

# 論文 長大スパンコンクリートアーチ橋の不安定挙動に関する解析的研究

谷口 勝彦\*1・田邊 忠顕\*2

**要旨:** 長大化するコンクリートアーチ橋の構造上の問題点がどこに存在するかを解析的に評価するために、材料的非線形性、幾何学的非線形性、せん断変形および非線形領域での2軸曲げを考慮に入れた有限変形はり要素の定式化を用いて、実存する最長スパンを大きく超える600mスパンコンクリートアーチ橋の解析を行った。さらに、固有値解析を通して構造不安定問題の検討を行った。

**キーワード:** bifurcation point, 固有値解析, 長大スパンコンクリートアーチ橋

## 1. はじめに

コンクリートアーチ橋は、アーチ構造の力学的特性とコンクリートの材料特性が効果的に組み合わせられた非常に合理的な構造であり、独特の景観美を有すること、さらに設計施工技術の発達により、近年、架設が活性化している。現在、我が国にはスパンが200mを超えるコンクリートアーチ橋が建設中のものを含め5橋存在し、今後の設計施工技術の発展を考えると、さらなる長大化が予想される。一方、耐震設計との関連からみれば、長大アーチ橋が大地震の際にどのような挙動を示すのか必ずしも明確でないことから、長大アーチ橋の耐震設計は今後の大きな課題の一つにもなっている。本研究では上記の問題に対処するため、せん断変形および非線形領域での2軸曲げを考慮に入れた3次元12自由度はり要素の非線形有限変形の定式化を用いた手法を明らかにすると同時に、実存する最長スパンを大きく超える600mスパンコンクリートアーチ橋に適用した。さらに、構造不安定問題に対する検討を行い、固有値解析を通して、解析上の構造特異点(bifurcation point)で起こりうる現象を推定した。

## 2. 非線形有限変形問題に対する解析理論

### 2.1 はり要素剛性の定式化

3次元12自由度はり要素を図-1に示す座標系に置き、せん断変形を考慮したはり要素剛性の定式化を考える。X, Y, Z方向の各々の変位増分 $U(x, y, z)$ ,  $V(x, y, z)$ ,  $W(x, y, z)$ を曲げ変形成分およびせん断変形成分を用いて以下のよ

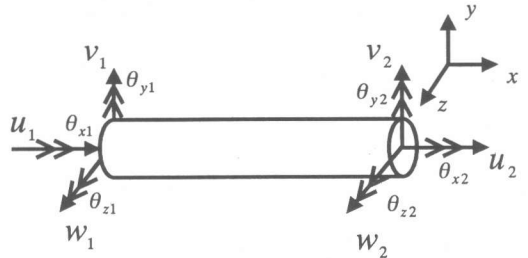


図-1 3次元12自由度はり要素

うに表す。この時、Timoshenkoはり理論に基づき断面は変形後も平面を保つと仮定している。

$$U(x, y, z) = u + y \frac{\partial v_b}{\partial x} - z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (1)$$

$$V(x, y, z) = v_b + v_s \quad (2)$$

$$W(x, y, z) = w_b + w_s \quad (3)$$

$u$  : 軸力による軸方向変位増分

$v_b, w_b$  : 曲げによるたわみ変位増分

$v_s, w_s$  : せん断力によるたわみ変位増分

式(1)~(3)に示した変位場を用いると、軸ひずみ、せん断ひずみ成分は、次式で与えられる。

\*1 名古屋大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (正会員)

\*2 名古屋大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 工博 (正会員)

$$\varepsilon_x = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial v_b}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v_s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \quad (6)$$

ここで、はり要素の有限変形理論による仮想仕事方程式を考える。ある荷重状態においてははり要素に生じている応力、ひずみ、変位および表面力  $f$  を上付き文字 0 で表し、微小な荷重増分により生じる応力、ひずみ、変位、表面力の各増分、式(4)~(6)を用いると、せん断変形を考慮したはり要素に対し、次式の仮想仕事方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} \delta W = & \iiint \left\{ \sigma_x^0 + \sigma_x \right\} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right) \\ & + \left( \tau_{xy}^0 + \tau_{xy} \right) \delta \left( \frac{\partial v_s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ & + \left( \tau_{zx}^0 + \tau_{zx} \right) \delta \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ & + \left( \tau_{yz}^0 + \tau_{yz} \right) \delta \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \Big\} dV \\ & + \iint \frac{1}{2} \left\{ \sigma_x^0 \delta \left( \frac{\partial v_b}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & \left. + \sigma_x^0 \delta \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \right\} dV \\ & - \iint \left\{ f_x^0 + f_x \right\} \delta u + \left\{ f_y^0 + f_y \right\} \delta v + \left\{ f_z^0 + f_z \right\} \delta w \Big\} \end{aligned} \quad (7)$$

さらに、各変位増分およびその変位関数を用いることにより、はり要素の剛性方程式が得られ、次のようになる。

$$([K] + [K_g]) \{ \delta d \} = \{ \delta F \} + \{ \delta F_r \} \quad (8)$$

ここで、 $\{ \delta F_r \}$  は増分荷重を与える以前の状態における釣合方程式が完全に満たされないために生じる不平衡力ベクトルである。また、 $[K]$  は構造物の微小変位剛性マトリクス、 $[K_g]$  は幾何剛性マトリクスであり、 $([K] + [K_g])$  により、剛性マトリクスが得られる。

## 2.2 安定性の解析

本研究では、構造不安定問題を検討するために、固有値解析を行う。静的平衡状態にある構造物の安定条件をマトリクス表示に書き換えると、次式のようなになる<sup>1)</sup>。

$$\begin{aligned} & \iiint \left( \{ \varepsilon \}^T [ \sigma ] \{ \varepsilon \} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\}^T [ \sigma^0 ] \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \right) dV \\ & - \{ \dot{u} \}^T \iiint \left( [T]^T [B]^T [D] [B] [T] \right. \\ & \quad \left. + [T]^T [N]^T [ \sigma^0 ] [N] [T] \right) \mu V \{ \dot{u} \} \\ & - \{ \dot{u} \}^T \{ [K] + [K_g] \} \{ \dot{u} \} > 0 \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)がゼロに等しくなったとき、変形状態が臨界点 (critical point) に至ったことを意味する。

$$\{ \dot{u} \}^T \{ [K] + [K_g] \} \{ \dot{u} \} = 0 \quad (10)$$

ただし  $[K]$  および  $[K_g]$  は各変形段階の接線剛性を評価している。式(10)の十分条件は、

$$\det \{ [K] + [K_g] \} = 0 \quad (11)$$

であり、固有値を用いれば、次のように表すことができる。

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = 0 \quad (12)$$

ここで、 $\lambda_i$  は接線剛性マトリクス  $[K] + [K_g]$  の固有値である。式(12)は、少なくとも 1 つの固有値がゼロであることを示している。本研究では、式(12)を用いて、固有値が正から負に変わるところを臨界点と判断している。

臨界点は、limit point と bifurcation point の 2 つに分類することができる。増分形の方程式、式(12)を利用して臨界点の分類を行う。

$$[K] \{ \dot{d} \} = \dot{\mu} \{ f \} \quad (13)$$

$\{ f \}$  : 荷重ベクトル

$\{ \dot{d} \}$  : 変位増分

$\dot{\mu}$  : 荷重パラメーターの増分

接線剛性マトリクスが  $n$  個の固有ベクトル  $\{ v_i \}$  を持つと仮定し、式(13)を対角化する。

$$[v_i]^T [K] [v_i] [v_i]^T \{ \dot{d} \} = \dot{\mu} [v_i]^T \{ f \} \quad (14)$$

剛性マトリクスと固有値、固有ベクトルの関

係は,  $[K][v_i] = \lambda_i \{v_i\}$  であり, これを式(14)に代入し固有ベクトルの直交性を考えれば,

$$\lambda_i [v_i]^T \{d\} - \dot{\mu} [v_i]^T \{f\} = 0 \quad (15)$$

が全ての固有ベクトルに対して成立する.

式(12)より, 臨界点においては少なくとも1つの固有値がゼロであるため, 今, 問題を簡単にするため  $\lambda_1$  だけがゼロの場合を考える. このとき, 式(14)が成立するためには, 次式が満足されなければならない.

$$\dot{\mu} [v_1]^T \{f\} = 0 \quad (16)$$

式(16)が成立するためには, 次の2式のうち必ずどちらか1つが満足されなければならない.

$$\dot{\mu} = 0 \quad \text{or} \quad \{v_1\}^T \{f\} = 0 \quad (17)$$

$\dot{\mu} = 0$  で定義される時点が limit point であり, 構造物に荷重を作用させたときの荷重-変位曲線の最大荷重点がそれにあたる. 荷重が最大荷重に達した後, 減少しながら, しかも変形が増大する不安定現象である. この不安定状態は, コンクリート自身の材料特性が不安定であるため, コンクリート分野においてはほとんどの場合見られる現象である.

$\{v_1\}^T \{f\} = 0$  で定義される時点が bifurcation point (分岐点) である. bifurcation point は固有ベクトルと荷重ベクトルが直交する関係にある点であり, fundamental path (基本的な変形経路) と異なる bifurcation path (分岐経路) の発端となる点である. bifurcation point では構造物が今までと全く異なる変形状態に移行する可能性が生じ, もし実際の構造物において, 破壊時に変形挙動が急変すると仮定すれば, bifurcation

point では破壊を数学的に定義し得る有力な臨界点であると推論される<sup>1)</sup>.

### 3. 材料モデル

#### 3.1 コンクリートモデル

コンクリートの応力-ひずみ関係を図-2に示す. コンクリートが圧縮を受ける場合には, ひずみが  $\epsilon_{c0}$  (圧縮強度時  $f_c$  のひずみ) に達するまで, 式(18)の2次曲線

$$\sigma = f_c \left\{ 2 \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}} \right) - \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c0}} \right)^2 \right\} \quad (18)$$

で応力が上昇し, それ以降は直線的に応力が減少するものとした. この時, 除荷時は初期勾配で応力が減少するものとし, 再載荷時も同様に初期勾配で応力が変化するものとした.

コンクリートが引張を受ける場合には, ひび割れ発生までは弾性体とし, ひび割れ発生後は, 応力が徐々に低減すると仮定した. 除荷, 再載荷時は原点に向かうものと仮定した.

#### 3.2 鉄筋モデル

鉄筋の応力-ひずみ関係は, 一般的なバイリニア型とし, 降伏強度に達するまでは弾性体, 応力が降伏応力到達後は, 初期勾配の 1/100 の傾きで応力が増加するものとした. また, 除荷, 再載荷時は初期勾配で応力が変化するものと仮定した.

### 4. 解析対象

#### 4.1 600m スパンアーチ橋の概観図

本解析で解析対象とした 600m スパンアーチ橋の概観図を図-3に示す. また, 比較のために我が国の最長スパンである富士川橋 (スパン

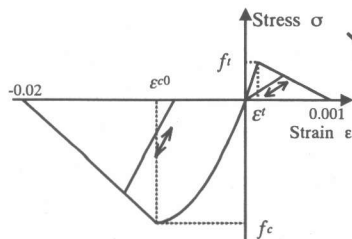


図-2 コンクリートモデル

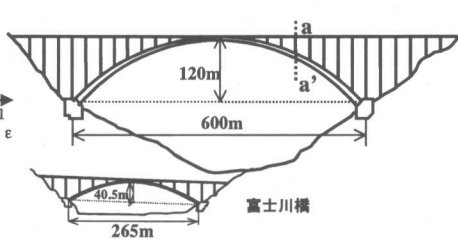


図-3 アーチ橋の概観図

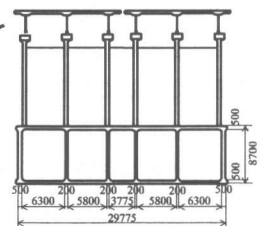


図-4 断面形状 (mm)

265m) の概観図も同様に図 - 3 に示す。600m のスパンは、世界最長の長江大橋(スパン 420m) に比べても 200m 近くスパンが長く、いかに長大であるかがわかる<sup>2)</sup>。

また、600m スパンアーチ橋は、(株)ピーエス、河村氏によって試設計的に概略計算されたものであり、詳細な設計はなされていない。アーチの軸線形状は、cosine hyperbolic 曲線関数で得られ、ライズは 120m となっている<sup>3)</sup>。

#### 4.2 600m スパンアーチ橋の断面形状

アーチリブの断面形状は、架設工法の違いにより 2 種類に分かれている。アーチスプリング部はトラス工法施工区間であり、図 - 4 に示すように 5 室 BOX 断面となっている(図 - 3, a-a 断面)。また、アーチクラウン部は CLCA 工法区間であり、4 室の BOX 断面となっている<sup>2)</sup>。断面の高さは、アーチスプリング部からアーチクラウン部にかけて 12m から 6m に一定の割合で減少している。

### 5. 耐荷力解析

#### 5.1 材料の諸元

本解析では、図 - 2 におけるコンクリート圧縮強度  $f_c$  は試設計に基づいた値を用い、60MPa とした。このときの軟化開始ひずみ  $\epsilon_{c0}$  は道路橋示方書が定める、帯鉄筋比による算定式を用いて  $4000\mu$  とした。また、鉄筋降伏強度は、引張と圧縮ともに 392MPa とした<sup>4)</sup>。

#### 5.2 解析概要

解析をするためには、有限はり要素による解析対象モデル化が必要である。本解析では、アーチリブと柱の接合部分ではり要素分割を行ったため、対象橋梁を図 - 5 に示すように 65 要素、46 節点でモデル化した。また、アーチリブ頂部を変位制御し、それ以外の節点には、死荷重の重量に比例した荷重が加わるように、頂部と同様に徐々に荷重を与えることとした。即ち、変位制御と荷重制御を混合している。境界条件はアーチリブの両端は完全固定とし、補剛桁端部は鉛直方向および橋軸回り(桁ねじり)方向は

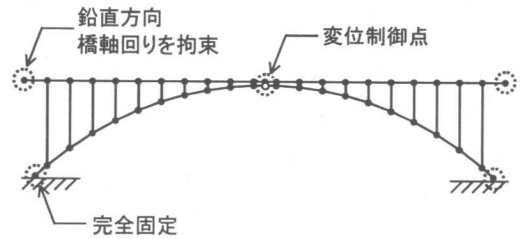


図 - 5 解析モデル

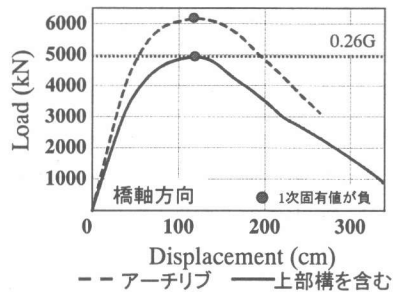
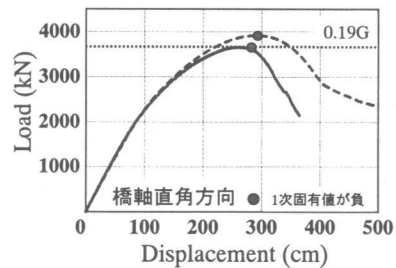
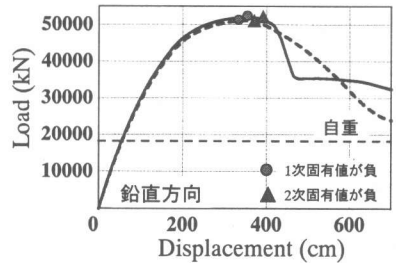


図 - 6 解析結果

拘束、その他の方向はすべてフリーとした。

#### 5.3 解析結果

600m スパンアーチ橋において、アーチリブ頂部を鉛直方向、橋軸直角方向および橋軸方向の 3 方向の変位を制御した場合のアーチリブ頂部の荷重-変位関係を、図 - 6 にそれぞれ示す。また、比較のためにアーチリブのみを解析対象とした場合のリブ頂部の荷重-変位関係も同一グラフ上に示した。橋軸直角方向および橋軸方

向では、自重載荷状態後に変位を制御している。

上部構を入れた解析において、鉛直荷重を載荷した場合には自重の約2.76倍、橋軸直角方向および橋軸方向では、それぞれ約0.19倍、0.26倍で最大耐荷力に達した。ここで、橋軸直角方向および橋軸方向において、上部構を入れた解析のほうがアーチリブのみを解析対象とした場合より耐荷力が低くなるのは、上路および鉛直材の節点にも死荷重の比率で荷重を与えているため、アーチリブのみの解析では発生し得ないモーメントなどがリブに伝わり、耐荷力を低くしていると考えられる。

## 6. 固有値解析

2.2節で述べたように、固有値がゼロ、数値解析では最初に負の固有値が生じる時点は2つに分類できる。それは最大荷重点に相当する limit point と、固有ベクトルと荷重ベクトルが直交する関係にある bifurcation point (分岐点)である。

故に、構造不安定性に対する考察は、負の固有値の存在を調べることで行うことができる。

図-6に示すように、3方向すべての方向において1つ目の負の固有値が発生した時点は、アーチリブのみ、および上部構を入れた解析ともに荷重-変位曲線の最大荷重点に対応しており、この点以降荷重が低下していく。したがって、この時点で limit point が定義され、1つの負の固有値は、荷重が低下する不安定な釣合経路上に構造物が存在することを示すものである。さらに、鉛直方向載荷においては、アーチリブのみ、および上部構を入れた解析ともに最大荷重点を過ぎた直後に2次の固有値が負となり、2つ目の負の固有値が発生したが、橋軸直角方向および橋軸方向ではその現象は見られなかった。以下の検討から、鉛直方向において、2つ目の負の固有値が発生した時点が bifurcation point であると考えられる。

鉛直方向載荷において、アーチリブのみの解

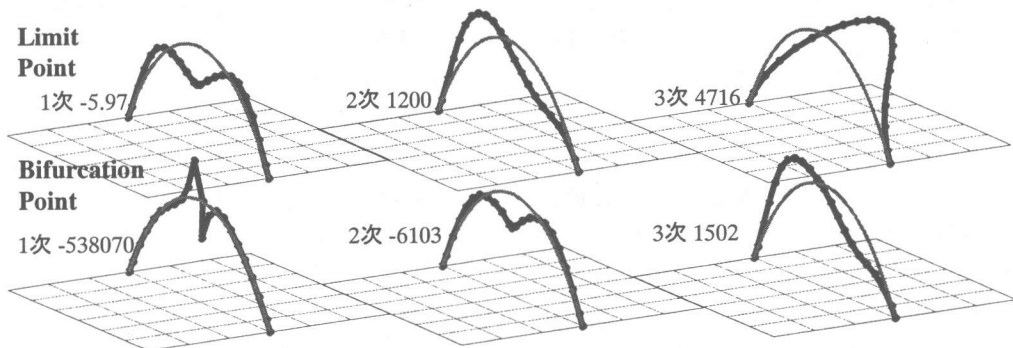


図-7 固有モード(アーチリブのみ)

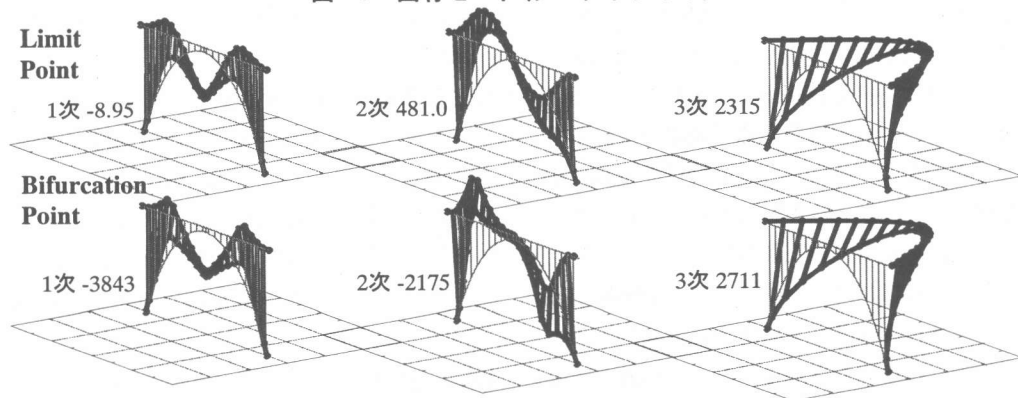


図-8 固有モード(上部構を含む)

析で得られた, limit point および bifurcation point に対する 3 次までの固有値および固有モードを 図 - 7 に, 上部構を入れた解析で得られたものを 図 - 8 にそれぞれ示す.

図 - 7 に示したアーチリブのみを解析対象とした場合の bifurcation point での 1 次固有モードに, limit point での固有モードとは全く異なる, 局部座屈的なモードが現れている. この新たに出現した 1 次モードが bifurcation point に対応する固有モードであり, この点から今までと全く異なる変形挙動に移行する可能性が生じると考えられる. しかし, 図 - 8 に示すように, 上部構を含めた解析における固有モードでは, bifurcation point での固有モードに新たなモードは発生せず, limit point での固有モードと同様なモードとなった. ここで, 数学的にこのモードを検討してみると, 1 次モードではなく 2 次モードが式(16)の固有ベクトルと荷重ベクトルが直交する関係を満たしていることが確認された. 以上のことから, 一般的には bifurcation point に対応するモードは 1 次モードに発生するとされているが, 本解析では, 2 次モードに発生することが示された.

## 7. アーチ橋への地震入力と対応する耐荷力に関する考察

本解析で得られた 600m スパンアーチ橋の各方向の固有周期は, 鉛直方向で 3.25(s), 橋軸直角方向および橋軸方向ではそれぞれ 6.70(s), 5.53(s)と, 各方向でかなりの長周期が得られた. この固有周期を用いて, 平成 7 年の兵庫県南部地震後に刊行された道路橋示方書のタイプ II, I 種地盤の設計水平震度の標準値より設計水平震度を求めると, 橋軸直角方向では 0.10G, 橋軸方向では 0.13G となる結果が得られた. ただし, この際の地域別補正係数は 1.0 とした<sup>4)</sup>.

本解析で得られた水平耐荷力と, 道路橋示方書から得られた設計水平震度を比較すると, 本解析で得られた橋軸直角方向および橋軸方向における 600m スパンアーチ橋の水平耐荷力は,

道路橋示方書より求めた設計水平震度を上回っていることが確認された. しかし, 現在の道路橋示方書が定める 0.6G の下限値の規定は満たしておらず, 地震動への対応なども含め, より一層の検討が必要である.

## 8. まとめ

試設計された 600m スパンアーチ橋の固有値解析を行った結果, 以下の結論が得られた.

- (1)せん断変形および非線形領域での 2 軸曲げを考慮に入れた 3 次元 12 自由度はり要素の非線形有限変形の定式化を用いて, 接線剛性マトリクスの固有値解析, 負の固有値に対するモードの検討などから, 長大アーチ橋の構造問題の解析手法を明らかにした.
- (2)試設計された 600m スパンアーチ橋の鉛直方向, 橋軸直角方向, 橋軸方向のそれぞれの耐荷力を評価した結果, 本研究で得られた水平耐荷力は, 現在の道路橋示方書が定める設計水平震度を上回っているが, 0.6G の下限値の規定は満たしておらず, さらに検討が必要であると思われる.
- (3)固有値解析を通しての構造不安定問題に対する検討の結果, 本解析では bifurcation point に対応するモードが 2 次モードにも発生する結果が得られた.

## 参考文献

- 1)中村光: コンクリート構造のポストピーク挙動に関する解析的研究, 名古屋大学博士論文, 1992
- 2)土木学会 構造工学委員会: コンクリート長大アーチ橋の設計・施工技術の現状と将来, 構造工学技術シリーズ No.19, 2000
- 3)姫野正太郎, 田邊忠顕: 長大スパンコンクリートアーチ橋の非線形動的解析, コンクリート工学年次論文報告集 Vo.21, No3, pp.385-390, 1999
- 4)日本道路協会: 道路橋示方書・同解説 V 耐震設計編, 丸善, 1997