

# 論文 改良アイソパラメトリック要素を用いた高精度フリーメッシュ法の二次元応力解析への適用に関する研究

安和 守史\*1・伊良波 繁雄\*2・富山 潤\*3・矢川 元基\*4

**要旨**：近年、新しい解析手法としてメッシュレス法の研究が様々な工学分野で盛んに行われている。その手法の一つにフリーメッシュ法 (FMM) がある。従来の FMM で用いられている局所要素は、定ひずみ三角形要素であるため精度的に問題があり、FMM の高精度化の試みがいくつかなされている。本研究では、FMM の解析精度を上げるために局所要素として6節点三角形アイソパラメトリック要素を、回転自由度を有する3節点三角形要素に変換し、従来の定ひずみ三角形要素を用いた FMM 解析と比較検討を行った。

**キーワード**：フリーメッシュ法、アイソパラメトリック要素、高精度要素

## 1. はじめに

近年、コンピューターの飛躍的な性能の向上によって、様々な工学分野で新しい数値解析手法としてメッシュレス法の研究が盛んに行われている。その手法の一つにフリーメッシュ法 (FMM)<sup>1)</sup>がある。筆者らは FMM の応用例として、コンクリートの引張軟化解析<sup>2)</sup>、画像処理を用いた応力解析<sup>3)</sup>、並列計算法によるコンクリートの破壊解析<sup>4)</sup>について研究成果を報告した。FMM では三角形要素で角の部分だけに自由度を有する要素を用いる必要があり、このために、定ひずみ三角形要素を主に用いていた。定ひずみ三角形要素は応力の変化が大きい所では精度が低く、FMM の高精度化のために他の精度の良い要素を必要としていた。

本研究では、局所要素に三角形アイソパラメトリック要素から導かれた、面内回転剛性を考慮できる回転自由度を有する三角形要素を用いることで、前述の問題を解決し、FMM の高精度化を図ることを目的としている。ここでは、数値解析例として曲げモーメントを受ける片持ち梁、

水平荷重を受けるラーメン構造、引張荷重を受ける L 型平板について二次元応力解析を行い、従来の定ひずみ三角形要素に基づいた FMM の解析精度と比較し、その実用性を検討する。

## 2. フリーメッシュ法の基本的アルゴリズム

FMM は、各節点 (中心節点) ごとにその付近の節点 (衛星節点) を集めてローカルな領域で一時的に三角形要素を作り、これらの一時的な三角形要素の要素剛性マトリックスから中心節点に寄与する行成分を集め、全体剛性マトリックスを作成していく。このため FMM は、グローバルな要素生成を必要としない。具体的には、**図-1**のように、中心節点  $l$  付近にある衛星節点  $(m, n, o, p, \dots)$  を集め (中心節点  $l$  の節点密度関数で定義される半径  $R$  の領域)、中心節点  $l$  に対して時計または反時計まわりに並べ、中心節点  $l$  を中心に一時的に三角形要素  $(lmn, lno, lop, \dots)$  を作る。各三角形要素 (例  $lmn$ ) について有限要素法と同様に要素剛性マトリックス  $[K_e]_{lmn}$  を作成し、 $[K_e]_{lmn}$  の中心節点  $l$  に寄

\*1 琉球大学大学院 理工学研究科環境建設工学専攻 (正会員)

\*2 琉球大学助教授 工学部環境建設工学科 博士(工学) (正会員)

\*3 琉球大学助手 工学部環境建設工学科 博士(工学) (正会員)

\*4 東京大学教授 工学部システム量子工学科 工博

与する行成分のみを全体剛性マトリックス  $[K]$  に足し込んでいく。得られた全体剛性マトリックスをもとに連立一次方程式を解く方法は、従来用いられている直接法や反復法を用いることが出来る。

本研究では、CG（共役勾配）法を用いた。

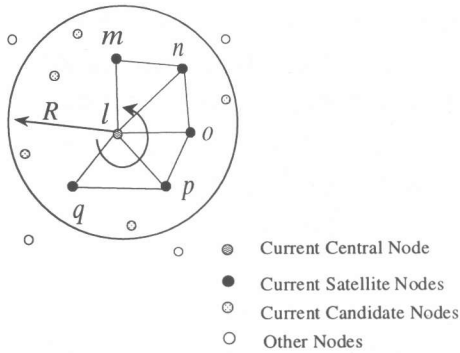
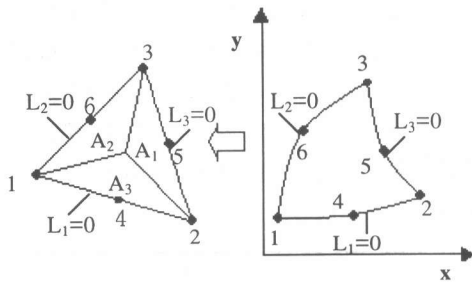


図-1 ローカル要素概念図

### 3. アイソパラメトリック要素の FMM への応用

#### 3.1 アイソパラメトリック要素

要素の形状が、正方形や直角三角形などの規則的なものであれば直接、形状関数を構成し、解析に用いることができる。しかし、解析領域の周囲が曲率を有する場合は、一般的な三角形要素などを用いて形状関数を直接構成し、解析に用いるのではなく、解析領域を正三角形や直角三角形などの規則的な要素の形状に変換し、それに対して適切な形状関数を用いるアイソパラメトリック要素を解析に用いることが多い。



(a) 正規化された局所座標 (b) 全体座標

図-2 全体座標から局所座標への変換

アイソパラメトリック要素は精度が良く、コ

ンクリート構造物の解析に用いられるが、本研究では図-2に示す6節点三角形アイソパラメトリック要素の剛性マトリックスを導き、この要素の剛性マトリックスを変換して回転自由度を有する3節点三角形要素を導いた。

図-2(a)のように面積座標  $L_1=A_1/A$ ,  $L_2=A_2/A$ ,  $L_3=A_3/A$  (ただし、 $A$  は三角形の面積)、自然座標系を  $\xi$ ,  $\eta$  とすると、 $L_1=\xi$ ,  $L_2=\eta$ ,  $L_3=1-\xi-\eta$  となる。この自然座標系を用いて三角形アイソパラメトリック要素の剛性マトリックスを示すと、

$$[K] = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} [B]^T [D] [B] t \det[J] d\xi d\eta \quad (1)$$

と表すことができる<sup>2)</sup>。

式(1)で  $[B]$  はひずみと節点変位を関連づけるひずみマトリックス、 $[D]$  は応力とひずみを関連づける弾性マトリックス、 $t$  は板厚、 $[J]$  はヤコビアンマトリックスである。本研究では式(1)で2次の形状関数<sup>7)</sup>を与える6節点三角形アイソパラメトリック要素の剛性マトリックスを作った。

式(1)を数値積分する時、図-3のような3点積分を用いた。

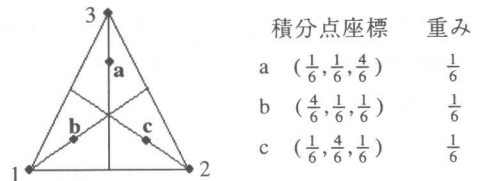
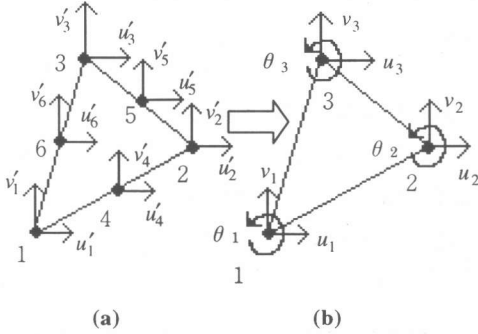


図-3 積分点座標と重み

#### 3.2 回転自由度を有する三角形要素の定式化

従来のフリーメッシュ法では、図-1に見られるようにローカルな領域で中心節点と周辺の衛星節点で3節点三角形要素の生成を行う。本研究では要素生成の際に、要素頂点となる節点の座標を用いて図-4(a)の点(4,5,6)のように中間節点座標を求め、アイソパラメトリック要素を構

成する。次に、この要素の剛性マトリックスを、後述する式(3)の変換マトリックスを用いて、**図-4(b)**の回転自由度を有する三角形要素に変換する。



**図-4 アイソパラメトリック要素から回転自由度を有する三角形要素への変換**

**図-4(a)**の辺(1-2)の変位  $u'_1, v'_1, u'_2, v'_2, u'_4, v'_4$  と **図-4(b)**の辺(1-2)の変位  $u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2$  の関係式は式(2)のようになる<sup>5)</sup>。

$$\begin{cases} u'_1 = u_1 \\ v'_1 = v_1 \\ u'_2 = u_2 \\ v'_2 = v_2 \\ u'_4 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \frac{y_{21}}{8}(\theta_2 - \theta_1) \\ v'_4 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) - \frac{x_{21}}{8}(\theta_2 - \theta_1) \end{cases} \quad (2)$$

式(2)で、 $x_{21} = x_2 - x_1$ ,  $y_{21} = y_2 - y_1$ ,  $x_1, y_1$  は節点1の座標、 $x_2, y_2$  は節点2の座標である。辺(2-3)、辺(3-1)も同様に、式(2)を適用し、マトリックス表示をすると式(3)のようになる。

$$\{u'\} = [T] \{u\} \quad (3)$$

ここで、

$$\{u'\}^T = \{u'_1, v'_1, u'_2, v'_2, u'_3, v'_3, u'_4, v'_4, u'_5, v'_5, u'_6, v'_6\}$$

$$\{u\}^T = \{u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2, u_3, v_3, \theta_3\}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & -y_{21}/8 & 0.5 & 0 & y_{21}/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & x_{21}/8 & 0 & 0.5 & -x_{21}/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -y_{32}/8 & 0.5 & 0 & y_{32}/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & x_{32}/8 & 0 & 0.5 & -x_{32}/8 \\ 0.5 & 0 & y_{13}/8 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -y_{13}/8 \\ 0 & 0.5 & -x_{13}/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & x_{13}/8 \end{bmatrix} \quad (4)$$

である。また、**図-4(a)**のアイソパラメトリック要素の剛性方程式を

$$[K'] \{u'\} = \{P'\} \quad (5)$$

とすると、**図-4(b)**の回転自由度を有する三角形要素の剛性方程式は式(6)のように表すことができる。

$$[T]^T [K'] [T] \{u\} = [T]^T \{P'\} \quad (6)$$

よって、回転自由度を有する三角形要素の剛性方程式は、

$$[K] \{u\} = \{P\} \quad (7)$$

と表せる。ただし、

$$[K] = [T]^T [K'] [T], \quad \{P\} = [T]^T \{P'\}$$

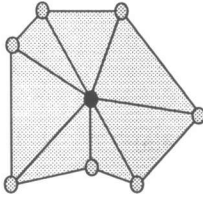
である。

次に、応力の計算方法について述べる。

従来の定ひずみ三角形を用いたフリーメッシュ法での応力の計算は、中心節点周りにある  $N$  個の要素応力の平均値 [式(8)] で中心節点の応力を表していた[**図-5(a)**]。ただし、式(8)の  $\{\sigma_c\}$  は中心節点の応力、 $N$  は中心節点周りの要素数、 $\{\sigma_i\}$  は各要素の応力を表している。

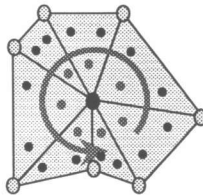
今回用いられているアイソパラメトリック要素の場合は、定ひずみ要素と異なり、要素内で応

力が変化する。このため、図-5(b)の中心節点cの応力を求める時には、中心節点に近い積分点(図-3の節点1を中心節点とすると積分点bにあたる)の平均値(式(9))を用いた。ただし、式(9)の $\{\bar{\sigma}_i\}$ は中心節点周りの各積分点の応力を表している。



$$\{\sigma_c\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{\sigma_i\} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (8)$$

(a)



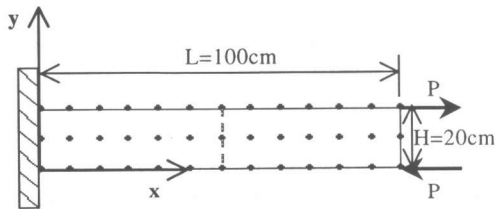
$$\{\sigma_c\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{\bar{\sigma}_i\} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (9)$$

(b)

図-5 応力の計算方法

#### 4. 数値解析例

##### 4.1 自由端に曲げモーメントを受ける片持ち梁の解析



$E=210000\text{N/mm}^2, \nu=0.3, P=100\text{N}$

図-6 片持ち梁の節点モデル

図-6に示すように片持ち梁の自由端に曲げ

モーメントが作用する問題を、定ひずみ三角形要素を用いた FMM(C)と回転自由度を有する三角形要素を用いた FMM(I)で解析した。モデルの総節点数は、12(縦2×横3分割), 18(2×5), 33(2×10), 55(4×10), 105(4×20), 205(4×40)である。

図-7は解析結果を示したもので、縦軸は解析で求めた自由端の鉛直方向のたわみ(v)を初等はり理論より求めたたわみの理論解( $v_T=ML^2/2EI$ :ただし、Mは自由端に作用するモーメント)で除した値( $v/v_T$ )をとり、横軸はモデルの総節点数を表している。

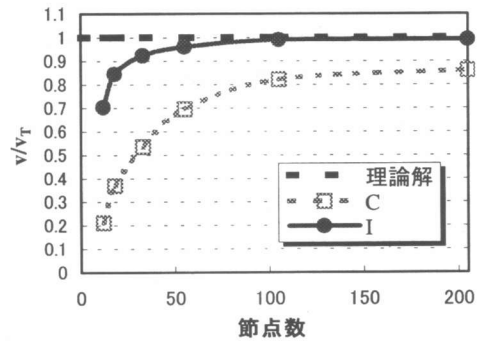


図-7 節点数と精度の関係

図-7より、回転自由度を有する三角形要素は定ひずみ三角形要素に比べると明らかに精度が良く、少ない節点数でも高い精度が得られることが分かった。

図-8には、 $x=50\text{cm}$ のはり断面の応力 $\sigma_x$ の分布を示した。解析には205節点のモデルを用いた。

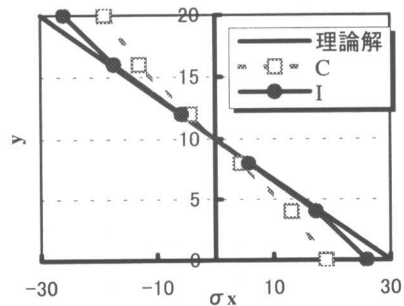


図-8 y軸方向の水平応力

図-8から前述した変位に関する精度と同様、応力についても少ない節点で理論解に極めて近い値を得ることができた。しかし、上下の境界面に近づくほど理論から少しずつずれていく。

#### 4.2 水平荷重を受けるラーメン

ここでは、図-9のように水平荷重を受けるラーメンの解析を行い、載荷点の水平変位 $\delta$ を求め、はり理論及び定ひずみ三角形要素(C)と比較を行う。

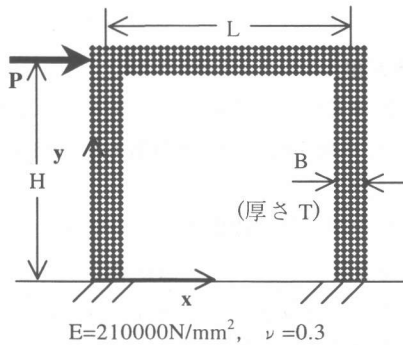


図-9 ラーメンの節点モデル

##### (1) 部材幅 B=1cm の場合

解析モデルのサイズは H=10cm, L=10cm, 垂直部材の断面は B=1cm, T=1cm, 上部部材の剛比を k=1.5 とした。ただし厚さ T は垂直部材と同じ 1cm とする。

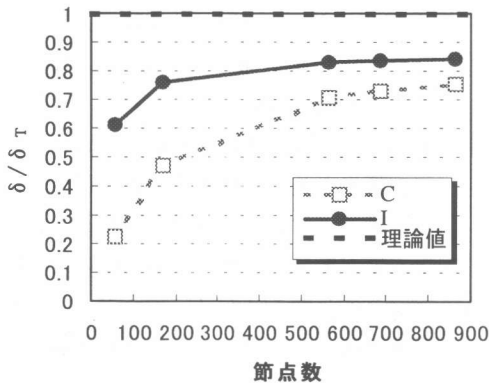


図-10 節点数と精度の比較(1)

解析結果の図-10 は、載荷点水平変位 $\delta$ をたわみ角法から求めた理論値 $\delta_T$ で除した値( $\delta/\delta_T$ )

$\delta_T$ )を縦軸にとり、節点数を横軸にとっている。

##### (2) 部材幅 B=0.1cm の場合

次に、部材幅 B=0.1cm の場合、精度がどのように変化するのかを検証する。解析は、部材幅 B 以外は(1)と同じ条件で作成し、解析を行った。解析結果(図-11)の表示は前述した図-10と同じである。

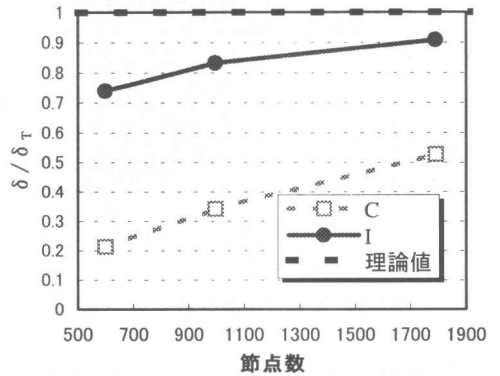


図-11 節点数と精度の比較(2)

図-10, 図-11 より、ラーメンの解析においても 4.1 の片持ち梁と同様、定ひずみ三角形要素(C)に比べ、回転自由度を有する三角形要素(I)は精度がよい。特に(2)の条件で解析した図-11ではその差が顕著に表れている。また、回転自由度を有する三角形要素は、(2)の条件でも精度の低下は少ない。それに対して定ひずみ三角形要素は解析精度が著しく低下している。

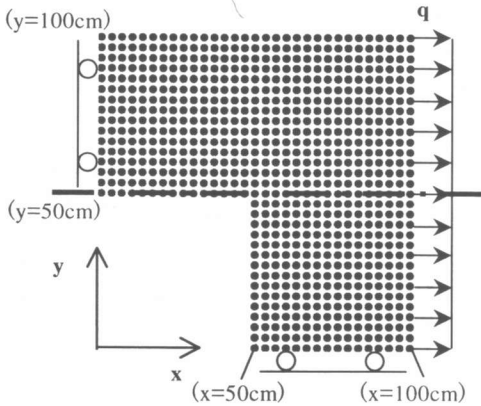
以上より回転自由度を有する三角形要素は、はり・ラーメンの解析においても FMM の高精度化に有効であると思われる。

#### 4.3 L型領域平板の応力集中問題

ここでは、図-12 に示すように切り欠きのある L型平板に引張荷重が作用する場合の応力解析を行い、2次元応力問題に関する回転自由度を有する三角形要素の有効性を検討する。

解析は、定ひずみ三角形要素(C)と回転自由度を有する三角形要素(I)で行った。ただし、解析モデルのサイズは縦横 100×100cm(厚さ 1cm)で切り欠き部分は 50×50cm, 総節点数は 1281 で

ある。解析結果を図-13 に示した。縦軸は  $y=50\text{cm}$  線上の  $x$  方向応力 ( $\sigma_x$ ) をとり、横軸は  $y=50\text{cm}$  線上の  $x$  座標である。



$E=210000\text{N/mm}^2$ ,  $\nu=0.3$

図-12 引張りを受ける L 型平板

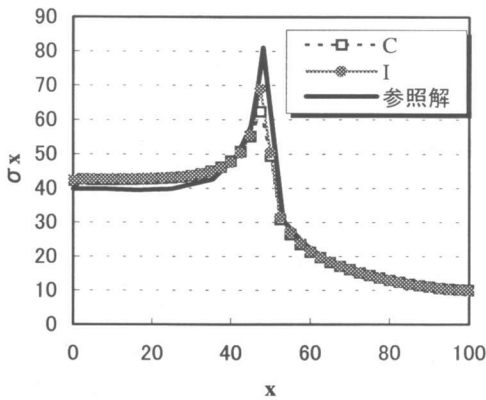


図-13 応力変化の比較

図-13 から、モデルの中央付近、切り欠き部の角にあたる領域で、応力が集中して高くなっていることが確認できる。定ひずみ三角形要素、回転自由度を有する三角形要素ともに同じような形で応力が変化している。しかし、回転自由度を有する三角形要素は応力がピークに達する点で、若干ではあるが定ひずみ三角形要素に比べ、値が上昇しているのが解る。

参照解<sup>6)</sup>を含めて比較すると、回転自由度を有する三角形要素は応力集中部での値を改善していると考えられる。

## 5. 結論

本研究は 6 節点三角形アイソパラメトリック要素を、回転自由度を有する三角形要素に変換し、FMM の高精度化を図る方法を示した。解析例として梁・ラーメンの解析例を示したが、回転自由度を有する三角形要素は定ひずみ三角形要素よりも高精度であることが分かった。また、切り欠きのある板の応力集中問題でも良好な結果を示した。

## 参考文献

- 1) 矢川元基, 酒井譲: メッシュレス計算手法, 機械の研究, 第 49 巻第 1 号, pp.103-110, 1997
- 2) 富山潤, 伊良波繁雄, 矢川元基, 矢吹哲哉: フリーメッシュ法によるコンクリートの引張破壊挙動の解析, コンクリート工学論文集, 第 11 巻第 1 号, pp.29-38, 2000
- 3) 松本洋, 伊良波繁雄, 富山潤, 矢川元基: 簡単な画像処理を用いたフリーメッシュ法の 2 次元問題への適用, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.21, No.3, pp.31-36, 1999
- 4) 島袋佳, 富山潤, 伊良波繁雄, 矢川元基: 並列計算を用いたフリーメッシュ法によるコンクリートの引張破壊解析, コンクリート工学年次論文集, Vol.22, No.3, pp.139-144, 2000
- 5) 前田重行, 渡部正則, 武田洋: 面内回転自由度を有する平面応力要素に関する考察, 構造工学における数値解析シンポジウム論文集 第 15 巻, pp.139-144, 1991
- 6) ツェンキーヴィツ.O.C: マトリックス有限要素法, 矢川監訳, 科学技術出版社, 1996
- 7) 大地洋三: 有限要素法とその応用, 森北出版社, 1975