

# 論文 大変形解析によるティモシェンコはりのせん断変形およびせん断耐荷力

園部 了<sup>\*1</sup>・田辺 忠顕<sup>\*2</sup>

**要旨:** 塑性変形の大きくなる部材の終局状態では、材料非線形性と幾何学的非線形性が、RC部材の挙動に大きな影響を与えると考えられる。本研究では、RC部材のせん断変形、せん断耐荷力、及び部材の終局挙動を評価するために、せん断剛性をトラス理論により評価したティモシェンコはり理論を用い、せん断破壊する3体のRC柱の大変形解析、微小変形解析を行なった。両者の解析値と実験値を比較することにより、終局状態では大変形理論の方が、部材の挙動を妥当に評価し得ることが確認され、トラス理論によるせん断剛性の評価もまた、ほぼ妥当であることが確認された。

**キーワード:** せん断、大変形理論、ティモシェンコはり理論、トラス理論

## 1. はじめに

構造物が終局状態に近くなると載荷点変位、部材の変形が大きくなることから、有限変形、あるいは大変形理論により部材の挙動を評価した方が妥当であると考えられる。阪神大震災においては、多くの鉄筋コンクリート構造物がせん断破壊したが、せん断破壊はある種の構造不安定破壊とも呼ばれており、真の終局状態（大変形状態）まで解析を行ってそのメカニズムを考慮する必要がある。そこでせん断変形を考慮するために、せん断による影響を示すパラメータであるせん断剛性を導入した。そのせん断剛性は、ティモシェンコはり理論を用いるのに必要であり、トラス理論より求めた。

本研究では、繰り返し荷重下でのせん断を考慮した大変形解析を行い、せん断剛性を評価するためにトラス理論を用いることの妥当性と終局状態では微小変形理論より大変形理論の方が妥当であることが確認できた。

## 2. ティモシェンコはり理論の定式化<sup>1)</sup>

### 2.1 仮想仕事方程式

従来の曲げ剛性マトリックスにせん断変形を組み込む一つの手法をティモシェンコはり理論という。これは、たわみを曲げたわみとせん

断たわみに分解せん断変形の基本関係を導入して曲げ剛性方程式を修正する方法で定式化する。図-1に示すような座標系をとり、軸力、せん断力、曲げモーメントが作用しているはり部材を考える。せん断変形を考慮するためはり要素の  $x, y, z$  方向各々の変位増分  $U(x, y, z)$ ,  $V(x, y, z)$ ,  $W(x, y, z)$  を曲げ変形成分並びにせん断変形成分を用い以下のように表す。

部材の各位置の変形を変形前の座標で次のように表す。

$$U(x, y, z) = u + y \frac{\partial v_b}{\partial x} - z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (1)$$

$$V(x, y, z) = v_b + v_s \quad (2)$$

$$W(x, y, z) = w_b + w_s \quad (3)$$

ここで、  $u$ : 軸力による軸方向変位増分

$v_b, w_b$ : 曲げによるたわみ変位増分

$v_s, w_s$ : せん断によるたわみ変位増分

従来のはりの曲げ理論では、変形前に中立軸に対して垂直な断面は、変形後も中立軸に垂直のままであったが、ティモシェンコはり理論では、変形後は中立軸に対して垂直とはならない。しかし、平面保持の仮定は成り立つものと仮定している。

式(1), (2), (3)に示した変位場を用いると、軸ひずみ、せん断ひずみ成分はそれぞれ次式で

\*<sup>1</sup> 名古屋大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (正会員)

\*<sup>2</sup> 名古屋大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 工博 (正会員)

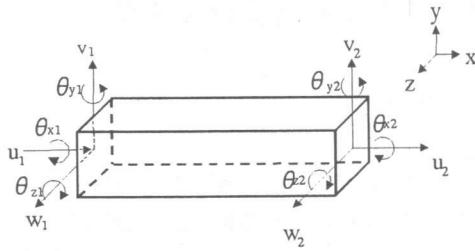


図-1 部材の変形

与えられる。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_b}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (4)\end{aligned}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v_s}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad (5)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \quad (6)$$

よって、増分形の仮想仕事方程式は次式となる。

$$\begin{aligned}\delta W_s &= \iint (f_x^{(0)} \delta u_x + f_y^{(0)} \delta u_y + f_z^{(0)} \delta u_z) dS \\ &\quad - \iiint \left\{ \sigma_x^{(0)} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \tau_{xy}^{(0)} \delta \left( \frac{\partial v_s}{\partial x} \right) + \tau_{xz}^{(0)} \delta \left( \frac{\partial v_s}{\partial x} \right) + \tau_{yz}^{(0)} \delta \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \right\} dV \\ &\quad + \iiint \frac{1}{2} \left\{ \sigma_x^{(0)} \delta \left( \frac{\partial v_b^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v_s^{(0)}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v_b}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sigma_z^{(0)} \delta \left( \frac{\partial w_b^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial w_s^{(0)}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \right\} dV \quad (7)\end{aligned}$$

## 2.2 剛性方程式

せん断変形による、はりのたわみ  $v_s, w_s$  は釣り合いを考えることで次のようになる。

$$\frac{dv_s}{dx} = -\frac{1}{GA_y} \frac{dM_z}{dx} = -\frac{EI_y}{GA_y} \frac{d^3 v_p}{dx^3} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}\frac{dw_s}{dx} &= -\frac{1}{GA_z} \frac{dM_y}{dx} \\ &= -\frac{EI_z}{GA_z} \frac{d^3 w_b}{dx^3} \quad (9)\end{aligned}$$

ここで  $v_b, w_b$  は曲げによるたわみ変位増分、  
 $GA_y, GA_z$  は有効断面のせん断剛性であり、RC  
部材のクラック状態などに依存する。

式(8), (9)は曲げ変形とせん断変形との関係式であり、部材の変位増分を3次多項式と仮定すると、各変位増分の変位関数は次のように表

わされる。

$$\begin{aligned}u &= [N_u] \{du\} \\ v_b &= [N_{vb}] \{dv\} \quad w_b = [N_{wb}] \{dw\} \\ v_s &= [N_{vs}] \{dv\} \quad w_s = [N_{ws}] \{dw\} \quad (10)\end{aligned}$$

$$N_u = \left[ 1 - \frac{x}{L}, \frac{x}{L} \right] \quad (11)$$

$$\begin{aligned}N_{vb} &= \frac{1}{1+T_y} \left[ 1 + \frac{6k_y}{L^2} - \frac{3}{L^2} x^2 + \frac{2}{L^3} x^3, \right. \\ &\quad \left. - \frac{12k_y^2}{L^3} - \frac{4k_y}{L} + \left( \frac{12k_y}{L^2} + 1 \right) x \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{6k_y}{L^3} - \frac{2}{L} \right) x^2 + \frac{1}{L^2} x^3, \right. \\ &\quad \left. - \frac{6k_y}{L^2} + \frac{3}{L^2} x^2 - \frac{2}{L^3} x^3, \right. \\ &\quad \left. \frac{12k_y^2}{L^3} - \frac{2k_y}{L} + \left( \frac{6k_y}{L^3} - \frac{1}{L} \right) x^2 + \frac{1}{L^2} x^3 \right] \quad (12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_{wb} &= \frac{1}{1+T_z} \left[ 1 + \frac{6k_z}{L^2} - \frac{3}{L^2} x^2 + \frac{2}{L^3} x^3, \right. \\ &\quad \left. - \frac{12k_z^2}{L^3} - \frac{4k_z}{L} + \left( \frac{12k_z}{L^2} + 1 \right) x \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{6k_z}{L^3} - \frac{2}{L} \right) x^2 + \frac{1}{L^2} x^3, \right. \\ &\quad \left. - \frac{6k_z}{L^2} + \frac{3}{L^2} x^2 - \frac{2}{L^3} x^3, \right. \\ &\quad \left. \frac{12k_z^2}{L^3} - \frac{2k_z}{L} + \left( \frac{6k_z}{L^3} - \frac{1}{L} \right) x^2 + \frac{1}{L^2} x^3 \right] \quad (13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_{vs} &= \frac{1}{1+T_y} \left[ \frac{6k_y}{L^2} - \frac{12k_y}{L^3} x, \right. \\ &\quad \left. - \frac{12k_y^2}{L^3} - \frac{4k_y}{L} + \frac{6k_y}{L^2} x, \right. \\ &\quad \left. - \frac{6k_y}{L^2} + \frac{12k_y}{L^3} x, \right. \\ &\quad \left. - \frac{12k_y^2}{L^3} + \frac{2k_y}{L} - \frac{6k_y}{L^2} x \right] \quad (14)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_{ws} &= \frac{1}{1+T_z} \left[ \frac{6k_z}{L^2} - \frac{12k_z}{L^3} x, \right. \\ &\quad \left. - \frac{12k_z^2}{L^3} - \frac{4k_z}{L} + \frac{6k_z}{L^2} x, \right. \\ &\quad \left. - \frac{6k_z}{L^2} + \frac{12k_z}{L^3} x, \right. \\ &\quad \left. - \frac{12k_z^2}{L^3} + \frac{2k_z}{L} - \frac{6k_z}{L^2} x \right] \quad (15)\end{aligned}$$

ここで、  
 $T_y = \frac{12}{L^2} k_y$ ,  
 $T_z = \frac{12}{L^2} k_z$

$k_y (= EI_y / GA_y)$ ,  $k_z (= EI_z / GA_z)$  は曲げ剛性とせん断剛性の比を表わす係数で、せん断剛性と呼ぶ。せん断剛性が無限大ならば上式の変位関数は従来の曲げに関するものと一致する。また  $\{du\}$ ,  $\{dv\}$ ,  $\{dw\}$  はそれぞれ部材の軸方向および鉛直方向の節点変位増分ベクトルである。このマトリクスを用い要素剛性マトリクスは次式により表される。

$$[K] = \iiint [B]^T [D] [B] dx dy dz \quad (16)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} B_b \\ B_s \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad (17)$$

ここで、 $[B_b]$  は節点変位増分 - 軸ひずみ増分マトリクス、 $[B_s]$  は節点変位増分 - せん断ひずみ増分マトリクスである。 $[D]$  は応力増分 - ひずみ増分マトリクスである。ここで、注意すべき点は  $[D]$  が  $3 \times 3$  のマトリックスとなり、軸方向応力がせん断ひずみの影響を受けることである。

### 2.3 ファイバーモデル

はり要素のモデル化には、部材断面をいくつかのファイバーと呼ばれる微小要素に分割し、それぞれの要素ごとに応力・ひずみ関係を考えるファイバーモデルを用いた。従来のファイバーモデルは曲げのみを考慮した単純な一次元モデルであるが、本研究におけるファイバーモデルは断面の高さ方向と奥行き方向にティモシェンコはり理論に基づくせん断変形を導入している。

解析手順を簡略に示すと、まず前ステップにおいてえられた節点増分変位より、各ファイバーでの増分ひずみを求める。そして、この増分ひずみを用いて、コンクリート、鉄筋それぞれの構成則に従い、各ファイバーでの接線剛性を求める。次に、各ファイバーでの接線剛性を積分することにより断面の剛性を求め、さらに、この断面の剛性を要素軸方向に積分することで最終的には要素の剛性マトリクスが求められる。

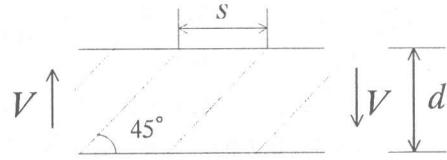


図-2 ト拉斯モデル

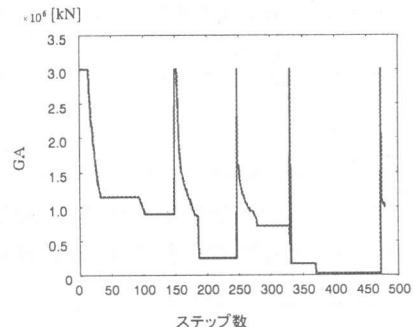


図-3 GA の変化

### 2.4 ト拉斯理論<sup>2)</sup>

ティモシェンコはり理論においてのせん断変形、およびせん断ひずみはせん断剛性  $GA$  の劣化によって大きく左右される。つまり、せん断剛性をどのように求めるかがせん断変形の重要なポイントになる。当然、構造物はせん断補強筋の有無によってせん断耐荷機構が大きく変化するため、それぞれの場合でのせん断剛性の算定方法が確立すれば構造物の挙動をより正確に捉えることができる。本節ではせん断剛性をト拉斯理論から導き、どのようにティモシェンコはり理論に導入するかを解説する。ト拉斯モデルを図-2 で示す。

初期弾性状態においてはせん断補強筋の有無にかかわらずポアソン効果から式(18)のように求める。

$$GA = \frac{EA}{2k(1+\nu)} \quad (18)$$

次に、斜めひび割れが発生した後は以下に示す方法でせん断剛性を導く。

ト拉斯理論での仮想仕事方程式は式(19)で表される。

$$1 \cdot \delta = \int_0^{l_1} \frac{Q \cdot 1}{E_s \cdot A'_v} dx + \int_0^{l_2} \frac{\sqrt{2}Q \cdot \sqrt{2}}{E_c \cdot A'_c} dx \quad (19)$$

ここで、 $A'_v$  および  $l_1$ 、 $A'_c$  および  $l_2$  は、それぞれ鉛直引張り材(腹鉄筋)、圧縮斜材の断面積および長さであり、式(20)、式(21)のように表される。これらを上式に代入して式(22)とする。

$$A'_v = (d/s) \cdot A_v, \quad l_1 = d \quad (20)$$

$$A'_c = (d/\sqrt{2}) \cdot b_w, \quad l_2 = \sqrt{2}d \quad (21)$$

$$\delta = \frac{V \cdot s}{E_s \cdot A_v} + \frac{4 \cdot V}{E_c \cdot b_w} \quad (22)$$

したがって、せん断ひずみ  $\gamma$  は式(23)で、 $\gamma=1$  のときのせん断力、すなわちせん断剛性  $GA$  は式(24)で求められる。

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\delta}{d} = \frac{V}{E_s \cdot b_w \cdot d} \left( \frac{b_w \cdot s}{A_s} + \frac{E_s \cdot 4}{E_c} \right) \\ &= \frac{V}{E_s \cdot b_w \cdot d} \left( \frac{1}{r} + 4n \right) \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、 $r$  は腹鉄筋比  $A_v/(b_w \cdot s)$ 、 $n$  は接線剛性比  $E_s/E_c$  である。

$$GA = E_s \cdot b_w \cdot d \left( \frac{r}{1+4nr} \right) \quad (24)$$

以上に導いたせん断剛性は図-3のような推移になる。

この図は供試体に斜めひび割れが入ったとき、せん断剛性  $GA$  が急激に減少し、変形が進むと共にせん断剛性が徐々に減少していく経過を表す図である。本研究では、アンローディングポイントにおいてせん断剛性を初期値に戻して解析を行った。

### 3. 材料モデル

本研究では、RC要素を3次元ファイバーに分割し、コンクリート及び補強鉄筋にそれぞれ以下の一軸モデルを用いた。

#### 3.1 コンクリート材料モデル

図-4に、コンクリートの一軸応力-ひずみ関係を示す。

コンクリートが圧縮力を受け持つ場合は、以下のように仮定した。圧縮ひずみが応力軟化開

始ひずみに到達するまでは、次式の2次曲線で応力-ひずみ関係を仮定した。

$$\sigma_c = f_c \left\{ 2 \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \right) - \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \right)^2 \right\} \quad (25)$$

$\epsilon_0$  = 1軸圧縮最大応力時のひずみ

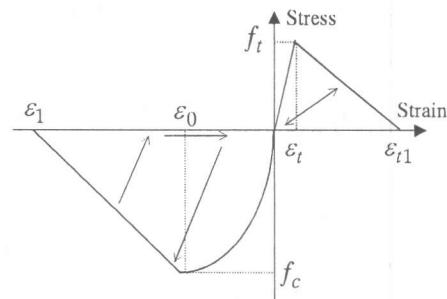


図-4 コンクリートモデル

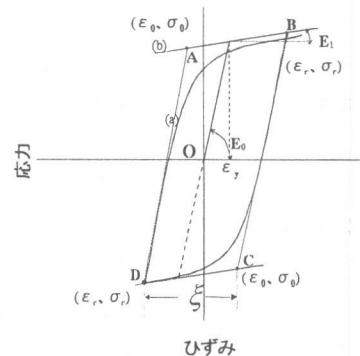


図-5 鉄筋モデル

$\epsilon_c$  : 各圧縮部材の圧縮ひずみ

$f_c$  : コンクリート一軸圧縮強度

応力軟化域は、応力が直線的に減少すると仮定した。なお、除荷、再載荷経路は、初期勾配をもって応力が変化するものと仮定し、圧縮ひずみ領域では、コンクリートは引張応力を持たないと仮定した。

コンクリートが引張力を受け持つ場合は、以下と仮定した。応力が引張強度に到達するまでは、弾性体と仮定し、ひび割れ発生後は、直線的に応力が減少するものと仮定した。なお、軟化域には、破壊エネルギーを導入し、その値を  $0.1 \text{ N/mm}$  と仮定した。除荷、再載荷経路は、図に示すとおり仮定した。

#### 3.2 鉄筋モデル

表-1 試体の諸元

No	軸力 (MPa)	断面 (mm)			長さ(mm)	強度 (MPa)			鉄筋比 (%)	
		幅	高さ	有効高さ		コンクリート	軸鉄筋	帯鉄筋	軸鉄筋	帯鉄筋
R1	2	406	610	572	2430	38	317	360	2.5	0.12
R3	2	406	610	572	2430	34	469	324	2.5	0.12
R5	2	406	610	572	1830	35	469	324	2.5	0.12

鉄筋の一軸モデルには、一般に適合性がよいとされている Menegotto and Pinto モデル(図-5)を用いた。

#### 4. 繰り返し荷重下における Timoshenko はりの解析

##### 4.1 実験、解析概要

解析する実験データは、カルフォルニア大学の Priestley<sup>3)</sup> らによるものである。表-1、図-6 に供試体の諸元、概要を示す。R1 は R3, R5 より軸鉄筋の強度が小さく、R5 は R1, R3 より柱の長さが短く設定されている。実験では、一定軸力 2MPa を作用させながら繰り返しせん断力を作用させている。実験で確認された破壊モードは、すべてせん断破壊である。

本研究では、RC 柱をティモシェンコはり 3 次元要素でモデル化し、せん断剛性をトラス理論で評価することで解析を行った。図-7 に、解析モデルを示す。RC 柱を 10 要素、11 節点に分割し、ファイバー分割は、部材軸方向に 2 つのガウス点、断面高さ方向に 50、断面奥行き方向に 2 分割とした。さらに本研究では、有限変形理論、及び微小変形理論を用いて解析を行うことで、得られる結果にどのような違いが見られるか、特に変形の大きい部材の終局状態において比較を行った。

##### 4.2 解析結果

図-8 に荷重と柱の荷重載荷点での変位との関係を大変形理論と微小変形理論の両方の解析値と実験値との比較で表わす。

R1 では、実験結果からわかるように、せん断の影響が少なく、変位が ±30mm を超えたところでせん断による耐荷力の減少が始まって

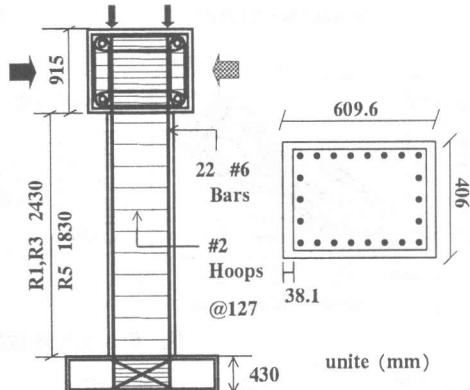


図-6 試験体概要

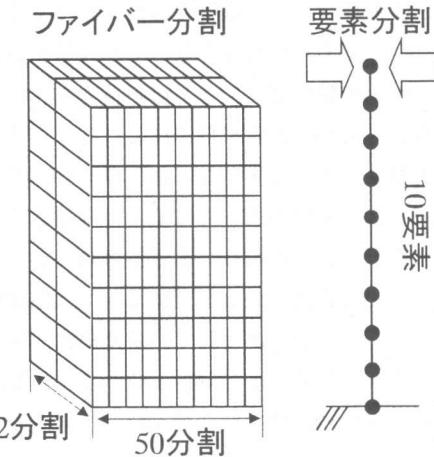


図-7 解析モデル

いる。解析値は大変形理論による解析において、急激に耐荷力が減少している。これは、せん断による影響で耐荷力が減少したと思われる。この原因はコンクリートの圧縮域において、多くの分割要素が軟化域に入った為、コンクリートの剛性が全体的に低くなり、式(24)における  $n$  の値が増加したために、せん断剛性  $GA$  が急激に減少したためだと推測される。

R3 では、実験値を見ると、せん断による劣化が ±20mm のあたりで見られる。解析値も

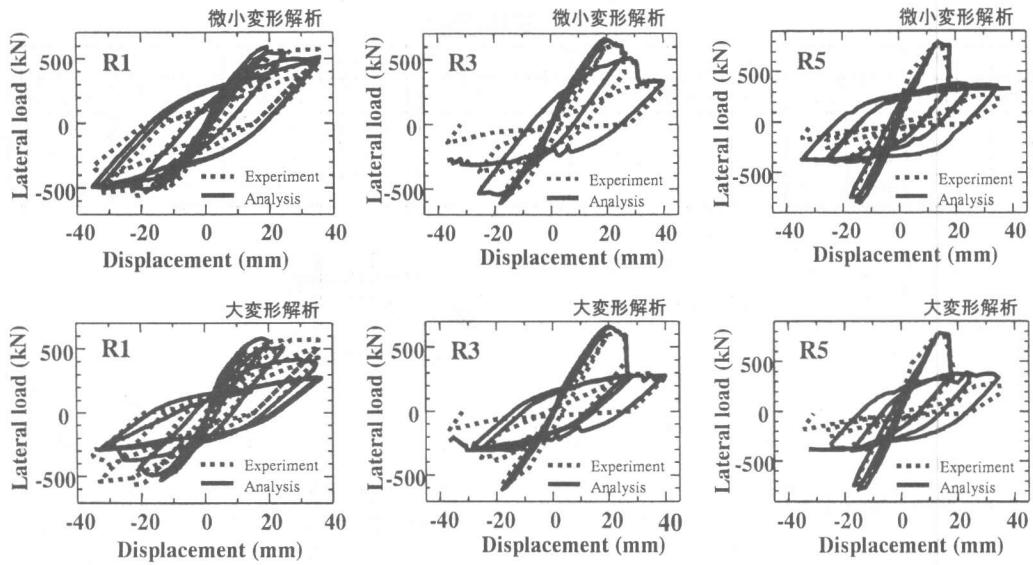


図-8 大変形理論と微小変形理論の比較

大変形理論による解析値、微小変形理論による解析値ともにせん断による劣化が見られるが、微小変形理論による解析ではせん断による劣化が小さく、変位が大きくなつてから劣化が見られるが、実験値ほど大きくは耐荷力を評価しきれない。しかし大変形理論における解析値は、せん断による影響をかなり精度良く評価している。しかし変位が大きくなると、収斂計算に費やす時間が大きくなり、荷重にばらつきが出てしまう。これは、分割要素によっては部分的なアンローディングが生じているために、軟化域にあるコンクリートの剛性が負から正に変わってしまうため、結果的にせん断剛性GAの値にばらつきが出るためであると思われる。

R5では、実験値を見ると、せん断による劣化が上記の2つの供試体よりも大きく現れている。解析値は微小変形理論による解析値より大変形理論による解析の法が、原点に向かうようなアンローディングカーブを描いており、エネルギー吸収の度合いをより評価できたことが分かる。

## 5. 結論

本研究により以下の結論が得られた。

- 1) 正負交番載荷を受けるRC柱を、ティモシ

エンコはり3次元要素でモデル化し、せん断剛性をトラス理論で評価した有限要素解析法の提案を行った。その結果、本解析手法は実験値を妥当な精度で評価できる事が確認された。

- 2) 大変形理論と微小変形理論のそれぞれを用いた解析結果を比較すれば、部材の終局状態では、大変形理論の方が実験値を精度良く評価できる傾向が確認された。
- 3) 解析値は、実験値を妥当な精度で評価することができたことから、トラス理論による部材のせん断剛性の評価は、ほぼ妥当であると考えられる。

## 参考文献

- 1) 中村光：コンクリート構造のポストピーク挙動に関する研究、名古屋大学博士論文、1992。
- 2) 田邊忠顯、檜貝勇、梅原秀哲、土羽淳一郎：コンクリート構造、朝倉書店、1992
- 3) Yan Xiao, M.J.Nigel Priestley, Frieder Seible: Steel Jacket Retrofit for Enhancing Shear Strength of Short Rectangular Reinforced Concrete Columns, Report No.SSRP-92/07, July 1993.