

# 論文 補強材の付着すべりを考慮したプレストレスト・コンクリート・チモシェンコ梁の材料非線形解析

越川 武晃<sup>\*1</sup>・上田 正生<sup>\*2</sup>・内山 武司<sup>\*3</sup>・和田 俊良<sup>\*4</sup>

**要旨**：本研究は、著者らが既に報告済みの補強材の付着すべりを考慮したPC梁部材の材料非線形解析手法を、スパンー梁丈比が比較的小さな梁部材の場合に無視し得なくなる横せん断変形の影響をも考慮し得るように発展させた荷重増分法に基づく矩形断面を有するPC梁部材の材料非線形曲げ解析法について報告するものである。即ち、まずこの問題に対する全ポテンシャル・エネルギー汎関数を導き、次いで、これを用いて有限要素法への定式化を行っている。更に、本解析値と著者らのPC梁の実験結果および既往の実験結果との比較により、本解析法の妥当性を検証している。

**キーワード**：PC梁部材、横せん断変形、付着すべり、材料非線形解析、有限要素法

## 1. はじめに

材料非線形領域にあるコンクリート(RC・PC)梁部材において、補強材とコンクリート間の「付着すべり」現象が生じることは古くから知られていたが、その曲げ解析のための基礎理論は、つい近年に至るまで、補強材とコンクリート間の「完全付着の仮定」によって得られたものであった。

これらの現状を踏まえ、著者らの一人は、既往の研究において、補強材の付着すべりを考慮したPC梁部材の材料非線形解析法について報告している<sup>1)</sup>。本論文は、先の解析法を、梁の横せん断変形の影響をも考慮し得るように更に発展させた、PC梁部材の材料非線形曲げ解析について述べたものである。本報では更に本解析手法の妥当性を調べるため、著者らが新たに実施したPC梁の実験ならびに既往の梁の実験値との比較・検討を行っている。

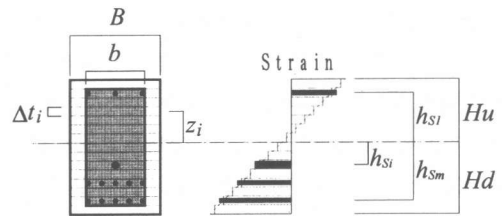


図-1 積層要素の断面記号

## 2. 基本仮定事項

付着すべりを考慮したPCチモシェンコ梁部材の材料非線形解析のために用いた基本仮定事項は以下のとおりである。

- (1) 梁は矩形断面を有し、軸力と曲げが作用するものとする。また、梁には平面保持の仮定に基づく微小変形理論が適用できるものとする。但し、横せん断変形の影響を考慮するものとする。
- (2) 解析には有限要素解析を用いるものとし、

\*1 北海道大学大学院 工学研究科社会基盤工学専攻 (正会員)

\*2 北海道大学大学院助教授 工学研究科社会基盤工学専攻 工博 (正会員)

\*3 北海道大学大学院教授 工学研究科社会基盤工学専攻 工博 (正会員)

\*4 北海道職業能力開発大学校講師 建築科 工博 (正会員)

PC 梁部材の断面を図-1に示すごとく梁丈方向に層状 ( $n$  層) に仮想分割して取り扱う積層要素で表示する。

(3) 積層表示された部材断面は、スターラップ内のコンクリートのコンファインド効果をも考慮可能にするため、更にサブ分割して取り扱うこととする。

(4) 各層の補強材とコンクリートの間には、材軸方向の付着すべりが生じ得るものとし、ある位置における個々の補強材層のすべり変位は、平面が保持されるその位置のコンクリート部分からの相対変位で表示でき、また、付着応力  $\tau_{bi}$  とすべり変位  $S_i$  の間には、区間線形関係が成立するものとする。

(5) 梁要素内の個々のコンクリート層と補強材層の材料性状は、各要素の各層ごとに、その歪履歴の状態に応じて各解析ステップにおいて変化するが、個々の層内では、各層の中央位置の値で評価される一定の性状を有するものとする。

(6) 非線形解析手法としては、接線剛性を用いた荷重増分法を採用することにし、各荷重ステップごとに繰り返し計算によって解を求める。

### 3. 材料性状の仮定と構成関係

図-2, 図-3および図-4は、解析に用いたコンクリートと補強材の材料性状、および補強材とコンクリート間の付着応力とすべりの構成関係を掲げたものである。なお、これらは既報告<sup>1)</sup>で使用したものと同じである。

## 4. 変位場、および歪増分と応力増分

### 4.1 変位場

上記の仮定に基づき、この問題を定式化するために設定しなければならない変位場は、梁の基準軸上の材軸方向の変位  $u$  と、鉛直方向の変位  $w$ 、梁の平均せん断回転角  $\beta$ 、および梁断面内に  $m$  層配筋されている補強材層のすべり変位  $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_m$  の計  $(3 + m)$  個の変位である。材料非線形解析に当たっては、これらは増分形式で表示されることになる。

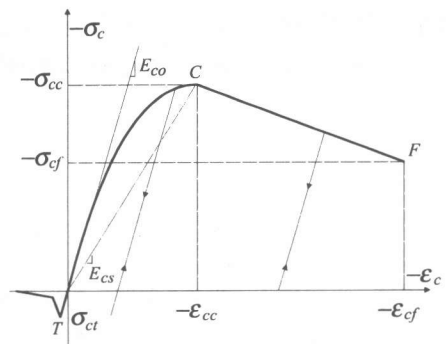


図-2 コンクリートの応力-歪関係

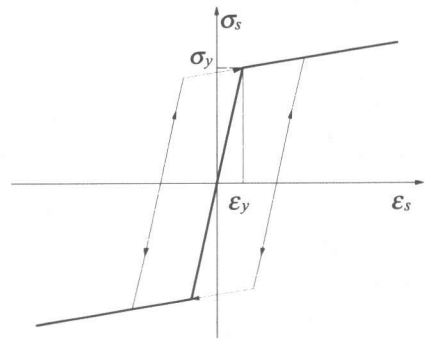


図-3 補強材の応力-歪関係

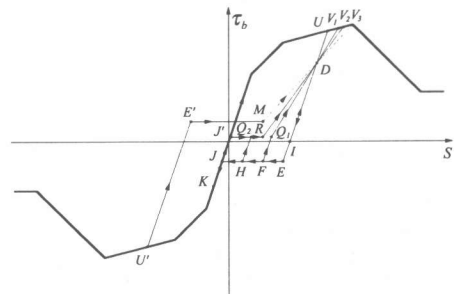


図-4 付着応力-すべり関係

### 4.2 コンクリートの歪増分と応力増分

$x$  軸 (材軸) から  $z_i$  だけ離れた任意のコンクリート薄層  $i$  の歪増分  $\Delta \varepsilon_{ci}$  は、次式で表される。

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{ci} &= \Delta \varepsilon_o + z_i \Delta \phi \\ &= \frac{d\Delta u}{dx} + z_i \left( -\frac{d^2 \Delta w}{dx^2} + \frac{d\Delta \beta}{dx} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

但し、 $\Delta \varepsilon_o$  : 梁の軸方向歪増分

$\Delta \phi$  : 梁の曲率の増分量

従って、同位置のコンクリート層  $i$  の応力増

分  $\Delta\sigma_{ci}$  は、スターラップの内と外では異なり以下のように表示される。

$$\Delta\sigma_{ci} = \begin{cases} E_{gi}\Delta\varepsilon_{ci} & (\text{スターラップ内}) \\ E_{ci}\Delta\varepsilon_{ci} & (\text{スターラップ外}) \end{cases} \quad (2)$$

但し、 $E_{gi}$ 、 $E_{ci}$ ：それぞれスターラップ内および外のコンクリート層  $i$  の接線ヤング係数

### 4.3 補強材の歪増分と応力増分

梁断面内に  $m$  層存在する補強材のうちの任意の  $i$  層を考える。ある位置におけるこの補強材の歪増分  $\Delta\varepsilon_{si}$  は、次のように表示することができる。

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{si} &= \Delta\varepsilon_0 + h_{si}\Delta\phi + \Delta\varepsilon_{ssi} \\ &= \frac{d\Delta u}{dx} + h_{si}\left(-\frac{d^2\Delta w}{dx^2} + \frac{d\Delta\beta}{dx}\right) \\ &\quad + \frac{d\Delta S_i}{dx} \end{aligned} \quad (3)$$

但し、 $h_{si}$ ：補強材層  $i$  の  $x$  軸からの鉛直距離

$\Delta\varepsilon_{ssi}$ ：補強材層  $i$  のすべり率の増分量

従って、同じ位置の  $i$  層の補強材の応力増分  $\Delta\sigma_{si}$  は、

$$\Delta\sigma_{si} = E_{si}\Delta\varepsilon_{si} \quad (4)$$

但し、 $E_{si}$ ： $i$  層の補強材の接線ヤング係数

### 4.4 せん断歪増分とせん断応力増分

コンクリート断面の  $i$  層のせん断歪増分  $\Delta\gamma_{xi}$  は、増分平均せん断回転角  $\Delta\beta$  を用いて、次式のように表される。

$$\Delta\gamma_{xi} = \frac{5}{4} \left(1 - \frac{4z_i^2}{t^2}\right) \Delta\beta \quad (5)$$

但し、 $t$ ：梁丈

従って、コンクリート断面の任意の  $i$  層のせん断応力増分  $\Delta\tau_{xi}$  は、

$$\Delta\tau_{xi} = \begin{cases} G_{gi}\Delta\gamma_{xi} & (\text{スターラップ内}) \\ G_{ci}\Delta\gamma_{xi} & (\text{スターラップ外}) \end{cases} \quad (6)$$

但し、 $G_{gi}$ 、 $G_{ci}$ ：それぞれスターラップ内および外のコンクリート層  $i$  の接線せん断弾性係数

### 4.5 補強材のすべり増分変位と付着応力増分

任意の  $i$  層の補強材の付着境界に生じる付着応力増分  $\Delta\tau_{bi}$  とすべり増分変位  $\Delta S_i$  の間には、次の関係が成立する。

$$\Delta\tau_{bi} = K_{bi}\Delta S_i \quad (7)$$

但し、 $K_{bi}$ ： $i$  層の補強材の接線付着係数

## 5. 材料非線形解析のための定式化

### 5.1 積層要素のための増分汎関数

積層表示された補強材の付着すべりを考慮した PC チモシェンコ梁部材のための増分表示された全ポテンシャル・エネルギー汎関数  $\Delta\Pi$  は、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \Delta\Pi &= \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \sum_{i=1}^n \Delta t_i \{(B_i - b_i) E_{ci} + b_i E_{gi}\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} \right\} \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 \\ &\quad - 2 \left\{ \sum_{i=1}^n \Delta t_i \{(B_i - b_i) E_{ci} + b_i E_{gi}\} z_i \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_{si} \right\} \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right) \left( \frac{d^2\Delta w}{dx^2} \right) \\ &\quad + 2 \left\{ \sum_{i=1}^n \Delta t_i \{(B_i - b_i) E_{ci} + b_i E_{gi}\} z_i \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_{si} \right\} \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right) \left( \frac{d\Delta\beta}{dx} \right) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right) \left( \frac{d\Delta S_i}{dx} \right) \\ &\quad + \left\{ \sum_{i=1}^n \Delta t_i \{(B_i - b_i) E_{ci} + b_i E_{gi}\} z_i^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_{si}^2 \right\} \left( \frac{d^2\Delta w}{dx^2} \right)^2 \\ &\quad - 2 \left\{ \sum_{i=1}^n \Delta t_i \{(B_i - b_i) E_{ci} + b_i E_{gi}\} z_i^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_{si}^2 \right\} \left( \frac{d^2\Delta w}{dx^2} \right) \left( \frac{d\Delta\beta}{dx} \right) \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} h_{si} \left( \frac{d^2\Delta w}{dx^2} \right) \left( \frac{d\Delta S_i}{dx} \right) \\ &\quad + \left\{ \sum_{i=1}^n \Delta t_i \{(B_i - b_i) E_{ci} + b_i E_{gi}\} z_i^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_{si}^2 \right\} \left( \frac{d\Delta\beta}{dx} \right)^2 \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} h_{si} \left( \frac{d\Delta\beta}{dx} \right) \left( \frac{d\Delta S_i}{dx} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} \left( \frac{d\Delta S_i}{dx} \right)^2 \\
& + \frac{25}{16} \sum_{i=1}^n \Delta t_i \{ (B_i - b_i) G_{ci} + b_i G_{gi} \} \\
& \quad \times \left( 1 - \frac{8z_i^2}{t^2} + \frac{16z_i^4}{t^4} \right) \Delta\beta^2 \\
& + \sum_{i=1}^m A_{bsi} K_{bi} \Delta S_i^2 \Big] dx \\
& - \int_0^L \left\{ \Delta P_u \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right) + \Delta q_z \Delta w \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^m \Delta P_{si} \left( \frac{d\Delta S_i}{dx} \right) \right\} dx \quad (8)
\end{aligned}$$

但し、 $L$ : 要素長、 $\Delta t_i$ : コンクリート薄層  $i$  の厚さ、 $B_i$ : コンクリート層  $i$  の梁幅、 $b_i$ : コンクリート層  $i$  のスターラップ内断面の幅、 $A_{si}^*$ :  $i$  層の補強材の換算断面積で  $A_{si}^* = A_{si} \left( 1 - \frac{E_{gi}}{E_{si}} \right)$ 、 $A_{si}$ :  $i$  層の補強材の断面積、 $A_{bsi}$ :  $i$  層の補強材の単位長さ当たりの付着表面積、 $\Delta P_u$ : 材軸方向の分布増分外力、 $\Delta q_z$ : 鉛直方向の分布増分荷重、 $\Delta P_{si}$ :  $i$  層の補強材の増分緊張荷重

## 5.2 PC 梁要素の変位関数と歪

図-5 は、本論文で使用する PC 梁要素の概念図を示したものである。この要素の設定変位増分  $\Delta u, \Delta w, \Delta\beta, \Delta S_i$  (但し、 $i = 1 \sim m$ ) の各増分変位の変位関数は、それぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned}
\Delta u &= [1 \ x] \left\{ \alpha_{u0} \ \alpha_{u1} \right\}^T \\
&= [f_u] \{ \alpha_u \} \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta w &= [1 \ x \ x^2 \ x^3] \left\{ \alpha_{w0} \ \alpha_{w1} \ \alpha_{w2} \ \alpha_{w3} \right\}^T \\
&= [f_w] \{ \alpha_w \} \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\beta &= [1 \ x] \left\{ \alpha_{\beta 0} \ \alpha_{\beta 1} \right\}^T \\
&= [f_\beta] \{ \alpha_\beta \} \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta S_i &= [1 \ x] \left\{ \alpha_{S_i 0} \ \alpha_{S_i 1} \right\}^T \\
&= [f_{S_i}] \{ \alpha_{S_i} \} \quad (12)
\end{aligned}$$

但し、 $\{ \alpha_u \}, \{ \alpha_w \}, \{ \alpha_\beta \}, \{ \alpha_{S_i} \}$ : 各増分変位  $\Delta u, \Delta w, \Delta\beta, \Delta S_i$  に関する一般化変位 (但し、 $i = 1 \sim m$ )

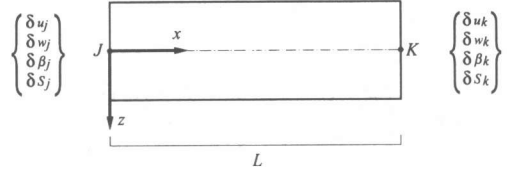


図-5 PC 梁要素

従って、これらの変位の導関数である各歪の有限要素表示は、以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\Delta u' &= \frac{d\Delta u}{dx} = [0 \ 1] \{ \alpha_u \} \\
&= [f'_u] \{ \alpha_u \} = [f'_u] [C_u^{-1}] \{ \delta u \} \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta w' &= \frac{d\Delta w}{dx} = [0 \ 1 \ 2x \ 3x^2] \{ \alpha_w \} \\
&= [f'_w] \{ \alpha_w \} = [f'_w] [C_w^{-1}] \{ \delta w \} \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta w'' &= \frac{d^2\Delta w}{dx^2} = [0 \ 0 \ 2 \ 6x] \{ \alpha_w \} \\
&= [f''_w] \{ \alpha_w \} = [f''_w] [C_w^{-1}] \{ \delta w \} \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\beta' &= \frac{d\Delta\beta}{dx} = [0 \ 1] \{ \alpha_\beta \} \\
&= [f'_\beta] \{ \alpha_\beta \} = [f'_\beta] [C_\beta^{-1}] \{ \delta\beta \} \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta S_i' &= \frac{d\Delta S_i}{dx} = [0 \ 1] \{ \alpha_{S_i} \} \\
&= [f'_{S_i}] \{ \alpha_{S_i} \} = [f'_{S_i}] [C_{S_i}^{-1}] \{ \delta S_i \} \quad (17)
\end{aligned}$$

但し、 $\{ \delta u \}, \{ \delta w \}, \{ \delta\beta \}, \{ \delta S_i \}$ : 各変位  $u, w, \beta, S_i$  に関する増分節点変位ベクトル (但し、 $i = 1 \sim m$ )

## 5.3 増分表示された有限要素方程式

先の式 (8) の全ポテンシャル・エネルギー汎関数に上で設定した変位関数を代入し、各増分節点変位ベクトル  $\{ \delta u \}, \{ \delta w \}, \{ \delta\beta \}, \{ \delta S_i \}$  (但し、 $i = 1 \sim m$ ) に関して変分をとり整理すると、この問題に対する増分表示された有限要素方程式が得られ、下式となる。

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uw} & K_{u\beta} & K_{us} \\ K_{uw}^T & K_{ww} & K_{w\beta} & K_{ws} \\ K_{u\beta}^T & K_{w\beta}^T & K_{\beta\beta} & K_{\beta s} \\ K_{us}^T & K_{ws}^T & K_{\beta s}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta w \\ \delta\beta \\ \delta S_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta P_u \\ \delta P_w \\ 0 \\ \delta P_{S_i} \end{bmatrix} \quad (18)$$

但し、 $\{ \delta S_i \}$ : すべての補強材の節点すべり変位  $S_i$  に関する増分節点変位ベクトル

## 5.4 非線形解析手法

外荷重の増加につれて、コンクリートと補強

材の非線形性に起因して、各荷重増分ステップごとに、それぞれに対応する様々な非釣り合い応力が生ずることになる。これらは初期応力とみなされ、仮想仕事の原理を用いて等価節点荷重に変換され、収束条件を満たすまで繰り返し計算によって解析が行われることになる。

## 6. 数値計算例

ここでは、本報で展開した補強材の付着すべりを考慮したPCチモシェンコ梁部材の材料非線形解析法の妥当性を明らかにするため、本解析法による数値計算例を掲げ、当研究室で実施した実験および既往の実験結果との比較・検討を行うこととする。

### 6.1 著者らのPC梁の実験値との比較

図-6に、著者らが荷重実験を実施した一連のPC梁試験体のうちの一体を取り上げ、その断面寸法と概要を、使用材料の材料性状とともに掲げる。この図から分かるように、矩形断面を有するこの試験体のスパン-梁丈比は、横せん断変形の影響を無視し得ない4.58と比較的小さくなっている。この梁の荷重実験においては、最大耐力付近まで単調荷重した後、荷重が0となるまで除荷し、この間の梁の一連の挙動の計測を行った。ここでは先ず、このPC梁試験体を対象にして解析を行ってみる。

図-7は、このPC梁の実験結果と解析値をスパン中央点の荷重-たわみ曲線 ( $P-\delta$  曲線) で比較したものである。この図の結果からも知り得るように、本解析値は、PC梁特有の除荷後の変形回復をも含めて、梁の全体的な荷重-変形応答をかなり良好な精度で追跡可能なことを示している。

図-8には、この試験体端部におけるPC鋼材にかかる緊張力の推移を比較して図示してある。なお、この図における実験値は試験体両端に設置したロードセルより得られた値である。この結果より、本解析値は図-7におけるPC梁の変形挙動に対応した値となっており、最大荷重時の緊張力が実験値より若干高めに評価されているが、全

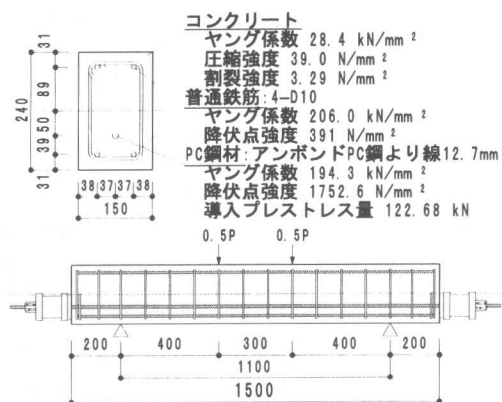


図-6 PC梁の概要と材料性状

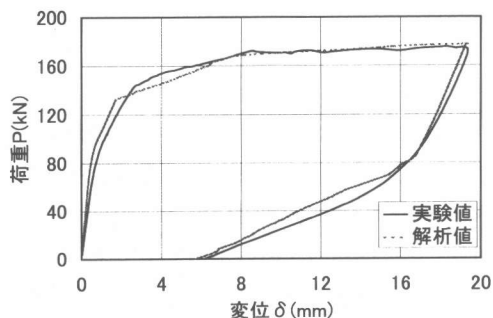


図-7 スパン中央点の  $P-\delta$  曲線の比較

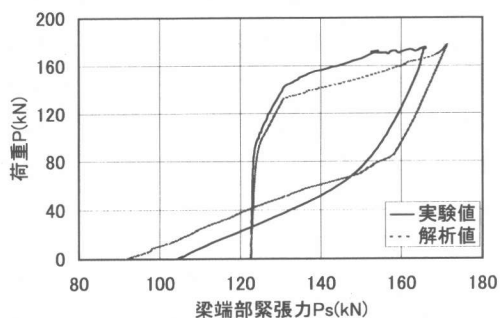


図-8 梁端部における緊張力推移の比較

体的な傾向をおおむね捉えていることが分かる。

### 6.2 高らの実験値<sup>3),4)</sup>との比較

図-9に、高らの行った緊張鋼材の種類異なる2種類のPC梁試験体(試験体名P-1, P-2)の概要と材料性状を示す。両試験体とも幅300mm, 丈400mm, 全長2600mmの矩形断面を有するPC梁であり、緊張材としては試験体P-1には

丸棒のPC鋼棒を、試験体P-2には付着の良い異形PC鋼棒を用いそれぞれグラウトを施している。

図-10、図-11には、それぞれ試験体P-1およびP-2の-span中央点における荷重-変位曲線(P-δ曲線)を、高らの実験値と本解析値とを比較して示した。これらの結果からも知り得るように、付着性状の異なるこの2種類の試験体の両方ともに初期剛性や最大耐力など、本解析値は高らの実験曲線に比較的良好に追従しており、本解析法がPC梁部材の材料非線形挙動を十分な精度で追跡可能なことを示唆している。

### 7. まとめ

本論文では、「コンクリートと補強材間に付着すべりを許した場合の横せん断変形を考慮したPC梁部材の材料非線形解析」について論じた。即ち、この問題のための全ポテンシャル・エネルギー汎関数を導き、それらを用いて有限要素法への定式化を行った。更に、本解析法による数値計算例を掲げ、著者らの行ったPC梁の実験および既往の実験結果との比較により、本解析法の有用性を明らかにした。今後は、この解析法をPCフレームの短期繰返し荷重-変形応答解析、更には長期変形解析へと拡張・発展させる予定である。

### 参考文献

- 1) 例えば、松倉満智子, 上田正生, 内山武司, 土橋由造: 緊張鋼材の付着すべりを考慮したプレストレストコンクリート梁部材の材料非線形解析, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.17, No.2, pp.709-712, 1995
- 2) 森田司郎, 角徹三: 繰返し荷重下における鉄筋とコンクリート間の付着特性に関する研究, 日本建築学会論文報告集, 第229号, pp.15-24, 1975.3
- 3) 楊成旭, 塩原等, 小谷俊介: 緊張材の付着滑りを考慮したプレストレスト鉄筋コンクリート

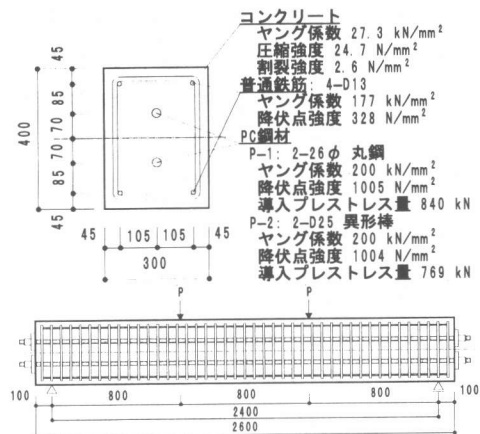


図-9 高らのPC梁(P-1,P-2)の概要と材料性状

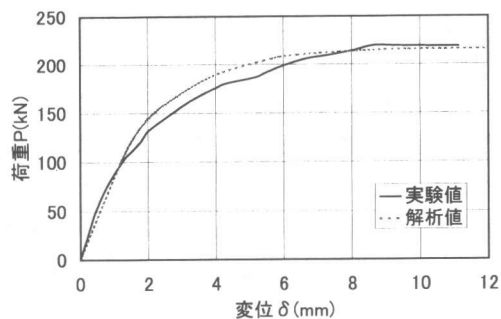


図-10 試験体P-1のP-δ曲線の比較

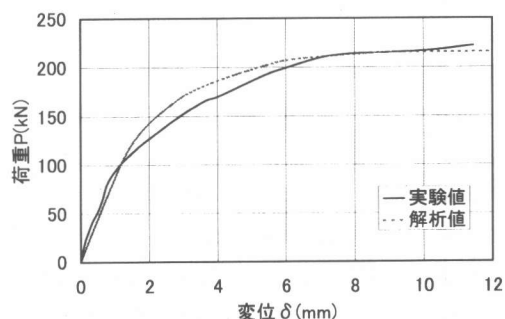


図-11 試験体P-2のP-δ曲線の比較

部材の非線形解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集(関東), C-2, pp.1029-1030, 1998.9

- 4) 高湜, 塩原等, 小谷俊介: プレストレストコンクリートはりの曲げモーメント・曲率に関する実験, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.19, No.2, pp.69-74, 1997