論文　連続したマス-バネ系モデルを用いた連続高架橋構造物の伝達境界の定式化

李　相勳*1・田辺　忠顕*2

要　旨：コンクリート連続高架橋の振動解析において，半無限に連続する構造物の一部のみを取り出し，その両端を自由境界として取り扱っている場合が一般的であるが，実際には隣接する構造物との相互作用が必然的に生じると考えられる．それを考慮するにはエネルギー伝達境界が最適な方法として挙げられる．しかし，高架橋のような離散系についての伝達境界は，著者の知る限りでは我々の研究を除いて全く公表された研究はない．本論文では過去の三輪らの論文に鑑みて，更に基本的考察が必要と考えマス-バネが直列に連続する質点系のモデルを用いて，離散系構造物に対する伝達境界を定式化し，かつ理論的背景の考察を行った．

キーワード：エネルギー伝達境界，離散系構造物，コンクリート連続高架橋

1.　はじめに

新幹線などの鉄道橋や道路橋の連続高架橋においては鉄筋コンクリートまたは PC コンクリートの橋梁が多く作られている．特に，耐震の主な対象である下部構造の橋脚は，その複雑な構造が必要となる場合を除けば，コンクリート製が圧倒的に多いといえる．それらの長大構造物の地震応答解析における解析方法としては，解析対象とするものの一部を取り出してその両端を自由境界として取り扱っている場合が一般的である．しかし，実際には隣接する構造物との相互作用が必然的に生じると考えられる．それを考慮するにはエネルギー伝達境界が最適な方法として挙げられる．現在まで地盤の分野に関しては，半無限連続体としての地盤を対象に Lysmer らをはじめ [1)]，各種の伝達境界の設定方法が確立されている．しかし，高架橋のように，柱，はり部材及び格点からなる構造においては，地盤について成り立つような単純な波動解は適用できない．桁構造の伝達境界に関しては三輪らが定式化しているが [2)]，伝達境界に関しての明瞭な説明や検証は行われていない．さらに，連続高架橋（特に鉄筋コンクリート構造）の耐震性を正確に求めるにはエネルギー伝達境界が考慮に入った非線形解析が望ましい．本研究では，離散系に対する伝達境界の基本的性質を更に検討するため，もっとも簡単な 1 自由度をもつマス-バネ系モデルを用いて線形系と仮定し，無限連続体としての伝達境界を定式化し考察と検証を行った．さらにそれに基づいて地動を考慮するときの定式化に対して検討した．

2.　波動伝播の条件

コンクリート連続高架橋のような構造物における相互作用を考慮する境界条件を定式化するため，波動伝播の条件を定義する必要がある．本研究では明瞭な理解のため図-1 のような無限に続く一様なマス-バネ系モデルを考える．この中から任意の質点 $r-1, r, r+1$ を取り出し，質点 r に着目して運動方程式を立てると，次式となる．

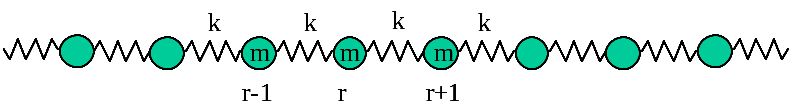

図-1　マス-バネ系モデル

*1 名古屋大学大学院　工学研究科　土木工学専攻　博士課程後期課程　（正会員）
*2 名古屋大学大学院教授　工学研究科　土木工学専攻　工博　（正会員）

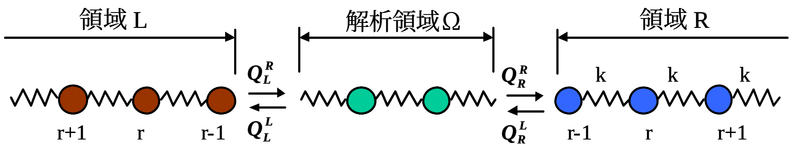

図-2　領域 L,R の境界面における節点力

$$-m\frac{d^2x_r}{dt^2}-(x_r-x_{r-1})k+(x_{r+1}-x_r)k=0 \quad (1)$$

この式は，考慮している無限のマス-バネ系のどの部分についても，r を変更することによって成り立つ式である．この式の変位は角振動数によって表すことができ[3)]，ある振動数ωに対し $x_r = uh^r e^{iwt}$ の波動解が存在すると仮定する．ここで，u は水平方向の複素変位振幅である．同様に r-1，r+1 番目の質点においても各々の波動解 $x_{r-1}=uh^{r-1}e^{iwt}$，$x_{r+1}=uh^{r+1}e^{iwt}$ が存在する．これらの解を式(1)に代入して整理すると，

$$\left\{h^2(-k)+h\left(-mw^2+2k\right)+(-k)\right\}u=0 \quad (2)$$

$u=0$ 以外の解を持つ条件から，角振動数ωに対して，$h^2(-k)+h(-mw^2+2k)+(-k)=0$ を満たす固有値 h を求めると，

$$h=\frac{(-mw^2+2k)\pm\sqrt{(mw^2-2k)^2-4k^2}}{2k} \quad (3)$$

式(3)から w と k/m との関係によって波動のタイプが次のように決められる．

（1）$w^2<4k/m$ の場合

この場合は根号の中が負になり h は複素数になる．したがって，指数関数 $h=a\cdot e^{\pm if}$ で表すことができる．ただし，

$$a=\sqrt{(\mathrm{Re}(h))^2+\mathrm{Im}(h)^2}\ ,\quad f=\cos^{-1}(\mathrm{Re}(h)/a)$$

よって，$x_r=u\cdot a^r e^{\pm irf}\cdot e^{iwt}=u\cdot a^r e^{i(wt\pm rf)}$　(4)

式(4)で表す波は x 方向に位相速度 w/f で伝播する定常な波である．指数部の符号は左から右方向が(-)である．

（2）$w^2=4k/m$ の場合

この場合は $h=-1$ であるので，$h=a$ と置くと，任意の質点変位 x_r は次のようになる．

$$x_r=u\cdot h^r e^{iwt}=u\cdot a^r e^{iwt} \quad (5)$$

これは，固有振動数で発生する波であり，standing wave と言う．図-1 のモデルではある質点と隣接する質点の位相が逆になるモードである．

（3）$w^2>4k/m$ の場合

この場合，h は 2 つの実数の解を持つ．また，その 2 つの解 h_1, h_2 は互いに逆数の関係にある．

∵　式(2)から $h^2+h(mw^2-2k)/k+1=0$

$\therefore h_1\cdot h_2=1$

従って，解 h は次のように表すことができる．

$$h=a\cdot e^{\pm f}$$

ただし，h の値は負になるので a は-1 となる．指数部の符号はケース(1)の場合と同様に左から右方向が(-)である．従って，

$$x_r=u\cdot a^r e^{\pm rf}\cdot e^{iwt} \quad (6)$$

これは伝播しない波であり，exponential mode と言う．以上の 3 つの波動タイプは，f の値の条件によって，式(4)の 1 つの式で表すことができる．ここで，a の役割は非常に重要である．そのときの伝播条件は次のようである．

- φが虚数の場合，$w^2>4k/m$：伝播しない．
- φが 0 の場合，$w^2=4k/m$ ：standing wave
- φが実数の場合，$w^2<4k/m$ ：伝播する．

3.　伝達境界の定式化

伝達境界を設定する方法は，式(4)のように表される波動が左右それぞれの方向に伝播するときの，領域 R と解析領域Ωの境界面における節点力(Q_R^R，Q_R^L)と，領域 L と解析領域Ωの境界面における節点力(Q_L^R，Q_L^L)を求め，その反力を解析領域Ωに作用する外力として与えることである．図-2 のモデルにおいて，領域 R の r-1 番目の節点における水平方向の節点力と節点変位の関係式は次式のように表すことができる．

$$f_{r-1}=k(x_{r-1}-x_r) \quad (7)$$

ただし，r-1 点における慣性項は解析領域Ωの中に取り込んでおく必要がある．ここで，正（右）の方向に波動が伝播した時の節点力を，複素節点外力振幅を用いて次式で表すこととする．

$$Q_R^R = f_{r-1} = f_R^R \cdot e^{iwt} \tag{8}$$

複素節点外力振幅の上付文字は波動の伝播方向を，下付は領域を表す．式(4)に表される右方向に波動が伝播するときの変位 x と，式(8)で表される節点力 f を式(7)に代入すると，

$$f_R^R \cdot e^{iwt} = k(ue^{iwt}a^{r-1}e^{-i(r-1)f} - ue^{iwt}a^r e^{-irf}) \tag{9}$$

式(7)には場所を表す変数r を含んでいる．r=1 とすると、

$$f_R^R = k\,u(1-ae^{-if}) = (k-kae^{-if})\,u = R_R \cdot u_R^R \tag{10}$$

同様に左方向に波動が伝播するときは

$$f_R^L = k\,u(1-ae^{+if}) = (k-kae^{+if})\,u = L_R \cdot u_R^L \tag{11}$$

領域 L の番号を右から付けて同様に求めると，

$$f_L^L = \left(k-kae^{-if}\right)\cdot u = L_L \cdot u_L^L \tag{12}$$

$$f_L^R = \left(k-kae^{+if}\right)\cdot u = R_L \cdot u_L^R \tag{13}$$

4.　全体の運動方程式

図-1 のモデルの解析領域Ωにおける運動方程式は節点相対変位を$\{x\}_\Omega$，節点外力を$\{Q\}_\Omega$ とすれば次のように書ける．

$$[M]_\Omega\{\ddot{x}\}_\Omega + [C]_\Omega\{\dot{x}\}_\Omega + [K]_\Omega\{x\}_\Omega = \{Q\}_\Omega \tag{14}$$

振動数領域で解析する場合において，$\{x\}_\Omega$ と $\{Q\}_\Omega$ は複素変位振幅を $\{U\}_\Omega$，複素節点外力振幅を$\{P\}_\Omega$とし，調和振幅の角振動数をωとすると，各々$\{x\}_\Omega = \{U\}_\Omega e^{iwt}, \{Q\}_\Omega = \{P\}_\Omega e^{iwt}$ と表すことができる．よって，式(14)は

$$([K]_\Omega + iw[C]_\Omega - w^2[M]_\Omega)\{U\}_\Omega = \{P\}_\Omega \tag{15}$$

上式ではエネルギー伝達境界を考慮していない．波動伝播のみを考慮した時の，解析領域Ωに接する，領域 R と領域 L の境界面における力は

$$f_R = f_R^R + f_R^L = R_R u_R^R + L_R u_R^L$$

$$f_L = f_L^R + f_L^L = R_L u_L^R + L_L u_L^L$$

よって，これらの反力を領域 L，R に接する解析領域Ωの境界面に，それぞれ外力として与えると，解析領域Ωにおける運動方程式は，

$$\begin{aligned}\left\{[K]_\Omega - w^2[M]_\Omega\right\}\{U\}_\Omega &= \{P\}_\Omega - f_R - f_L \\ &= \{P\}_\Omega - [R]_R\{U\}_R^R - [L]_R\{U\}_R^L - [L]_L\{U\}_L^L - [R]_L\{U\}_L^R\end{aligned} \tag{16}$$

ここで，境界上における変位振幅に注目すると，領域 L 側の境界上の変位振幅$\left(\{U\}_L^L + \{U\}_L^R\right)$は，$\{U\}_\Omega$の最初の項の位置を同じ値で占めることになるので，$[L]_L\left(\{U\}_L^L + \{U\}_L^R\right) = [L]_L\{U\}_\Omega$ と書ける．領域 R 側も同様にして，式(16)に代入すると，次式が求められる．

$$[\overline{K}]_\Omega\{U\}_\Omega = \{P\}_\Omega + ([R]_R - [L]_R)\{U\}_R^L + ([L]_L - [R]_L)\{U\}_L^R \tag{17}$$

ただし，$[\overline{K}]_\Omega = [K]_\Omega - w^2[M]_\Omega + [R]_R + [L]_L$ である．

5.　検証

5.1　波動伝播の条件について

（1）$w^2 < 4k/m$ の場合

図-3 に示すような，左右側に伝達境界をもつ単一質点の解析領域について検討した．波が右から入射して，左へ抜けて行く場合を考える．(17)式において，入射波の振幅を $u_R^L = w, u_L^R = 0$ とすると全体の運動方程式は，

$$[-w^2m + k(1-e^{-if}) + k(1-e^{-if})]u$$

$$= [k(1-e^{-if}) - k(1-e^{if})]w \tag{18}$$

ここで，$e^{\pm if} = \cos f \pm i\sin f$ を代入して整理すると，式(18)の左辺は次のようになる．

$$[-w^2m + 2k - 2k\cos f + i2k\sin f]u$$

$\cos f = (-mw^2 + 2k)/2k$ であるので，

$$i(2k\sin f)u = i(2k\sin f)w$$

$$\therefore u = w$$

u と w は複素振幅であるので，同じ振幅および，同じ位相で振動することが分かる．また，$u = u^L + u^R$ で左へ行く波と右へ行く波の両方が存在するが$u^L = w$ なので$u^R = 0$ となり，右へ行く波は存在しない．

次に，図-4 に示すような，伝達境界を設けた 4 質点系について検討を行った．解析条件はマス，バネが一様で伝播する波にした．すなわち，

$$k = 1000.0, m = 10.0, w = 15.0$$

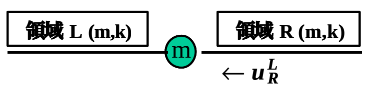

図-3　1 質点の解析領域モデル

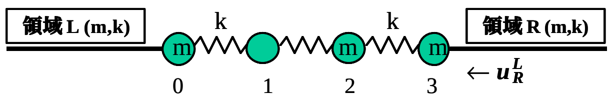

図-4　4 質点の解析領域モデル

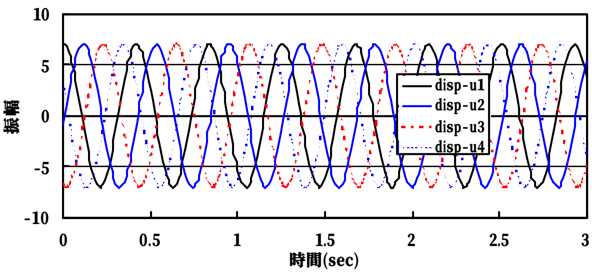

図-5　変位の時刻歴応答

右の境界に入射する波を，振幅uが 7.0 の余弦波 $u\cos wt$ とすると，その複素振幅$\{u\}_R^L$ と各質点の複素変位振幅$\{u\}_\Omega$は

$$\{u\}_R^L = \begin{Bmatrix} (0,0)\\ (0,0)\\ (0,0)\\ (7.0,0) \end{Bmatrix}, \quad \{u\}_\Omega = \begin{Bmatrix} (2.57,6.51)\\ (-6.78,1.74)\\ (-0.87,-6.95)\\ (7.0,0.0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7\\ 7\\ 7\\ 7 \end{Bmatrix}$$

図-5 は，$\{u\}_\Omega$ を時刻歴で表したグラフである．この複素振幅$\{u\}_\Omega$ を次の一般式で書くことができる．

$$x_i(t) = u \cdot \cos(wt - i \cdot f) \tag{19}$$

ここで，$i = 0,1,2,3$ であり，入力波が正弦波 $u\sin wt$ の場合についても同様に一般式が求められる．即ち，右の伝達境界から入った波は振幅を保ち，位相をf ずつ変化しながら伝播することが分かる．

（2） $w^2 = 4k/m$ の場合

先と同様に，図-4 に示す伝達境界を設けた 4 質点系について検討を行った．条件は(1)の場合と同じで，入力波の角振動数のみを変える（$w = 20.0$）．求められたその複素振幅$\{u\}_R^L$ と各質点の複素変位振幅$\{u\}_\Omega$は

$$\{u\}_R^L = \begin{Bmatrix} (0,0)\\ (0,0)\\ (0,0)\\ (7.0,0) \end{Bmatrix}, \quad \{u\}_\Omega = \begin{Bmatrix} (-7.0,0.0)\\ (7.0,0.0)\\ (-7.0,0.0)\\ (7.0,0.0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7\\ 7\\ 7\\ 7 \end{Bmatrix}$$

この結果で 2 章の(2)で言及されたように各質点が隣の質点と逆位相で振動することが分かる．これは，共振の現象を表すものであると考えられる．

（3） $w^2 > 4k/m$ の場合

$k = 1000.0, m = 10.0, w = 25.0$ の条件で実際に計算してみると，$h_1 = -0.25, h_2 = -4.0$ になり，各質点の複素変位振幅$\{u\}_\Omega$は

$$\{u\}_\Omega = \begin{Bmatrix} (-0.109,0.0)\\ (0.437,0.0)\\ (-1.75,0.0)\\ (7.0,0.0) \end{Bmatrix} = 7 \cdot \begin{Bmatrix} 1/h^3\\ 1/h^2\\ 1/h^1\\ 1/h^0 \end{Bmatrix}$$

この結果から質点の振幅はその位置に従って h のn乗に比例して減少する．これは解からも予想できる．また，波動式に虚数部がないことから，伝達しない波であることが分かる．

5.2 片方のみに伝達境界を設けた場合

片方のみに伝達境界を設けた場合は入った波が反対側に抜けることができず，伝達境界がない側の最外縁の質点から波が帰ってくるはずである．例えば，図-6 のモデルを考えると式(19)から，質点 0,1,2,3 の左から右方向に行く波の式は，入力波が余弦波の場合，次のように表すことができる．

$$x_0 = u\cos(wt - 0), \quad x_1 = u\cos(wt - f)$$
$$x_2 = u\cos(wt - 2f), \quad x_3 = u\cos(wt - 3f)$$

一方，反射波の波動式はx_3から 1 位相分遅らして，次式で表すことができる．

$$x_3' = x_4 = u\cos(wt - 4f)$$
$$x_2' = x_5 = u\cos(wt - 5f) \cdots$$

解析領域の最終的な波の波動式は，入力波と反射波の和で表すことができる．

$${}_t x_0 = x_0 + x_0' = 2u\cos(7f/2)\cos(wt - 5f/2)$$
$${}_t x_1 = x_1 + x_1' = 2u\cos(5f/2)\cos(wt - 5f/2) \cdots$$

従って，これらの合成波の波動式は次の一般式で書くことができる．

$$x_i = 2u\cos\left[\frac{2(n-i)+1}{2}f\right]\cos\left(wt - \frac{2n-1}{2}f\right)$$

ここで，nは全質点数，iは求めようとする質点の番号$i = 0,1,2,3,\ldots$である．図-7 に質点$r = 0$における入射波の波形x_0と反射波の波形x_0'とそれらの合成波の波形${}_t x_0$を示す．

一方，図-6 のモデルに本研究で定式化した伝

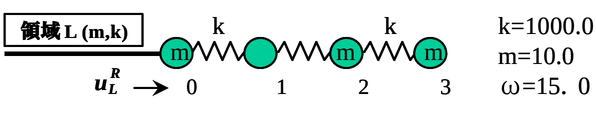

図-6 片方のみに伝達境界を設けた 4 質点モデル

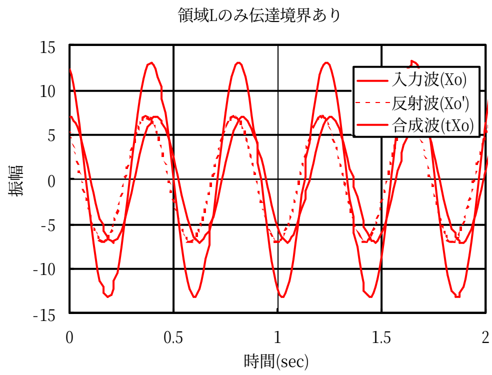

図-7　入力波と反射波の合成

達境界を左端のみに適用して，各質点の複素変位振幅を実際に求めると，次のようになる．

$$\{u\}^L_R=\begin{Bmatrix}(7.0,0)\\(0,0)\\(0,0)\\(0,0)\end{Bmatrix},\ \{u\}_\Omega=\begin{Bmatrix}(12.4,4.5)\\(-6.0,-2.2)\\(-10.9,-3.9)\\(8.7,3.2)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}13.2\\6.4\\11.6\\9.3\end{Bmatrix}$$

これらの複素変位振幅を波動式で表すと先ほど論じた合成波の式と等しい．以上で議論したことは時間領域の解析でも確認することができる．しかし，時間領域の解析では左右に伝播する波 u^L_R, u^R_L の定義ができず，外力波をトータル変位でしか表すことができない．従って，正確な意味の比較は困難であるが，質点を適当な数で並べると，入ってきた入力の波が反射し，またもう一度入ってくる時間（入ってきた波が自由端の質点に到達する時間の 3 倍）の間ではおおよその比較ができると考える．著者らは実際の時間領域の解析で，各質点が周波数領域解析の複素変位振幅の絶対値で振動することを確認した．

6.　地動を考慮するときの定式化

6.1　波動伝播の条件

本節では図-8 に示すように，地動を考慮に入れるため図-1 のマス-バネモデルに質点ごと独立バネ k' を設けた場合を考える．2 章と同様に，質点 r に着目して運動方程式を立てると，

$$-m\frac{d^2x_r}{dt^2}-(x_r-x_{r-1})k+(x_{r+1}-x_r)k-x_rk'=0 \quad (20)$$

ある振動数 w に対する波動解 $x_r=uh^re^{iwt}$ を式(20)に代入すると，次式(21)が得られる．

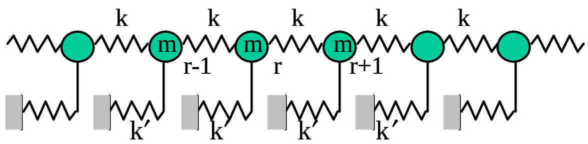

図-8　地動を考慮したマス-バネ系モデル

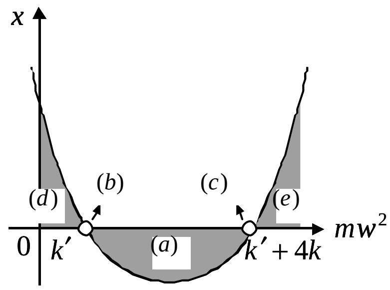

図-9　波の伝播条件

$$\{h^2k+h(mw^2-2k-k')+k\}u=0 \quad (21)$$

$u=0$ 以外の解を持つ条件から，角振動数ωに対して，式(21)を満たす固有値 h を求めると，

$$h=\frac{(-mw^2+2k+k')\pm\sqrt{(mw^2-2k-k')^2-4k^2}}{2k} \quad (22)$$

根号の中は次のように書き直せる．

$$x=(mw^2-k')(mw^2-k'-4k) \quad (23)$$

2 章と同様に式(23)の条件によって波動のタイプが変わるが，a の役割に関して注意しなければならないことがある．横軸を mw^2，縦軸を x にして式(23)をプロットしたものを図-9 に示す．このグラフを用いて，各条件による波動のタイプに関して説明する．

（1）$x<0$ の場合

この条件を満たすのは図-9 に示す(a)の場合である．すなわち，条件 $k'<mw^2<k'+4k$ の場合である．これは 2 章のケース(1)と同様に，根号の中が負になり h は複素数になる．したがって，指数関数 $h=a\cdot e^{\pm if}$ で表すことができる．よって，地動を考慮しないときの波動解，すなわち式(4)が表す x 方向に位相速度 w/f で伝播する定常波であることがわかる．指数部の符号は左から右方向が(-)である．

（2）$x=0$ の場合

この条件を満たすのは図-9 に示すように(b)と(c) 2 つの場合がある．(b)の場合，すなわ

ち，$mw^2 = k'$ の場合は，h の値が正になり，a が 1 になる．また，(c) $mw^2 = k' + 4k$ の場合は，h の値が負になり，a が-1 になる．この場合も 2 章のケース(2)と同様に，$h = 1, -1$ であるので，$h = a$ と置くと，任意の質点変位 x_r は式(5)と等しくなる．

（3） $x > 0$ の場合

この場合，h は 2 つの実数解を持ち，また，その 2 つの解 h_1, h_2 は互いに逆数の関係にあるのは 2 章のケース(3)と等しい．しかし，条件 (d) $mw^2 < k'$ の場合は，h の値が正になり，a を+1 にしなければならない．条件(e) $mw^2 > k' + 4k$ の場合は，h の値が負になり，a が-1 になる．従って，解 h は式 $h = a \cdot e^{\pm f}$ と表すことができる．よって，x_r は式(5)と等しくなる．

以上で，地動を考慮するとき注意しなければならないのは，図-8 のモデルにおいては standing wave を起こす角振動数は 2 つ存在することと，同じ条件 $x > 0$ でも図-9 の条件(d)，(e)に区別するべきであることが分かった．

6.2 伝達境界の定式化

地動を考慮する場合は地盤連結バネ k' が加わるが，伝達境界面におけるバネ k' は質量 m と一緒に解析領域に取り込むことで，伝達境界マトリクスは地動を考慮しない場合と等しくなる．

6.3 全体の運動方程式

図-8 に示すモデルの解析領域Ωにおいて地盤から地震加速度が入射した場合の運動方程式は，地動を $\{\ddot{x}_0\}_\Omega$ とすれば，次のように書ける．

$$[M]_\Omega(\{\ddot{x}\}_\Omega + \{\ddot{x}_0\}_\Omega) + [C]_\Omega\{\dot{x}\}_\Omega + [K]_\Omega\{x\}_\Omega = \{Q\}_\Omega \quad (24)$$

地動の複素変位振幅を $\{u_0\}_\Omega$ とすると，$\{\ddot{x}_0\}_\Omega = \{u_0\}_\Omega e^{iwt}$ と表すことができ，解析領域Ωにおける運動方程式は，

$$([K]_\Omega + iw[C]_\Omega - w^2[M]_\Omega)\{u\}_\Omega = \{P\}_\Omega + w^2[M]\{u_0\}_\Omega \quad (25)$$

また，地動による地盤からの入射加速度振幅を $\{a_0\}_\Omega$ とすると，式(25)は次式となり，

$$([K]_\Omega + iw[C]_\Omega - w^2[M]_\Omega)\{u\}_\Omega = \{P\}_\Omega - [M]\{a_0\}_\Omega \quad (26)$$

結局のところ，式(27)が得られる．

$$[\overline{K}]_\Omega\{U\}_\Omega = \{P\}_\Omega - [M]\{a_0\}_\Omega + ([R]_R - [L]_R)\{U\}_R^L + ([L]_L - [R]_L)\{U\}_L^R \quad (27)$$

ただし，$[\overline{K}]_\Omega = [K]_\Omega + iw[C]_\Omega - w^2[M]_\Omega + [R]_R + [L]_L$

7. 終わりに

本研究ではもっとも簡単な 1 自由度のマス-バネ系モデルを用いて，エネルギー伝達境界を定式化し，基礎的な考察や検証を行い，その妥当性を確認することができた．

伝播の条件になる w と k/m の関係は，応答する波のタイプであり，伝播しない波であっても解析で無視することはできない．また，波動の一般解に存在する a の値は同じ伝播の条件でも，その符号が異なるので非常に重要な意味を持ち，伝達境界の式に取り込まなければならない．

地動を考慮するときの定式化には解析領域のみに地動を考慮しており，領域 L,R については地動を考慮していない．実際に地震がきた場合を考えると，広い範囲に建てられているすべてのコンクリート連続橋梁に地震動が一様にかかるとは言えない．無限の領域の一部に外力が作用すると，そのエネルギーは左右の無限の領域に逸散すると考えられる．今後は今回議論した伝達境界を基に，周波数成分の合成からなるランダム振動に関して，現在の研究を拡張し，半無限に連続するコンクリート高架橋における逸散減衰を評価する方針である．

参考文献

1) Lysmer, J. and Wass, G. : Shear Wave In Plane Infinite Structures, Journal of the Engineering Mechanics Division.ASCE, Vol.98,No.EM1,Proc. Paper 8716, February, 1972, pp.85-105

2) 三輪健治，田辺忠顕：伝達境界を考慮した半無限長の桁構造の地震応答解析，コンクリート工学年次論文報告集，Vol.19，No.2，pp.519-524，1997

3) 武藤清：構造物の動的解析,丸善， pp.245-248, 1966