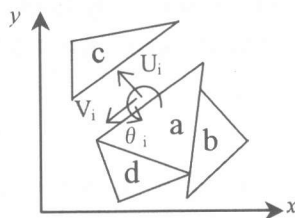


図-2 すべり及び引張破壊

2. 解析方法

2.1 ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理について

ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理⁵⁾は

一方,近藤らはハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理を用いて要素内で塑性を考慮す

*1 琉球大学助教授 工学部環境建設工学科 工博 (正会員)

*2 琉球大学大学院 理工学研究科 工学修士 (正会員)

*3 琉球大学助教授 工学部環境建設工学科 (正会員)

$$\Pi_{CH} = \Sigma \left\{ \iint_{V_n} B(\sigma_{ij}) dx dy - \int_{\partial V_n} u_i T_i ds + \int_{S\sigma_n} u_i \bar{T}_i ds \right\} \quad (1)$$

で与えられる。ここで $B(\sigma_{ij})$: コンプリメンタリエネルギー, u_i : 変位, V_n : 要素の体積, ∂V_n : 要素の境界, $S\sigma_n$: 力学的境界, σ_{ij} : 応力, $T_i = \sigma_{ij} n_j$, n_j : 方向余弦, \bar{T}_i : 外力, Σ : 要素全部の和を意味する。図-1 に示すように全体座標系を x, y 軸とし, 局所座標系 n, s を要素境界ごとに仮定すれば変位, 応力について, それぞれ次式が成立する。

$$u_x = \ell U - m V, u_y = m U + \ell V \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \ell^2 + 2\tau_{xy} \ell m + \sigma_y m^2 \\ \sigma_s &= \sigma_x m^2 + \sigma_y \ell^2 - 2\tau_{xy} \ell m \\ \tau_{ns} &= -(\sigma_x - \sigma_y) \ell m + \tau_{xy} (\ell^2 - m^2) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで, ℓ, m は方向余弦, u_x, u_y はそれぞれ x, y 方向の変位である。 U, V はそれぞれ要素境界の n 方向, s 方向の変位を示す。 $\sigma_n, \sigma_s, \tau_{ns}$ は座標系 n, s での応力を示す。式(2), (3)を用いて, 式(1)の右辺第2項, 第3項の積分を変換すると式(1)は次式のようにになる。

$$\Pi_{CH} = \Sigma \left[\iint_{V_n} B(\sigma_{ij}) dx dy - \int_{\partial V_n} (U\sigma_n + V\tau_{ns}) ds + \int_{S\sigma_n} (U\bar{\sigma}_n + V\bar{\tau}_{ns}) ds \right] \quad (4)$$

ここで, $\bar{\sigma}_n, \bar{\tau}_{ns}$ は外力である。

2.2 変分原理への塑性条件式の導入

塑性条件式 f が要素内の応力のみ関数の時, 二次元問題では一般に次のように表される。

$$f = Y(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) - \sigma_y = 0 \quad (5)$$

ここで, Y は降伏関数, σ_y は降伏応力である。要素内の任意の点が降伏条件を満たし, 荷重の

増加後も塑性状態を維持しているなら, 次の条件式を満たさねばならない。

$$df = \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} = 0 \quad (6)$$

ここで, 式(6)を満足させるために, ラグランジェの未定乗数 $d\lambda$ を用いて式(4)に導入する。

$$\Pi_{CH}^* = \Pi_{CH} + \int_{V_p} d\lambda df dA \quad (7)$$

ここで, V_p は塑性に達した領域である。また式(6)を要素内の任意の点のみで塑性条件式を満足させるためには

$$\Pi_{CH}^* = \Pi_{CH} + \sum_{i=1}^N d\lambda_i df_i \quad (8)$$

となる。式(8)で N は要素内で塑性に達した評価点の数である。つぎに, ひずみ硬化を考慮する方法について説明する。等方硬化の塑性条件式は一般に次のように表される。

$$f = Y(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) - \sigma_0(\bar{\epsilon}^P) = 0 \quad (9)$$

ここで σ_0 は降伏曲面の大きさを表すパラメータであり, 初期の降伏時には σ_y に一致する。 $\bar{\epsilon}^P$ は相当塑性ひずみである。要素内の点が降伏条件を満足し, 荷重増加後も塑性状態を維持しているなら, 次の条件式を満たさなければならない。

$$df = \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} - H' d\bar{\epsilon}^P = 0 \quad (10a)$$

ここで, $d\sigma_0 / d\bar{\epsilon}^P = H'$ で, H' はひずみ硬化係数である。要素内の降伏した点で式(10a)を満足させるために, ラグランジェの未定乗数 $d\lambda$ を用いる。H.Eggers⁶⁾によれば式(7)のラグランジェの未定乗

数の物理的意味は相当塑性ひずみ増分 $d\bar{\epsilon}^P$ であるので式(10a)は次のようになる。

$$df = \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy}$$

$$-H'd\lambda = 0 \quad (10b)$$

式(10b)をラグランジェの未定乗数 $d\lambda$ を用いて、式(4)に導入する。この時、 $d\lambda$ で変分を行った時に式(10b)に一致させることを考慮に入れれば

$$\Pi_{CH}^* = \Pi_{CH} + \int_{V_p} d\lambda \left(\frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} d\sigma_y \right. \\ \left. + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} - \frac{H'}{2} d\lambda \right) dA \quad (11a)$$

となる。

2. 3 弾塑性剛性方程式の誘導

弾塑性剛性方程式を導くために、応力場、変位場、ラグランジェの未定乗数を仮定する必要があるが、応力場と変位場を次式のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \beta_1 + y\beta_4 + x\beta_6 + y^2\beta_8 + x^2\beta_{10} + 2xy\beta_{11} \\ \sigma_y &= \beta_2 + x\beta_5 + y\beta_7 + x^2\beta_9 + y^2\beta_{10} + 2xy\beta_{12} \\ \tau_{xy} &= \beta_3 - y\beta_6 - x\beta_7 - 2xy\beta_{10} - y^2\beta_{11} - x^2\beta_{12} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$U = u_i - \theta_i s, \quad V = v_i - \epsilon_i s \quad (13)$$

式(13)で u_i, v_i, θ_i は図-1に示すように節点 i の変位であるが、 ϵ_i は i 点の要素境界に平行な方向のひずみを意味している。なお、 s は図-2に示すように、局所座標系の原点からの距離である。つぎに、式(12)を式(14)のように表わし、ひずみ・応力関係式を式(15)のように仮定する。

$$\{\sigma\} = [B]\{\beta\} \quad (14)$$

$$\{\epsilon\} = [C]\{\sigma\} \quad (15)$$

式(14),(15)を用いれば、式(4)の右辺第1項の積分は次式のようになる。

$$\iint_{V_n} B(\sigma_{ij}) dx dy = \{\beta\}^T [H] \{\beta\} / 2 \quad (16)$$

ここで

$$[H] = \iint_{V_n} [B]^T [C] [B] dx dy, \{\beta\} = \{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{12}\}^T \text{ である。}$$

式(4)の右辺第二項は式(3), (12), (13)を用いれば

$$\int_{\partial V_n} (U\sigma_n + V\tau_{ns}) ds = \{\beta\}^T [G]\{u\} \quad (17)$$

となる。ここで、 $\{u\} = \{u_i v_i \theta_i \dots \epsilon_k\}^T$ である。

外力ベクトルを $\{F\}$ とすると式(4)の荷重項は

$$\int_{S\sigma_n} (U\bar{\sigma}_n + V\bar{\tau}_{ns}) ds = \{u\}^T \{F\} \quad (18)$$

となる。

塑性を考慮に入れた変分原理として、式(7), (8), (11a)を示したが、式(7)は式(11a)で $H' = 0$ とする場合に一致するので、弾塑性剛性方程式の誘導方法は式(8)と(11a)について説明する。式(8)は完全弾塑性体の変分原理である。式(8)の Π_{CH} については、すでに式(16), (17), (18)が求められているので式(8)右辺第2項について示せば、式(6), 式(14)を用いると

$$\sum_{i=1}^N d\lambda_i df_i \\ = \sum_{i=1}^N \left[(d\sigma_x d\sigma_y d\tau_{xy}) \left(\frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} \right)^T d\lambda_i \right] \\ = \{d\beta\}^T [G^*] \{d\lambda\} \quad (19)$$

となる。ここで、 $[G^*]$ の j 行 k 列を $G^*(j, k)$ とすると、降伏した点の x_i, y_i 点における G^* は次式のようになる。

$$G^*(j, k) = \left[B(1, j) \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} + B(2, j) \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} + B(3, j) \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} \right] \quad (20)$$

$\{d\lambda\} = \{d\lambda_1, d\lambda_2, \dots, d\lambda_n\}$ である。式(20)で要素内の塑性点の数が1個であれば $k=1, i=1$ である。このときの $[G^*]$ の大きさは 13×1 である。塑性点の数が n 個の時は k は $1 \sim n, i=1 \sim n$ となり $[G^*]$ の大きさは $13 \times n$ となる。このように、塑性点の1個が $[G^*]$ の1列に対応しているので、 $k=i$ とおくことができる。つぎに、式(16), (17), (18), (19)を式(8)に代入する。このとき、独立変数である $\{\beta\}, \{u\}, \{\lambda\}$ はすべて増分記号が付くが、簡単のために、増分記号を省略して示す。

$$\begin{aligned} \Pi_{CH}^* = & \{\beta\}^T [H] \{\beta\} / 2 - \{\beta\}^T [G] \{u\} \\ & + \{u\}^T \{F\} + \{\beta\}^T [G^*] \{\lambda\} \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 $\{\beta\}$ についての停留条件より

$$\{\beta\} = [H]^{-1} \{ [G] \{u\} - [G^*] \{\lambda\} \} \quad (22)$$

となる。式(22)を式(21)に代入し、 $\{u\}$ と $\{\lambda\}$ について停留条件を求め、さらに $\{\lambda\}$ を消去すれば次式が得られる。

$$[k_{11}] - [k_{12}] [k_{22}]^{-1} [k_{21}] \{u\} = \{F\} \quad (23)$$

ここで、

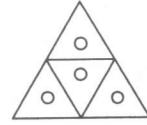
$$[k_{11}] = [G]^T [H]^{-1} [G], \quad [k_{12}] = [G]^T [H]^{-1} [G^*],$$

$$[k_{21}] = [G^*]^T [H]^{-1} [G], \quad [k_{22}] = [G^*]^T [H]^{-1} [G^*]$$

である。式(23)が完全弾塑性体の弾塑性剛性方程式である。

ひずみ硬化を考慮する場合は式(11a)を用いる。まず、式(11a)を次式のように表す。

$$\begin{aligned} \Pi_{CH}^* = & \Pi_{CH} + \int_{V_p} d\lambda \left(\frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} d\sigma_y \right. \\ & \left. + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} \right) dA - \frac{1}{2} \int_{V_p} H' d\lambda^2 dA \end{aligned} \quad (11b)$$



図—3 塑性の評価点

式(11b)の左辺第2項、第3項は塑性が生じた領域での積分となっているが、ここでは図—3に示すように、1個の要素を辺中央を結ぶ線で4個の領域に分割し、降伏の判定は領域の重心で行う。また、塑性になった時、 $d\lambda$ はこの領域内で一定とする。このような仮定のもとで式(11b)の右辺第2項の積分は、塑性点の数を n とすると、

$$\begin{aligned} \int_{V_p} d\lambda \left(\frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} \right) dA \\ = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} d\lambda_i \left(\frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} \right) dA \\ = \{d\beta\}^T [G^*] \{d\lambda\} \end{aligned} \quad (24)$$

となる。

ここで、 $[G^*]$ の j 行 k 列を $G^*(j, k)$ とすると

$$\begin{aligned} G^*(j, k) = & \int_{V_i} (B(1, j) \frac{\partial Y}{\partial \sigma_x} + B(2, j) \frac{\partial Y}{\partial \sigma_y} \\ & + B(3, j) \frac{\partial Y}{\partial \tau_{xy}}) dA \end{aligned} \quad (25)$$

ここでも式(20)と同様に、塑性点の1個が $[G^*]$ の1列に対応しているので、 $i=k$ とおける。 $[G^*]$ の大きさは、塑性点の数を n とすると $13 \times n$ となる。式(11b)の右辺第3項については、

$$\frac{1}{2} \int_{V_p} H' d\lambda^2 dA = \frac{1}{2} \{d\lambda\}^T [G^{**}] \{d\lambda\} \quad (26)$$

となる。ここで、 $[G^{**}]$ は次式に示す対角項のみ零でない係数をもつ対角マトリックスである。

$$[G^{**}] = \begin{bmatrix} H'A_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & H'A_n \end{bmatrix} \quad (27)$$

この $[G^{**}]$ はマトリックスの大きさが $n \times n$ である。式(16), (17), (18), (24), (26)を式(11b)に代入する。このとき独立変数 $\{\beta\}$, $\{u\}$, $\{\lambda\}$ は増分記号が付くが、簡単のために、増分記号を省略して示す。

$$\begin{aligned} \Pi_{CH}^{**} = & \{\beta\}^T [H]\{\beta\}/2 - \{\beta\}^T [G]\{u\} + \{u\}^T \{\bar{F}\} \\ & + \{\beta\}^T [G^*]\{\lambda\} - \{\lambda\}^T [G^{**}]\{\lambda\}/2 \end{aligned} \quad (28)$$

ここで、 $\{\beta\}$, $\{u\}$, $\{\lambda\}$ について停留条件を求めれば、弾塑性剛性方程式が得られる。

$$[G]^T ([H] + [G^*][G^{**}]^{-1}[G^*]^T)^{-1} [G]\{u\} = \{\bar{F}\} \quad (29)$$

以上、完全弾塑性体の弾塑性剛性方程式として式(23)ひずみ硬化を考慮した弾塑性剛性方程式として式(29)を示した。

3. 数値解析例

3.1 分布荷重を受ける基礎の支持力

ここで、式(23)の妥当性を検討するために、分布荷重を受ける基礎の支持力問題を増分法で解析し、プラントルの理論解と比較する。

Drucker-Prager 降伏関数はコンクリートの降伏関数⁷⁾としても良く用いられるが、平面ひずみ問題では次式のように仮定される⁷⁾。

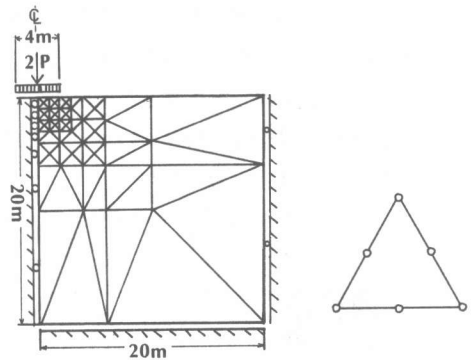
$$f = 3\alpha(\sigma_x + \sigma_y)/2 + (1 - 3\alpha^2)\sqrt{J_2} = k \quad (30)$$

ここで、 $J_2 = \left\{ \left[(\sigma_x - \sigma_y)/2 \right]^2 + \tau_{xy}^2 \right\} / (1 - 3\alpha^2)$,

$$\alpha = \tan \phi / \sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}, k = 3C / \sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi} \quad \text{で}$$

ある。また、 C =粘着力、 ϕ =摩擦角である。

図-4に計算で用いた要素分割図と要素内の塑性の評価点を示している。なお、評価点は要素境界の近くに設置した。地盤および基礎が対称なので、解析も対称性を利用して右半分の領域のみで解析した。図-5には増分法で計算した基礎上の荷重と変位の関係を示した。同図にプラントルの理論解を示してあるが、プラントルの理論解との一致は良好である。図-6には塑性域の進展状況を示した。塑性域は基礎端部から発生し基礎下方の方向にアーチ状に進行しているが、これらの傾向は他の有限要素解⁸⁾の状況と大体一致する。



(a) 要素分割 (b) 塑性の評価点

図-4 基礎の支持力問題

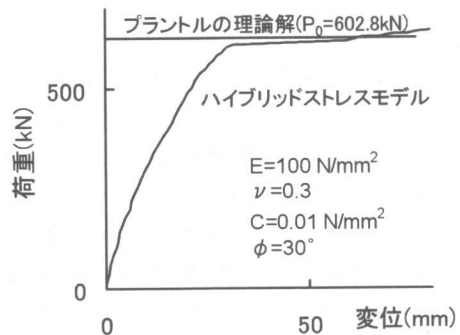


図-5 荷重と基礎の変位の関係

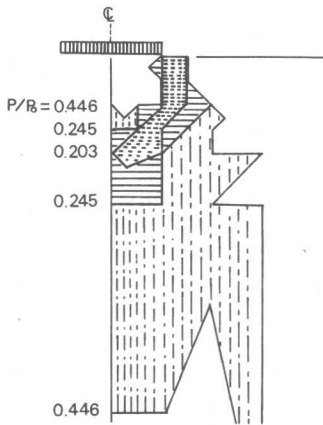


図-6 塑性域の進展

3. 2 円孔を有する帯板の弾塑性解析

式(29)の応用例としては、矢川らが解析した円孔を有する帯板の弾塑性解析例⁴⁾との比較を行う。図-7は円孔を有す長方形帯板をX軸方向に引っ張り塑性の進展状況を解析するための要素分割図である。解析は対称性を用いているので同図には帯板全体の1/4のみを示した。

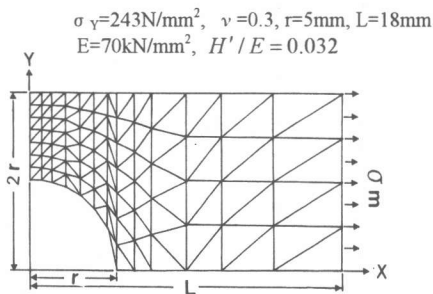


図-7 円孔を有する長方形板の弾塑性解析

図-8には端部に作用する荷重Pが増加していくときのY軸上の応力 σ_x の分布を示したものである。同図で、荷重が増加するにつれ矢川らの応力分布との差が大きくなっているが、 $P=1149\text{N}$ の時、 σ_x の合力を同図のY軸上から求めると、矢川らの荷重は1042N、筆者らの荷重は1154Nとなり筆者らの解の方は大体力の釣り合いを満たしている。これより、提案した解析方法がひずみ硬化を有する材料に対しても良好な解を得ることが分かった。

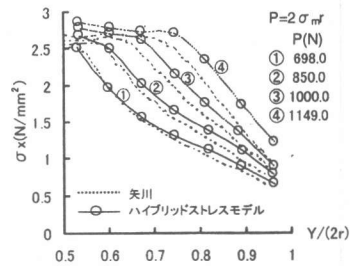


図-8 Y軸上の σ_x の分布(弾塑性解析)

4. まとめ

本研究は、筆者らが提案した二次元ハイブリッドストレスモデルを近藤らと同様に要素内で塑性を評価する方法で弾塑性解析に応用する方法を示した。提案した解析方法を検討するため Drucker-Prager 降伏関数でモデル化できる材料、ひずみ硬化を有する材料に限定したが、解析結果は良好であった。

参考文献

- 1) 伊良波繁雄: ハイブリッドストレスモデルによるひずみ軟化解析法, コンクリート構造の破壊力学に関するコロキウム, JCI, pp. II 19-26, 1990.3
- 2) 伊良波繁雄: 修正されたハイブリッドストレスモデルによる非線形構造解析, 構造工学論文集, Vol.32A, pp.249-254, 1986
- 3) 近藤一夫: 鋼構造骨組の塑性崩壊解析, コンピュータによる極限解析法シリーズ6, 培風館, 1991.3
- 4) 矢川元基, 西岡俊久, 安藤良夫: 重ね合せ法を用いた弾塑性問題の有限要素解析, 日本機械学会論文集(第1部), 52巻, 358号, pp.1644-1651, 1976.6
- 5) 鷲津久一郎: 弾性学の変分原理, コンピュータによる構造工学講座II-3-A, 培風館, 1972
- 6) H.Eggers: Variational Principles for Elastoplastic Continua, J.Struc.Mech, Vol.3, No.4, pp.345-358, 1974
- 7) W.F.Chen: コンクリート構造物の弾塑性解析, 丸善, 1985
- 8) 小林正樹: 有限要素法による支持力解析, 第19回土質工学研究発表会論文集, pp.945-946, 1984