論文　三軸効果を考慮した三次元格子等価連続体モデルの構築とその適用

牧　真也[*1]・Kongkeo PHAMAVANH[*2]・伊藤　睦[*3]・田辺　忠顕[*4]

要旨：格子等価連続体モデル（LECOM）は，鉄筋コンクリート(RC)構造物の二次元問題に対し，十分な精度を有する解析手法であることがこれまでに確認されてきた。一軸応力－等価ひずみ関係の組み合わせで表現される格子等価連続体モデルを三次元に拡張する際には，多軸応力状態が考慮できる一軸応力－等価ひずみ関係が必要となる。そこで本研究では，三軸効果を考慮したコンクリートの一軸圧縮応力－等価ひずみ関係のモデル化を行った。構築したモデルと三軸圧縮試験結果を比較することでモデルの妥当性を検討するとともに，精度向上に向けた検討を行った。

キーワード：三次元格子等価連続体モデル，三軸効果

1.　序論

RC 構造物の挙動は，ひずみ軟化挙動を含めたコンクリートの挙動に大きく影響を受けることは周知である。有限要素プログラムを用いた数値解析シミュレーションによって，地震時の RC 構造物の三次元的な挙動などを精度良く予測するためには，ひずみ軟化領域も含めた多軸応力状態下のコンクリートの応力－ひずみ関係を精度良く表現できるモデルの開発が重要である。特に複雑な構造では，応力，ひずみが複雑に分布していおり，これらの一様化を不能とする限界領域（control volume）における損傷度やひび割れを的確に評価するためには，三軸圧縮下におけるコンクリート材料や，ひび割れたコンクリート材料の三軸圧縮下における挙動を考慮する必要がある。

開発を進める格子等価連続体モデルは，これまで Ahmad ら[1)]により，単調載荷条件において三軸圧縮下にあるコンクリートの応力・ひずみが増大する三軸効果が導入された。本研究では，三次元格子等価連続体モデルに簡便な手法による三軸効果を導入し，複雑な応力・ひずみ状態が形成される大容量の構造解析においても，簡便かつ妥当な数値解析結果を導く収斂精度の高い構成則の構築を目的とする。本論文では，三軸圧縮状態下，ひび割れたコンクリートの圧縮挙動，さらに，載荷・除荷・再載荷，すべての経路に対応する履歴ループを提案することにより，繰り返し載荷解析にまで適応可能なモデルの拡張を試みた。構築した構成則と既存の三軸圧縮試験結果を比較することで本モデルの妥当性を検討するとともに，精度向上に向けた検討を行った。

2.　圧縮モデルの概要

2.1　三軸圧縮下におけるコンクリート

格子等価連続体モデルとは，コンクリートと補強筋による耐荷機構をモデル化した Main lattice 成分と，ひび割れ面におけるせん断伝達をモデル化した Shear lattice 成分を，ひび割れ面座標系に想定することにより RC 構成式を構築するモデルである。各種格子成分の一軸応力－等価ひずみ関係の組み合わせによる本モデルは，簡便で収斂が良いモデルである.

*1 名古屋大学大学院　工学研究科　土木工学専攻　（正会員）
*2 名古屋大学大学院　工学研究科　土木工学専攻　工修（正会員）
*3 名古屋大学大学院　工学研究科　土木工学専攻　助手　工博（正会員）
*4 名古屋大学大学院　工学研究科　土木工学専攻　教授　工博（正会員）

本研究では多軸応力状態にあるコンクリートの圧縮挙動のモデル化を目的とするのだが，その圧縮応力－ひずみ関係の形状には次式を用いている。

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_P}=-\left\{2\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_P}\right)-\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_P}\right)^2\right\}\quad(0\le\varepsilon_c\le\varepsilon_P)\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_P}=-\frac{\varepsilon_c-\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu}-\varepsilon_P}\qquad(\varepsilon_P\le\varepsilon_c\le\varepsilon_{cu})\cdots\cdots\cdots(2)$$

ここで，σ_P ：コンクリートの圧縮強度

ε_P ：σ_P に対応する圧縮ひずみ

ε_c ：各圧縮格子の圧縮ひずみ

ε_{cu} ：限界ひずみ

コンクリートの hardening（硬化域）では式（1）の二次曲線で応力が上昇すると仮定し，softening（軟化域）では式（2）の通りに線形的に応力が低下するものとした。三軸応力状態下のコンクリートの挙動を表現する手法には，二軸の影響をその他の一軸応力－ひずみ関係に反映させる手法を用いることにする。以下にその概要を示す。

図－1 に一軸圧縮応力－ひずみ関係と三軸圧縮応力－ひずみ関係の一例の比較を示す。図には一軸と，三軸圧縮効果を考慮した応力－ひずみ関係をそれぞれ破線と実線で示している。三軸圧縮応力状態の場合には，ひび割れ面座標系における三軸圧縮応力 $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ を用いて，三軸圧縮下におけるコンクリート材料のピーク応力 σ_{PEAK} とピークひずみ ε_{PEAK} をそれぞれ算定し，応力－ひずみ関係の Envelop を式（1）（2）を用いて決定する。さらにひずみ軟化勾配をピーク応力 σ_{PEAK} の関数として規定することにより，三軸圧縮状態が大きくなるにつれて軟化勾配が緩やかになる挙動をモデル化した。これより，本構成則では，ピーク応力 σ_{PEAK}，ピークひずみ ε_{PEAK} のみを規定することにより三軸圧縮効果が表現可能である。

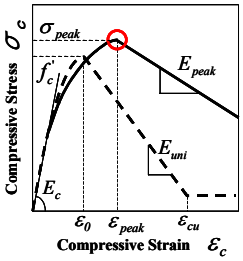
(a)　ピーク応力 σ_{PEAK} の算定

三軸圧縮下にあるコンクリートの破壊時のピーク応力は K.J.Willam ら [2)]による破壊基準から算定した。Haigh-Westergaard 系において，$\theta=(1/3)\cos^{-1}\left\{\left(3\sqrt{3J_3}\right)/\left(2\sqrt{J_2}\right)\right\}$，$\xi=I_1/\sqrt{3}$，$\rho=\sqrt{2J_2}$ とおける事から，破壊基準は次式に示される。

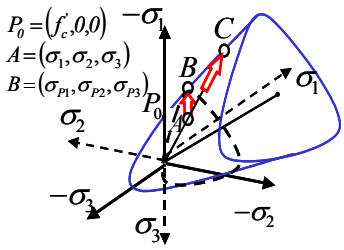
$$F(\xi,\rho,\theta)_{fail}=\frac{\rho\, r(\theta,e)}{f_c'}-\frac{\rho_1}{f_c'}\left(\frac{\xi-\xi_0}{\xi_1-\xi_0}\right)^{\alpha}=0\cdots(3)$$

これは**図－2** のような応力場において 3 軸対称曲線錐（curvilinear triple-symmetric cone）の破壊曲面を定義するものである。

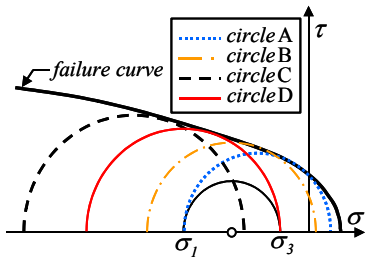
任意の応力状態 $A(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ を破壊曲面内に想定し破壊曲面上のピーク応力を算定する際，その算定手法には無限の種類が考えられるが，主に 4 つの異なる手法が想定される。簡便な説明のため，ここではモールの応力円による破壊基準を示す（図－3）。Circle A は σ_3 の値を増加させていき，Circle B は $(\sigma_1+\sigma_3)/2$ を固定することにより破壊点を算定している。これらの 2 手法では，引張応力が破壊状態定義に含まれる可能性がある。一軸圧縮応力状態の判定は引張強度に依存していることなどから，引張応力が破壊状態定義に含まれるのは好ましくない。次に Circle C では，$\sigma_1,\sigma_2\sigma_3$ すべてが線形的に増加させられている。この手法では，算定されるピーク応力点が破壊曲面の形状に依存することや，点 A が静水圧軸の外側に位置している際に



図－1：圧縮応力－ひずみ関係



図－2：破壊曲面



図－3：増分応力量

ピーク応力点が算定不可能などの欠点が存在する。そこで最後の Circle D では，最大主圧縮応力であるσ_1を圧縮方向に増加することにより破壊点を算定しており，上記のような問題が発生せず，また簡便な手法である。これより本解析では，最大主圧縮応力であるσ_1を圧縮方向に増加することによりピーク応力を算定した。

点 B を算定する際は，本来ならばσ_1，σ_2，σ_3各軸方向に応力を増やし，各々のピーク応力σ_{P1}，σ_{P2}，σ_{P3}を算定することが妥当とも考えられるが，Ottosen[6)]は最大主圧縮応力σ_1を圧縮方向に増加することにより求まる$\sigma_{P1}(=\sigma_{PEAK})$を三軸方向すべてに適用することで，実験値に適合するピーク応力が求まることを報告している。そこで本研究は，Ottosen にならい最大圧縮応力σ_1をより得られるσ_{PEAK}をピーク応力として，三軸方向すべてに適用することとした。

(b)　ピークひずみε_{PEAK}の算定

三軸圧縮下におけるコンクリートのピークひずみを算定には，S.P.Shah ら [4)]による提案式を用いた。

$$\gamma_{oct}/(\gamma_{oct})_0 = -4.8629 + 12.756(\tau_{oct}/\sigma_0) \cdots\cdots(4)$$

$$\varepsilon_{oct}/\varepsilon_0 = 0.197877(\sigma_{oct}/\sigma_0)e^{0.9475} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

これを式（6），式（7）に適用する。

$$\gamma_{oct} = \frac{2}{3}\left[(\varepsilon_{1P}-\varepsilon_{2P})^2 + (\varepsilon_{2P}-\varepsilon_{3P})^2 + (\varepsilon_{3P}-\varepsilon_{1P})^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

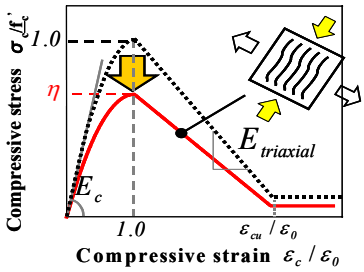
$$\varepsilon_{oct} = \frac{1}{3}(\varepsilon_{1P}+\varepsilon_{2P}+\varepsilon_{3P}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

さらに，偏差応力，偏差ひずみベクトルが同軸上にあると仮定した場合，次式が得られる。

$$\frac{2\sigma_2-\sigma_P-\sigma_3}{2\sigma_P-\sigma_2-\sigma_3} = \frac{2\varepsilon_{2P}-\varepsilon_{1P}-\varepsilon_{3P}}{2\varepsilon_{1P}-\varepsilon_{2P}-\varepsilon_{3P}} \cdots\cdots \quad (8)$$

本研究では，ピーク応力σ_{PEAK}と同様，最大主圧縮方向のピークひずみε_{PEAK}を算定した。

2.2　ひび割れたコンクリートの圧縮軟化モデル



図－4　圧縮軟化係数η

Collins・Vecchio は，鉄筋コンクリート板要素の 2 軸載荷実験を行い，コンクリートにひび割れが存在する場合，ひび割れと平行方向のコンクリートの圧縮剛性が低下することを報告している。本研究においても，Collins・Vecchio のモデルを採用し，軟化係数ηを用いて，式（1），（2）で計算される応力を低減させることとした。

$$\eta = [1/\{0.8 - 0.34(\varepsilon_t/\varepsilon_0)\}] \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

ε_t：主圧縮方向に直交する引張ひずみ

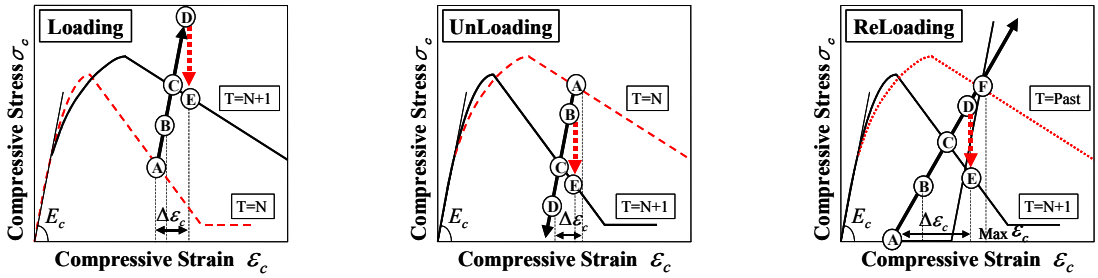
図－4 に軟化係数ηの効果を示す。

2.3　応力－ひずみ関係の履歴

上述の三軸圧縮効果と圧縮軟化モデルにより規定される応力－ひずみ関係の Envelop は，数値計算中，応力状態により常に変化している。ここでは常に変化している Envelop を用いて応力を算定する履歴について示す。

コンクリート材料が圧縮に載荷，除荷，再載荷される履歴図を図－5(a)，図－5(b)，図－5(c)に示す。図－5(a)，図－5(b)において破線は現在のステップを表し，実線は新しいステップにおける Envelop を表している。

図－5(a)の載荷時において，現在の応力点Ａから初期剛性E_Cを用いて直線を延ばす。その矢印で示す直線と新しい Envelop との交点 C を算定する。点Ａより初期剛性E_Cと増分ひずみ$\Delta\varepsilon_C$を用いて，次ステップの応力点を算定し，もしその応力点が点Ｂ，つまり点 C よりも応力レベルが低ければ，点Ｂが次ステップの新値の応力点となる。もし算定した応力点が点Ｄで点 C よりも応力レベルが高い場合は，同ひずみ時の Envelop 上の点Ｅが新値の応力となる。



（a）Loading　　（b）Unloading　　（c）Reloading

図－5　載荷履歴

図－5(b)の除荷時において，載荷時と同様に点Aを現在の応力点とする。初期剛性E_Cを用いた矢印で示す直線と新しい Envelop との交点 C を算定する。載荷時と同様にして応力点を求め，もしその応力点が点 B，つまり点 C よりも応力レベルが高ければ，同ひずみ時の Envelop 上の点 E が新値の応力となる。もし算定した応力点が点 D で点 C よりも応力レベルが低い場合は，点 D が次ステップの新値の応力点となる。

図－5(c)の再載荷時において，破線で示す Envelop は，コンクリート材料が過去に記録した最大のピークひずみ，ピーク応力による Envelop であり，点 F$(\varepsilon_{\max}, \sigma_{\max})$がひずみ最大点である。現在の応力点 A と点 F を直線で結び，この矢印で示す直線と実線で示す次ステップの新たな Envelop の交点 C を算定する。新値の選択は載荷時と同様にして決定する。

3. 提唱モデルの検証

ここで，本研究で開発した構成則の検証を行うため，畑中ら[5]による低側圧三軸圧縮下のコンクリートの載荷実験を解析・検討した。

3.1　実験概要

三軸圧縮実験の実験供試体は，圧縮強度 26.5(MPa)，寸法が 10cm×10cm×10cm のコンクリートブロックである。本実験は，様々な載荷条件で実験を行っている。実験Ａ：載荷初期に能動側圧を加える$(\sigma_2 = \sigma_3)$，実験Ｂ：二方向側圧(σ_2, σ_3)を不均等載荷$(\sigma_2 \neq \sigma_3)$，実験Ｃ：ひずみが 0.3%，0.55%時に側圧を途中載荷$(\sigma_2 = \sigma_3)$，実験Ｄ：載荷初期に能動側圧を加え，ひずみが 0.3%，0.60%，1.0%，1.5%時に途中除荷$(\sigma_2 = \sigma_3)$．本研究では，載荷条件の異なる 4 つの実験について解析・検討を行った。

3.2　解析概要

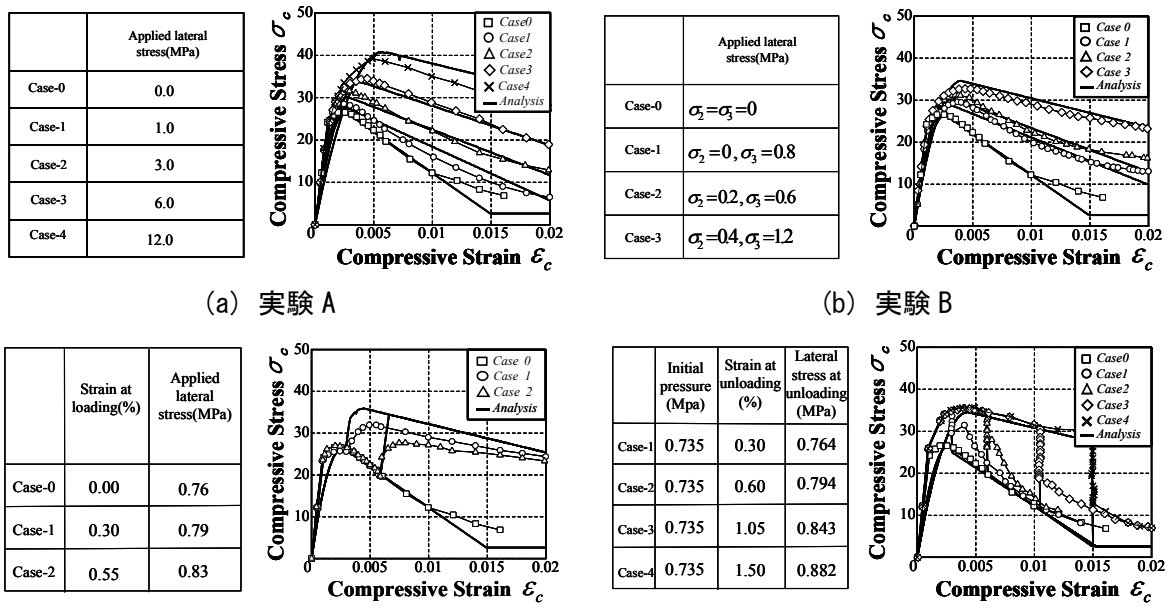
本解析では，まず側圧ゼロ$(\sigma_2 = \sigma_3 = 0)$の一軸圧縮条件で解析を行った結果が一軸圧縮実験と整合するよう諸条件を設定した。それから側圧を変化させ，三軸圧縮実験結果と比較することにより，コンクリートの三軸圧縮挙動が表現可能かどうか照査を行った。またそれらに基づきピーク応力σ_{PEAK}，ピークひずみε_{PEAK}，軟化勾配E_{PEAK}の各パラメーターについて検討を行った。

3.3　解析結果

各実験により得られた圧縮応力－ひずみ関係と本解析結果の比較を図－6(a)，図－6(b)，図－6(c)，図－6(d)に示す。実験 A，実験 B 双方において，解析値は実験値と精度良く整合している。実験 A の Case-4 では，高側圧になるにつれてピーク応力を過大評価する結果が得られた。

実験 C において，本構成則による数値解析結果は，途中載荷時において実験値より高い応力を示した。これは，現時点で本構成則はコンクリート材料の損傷を考慮しておらず，材料に損傷が進行した後でも三軸圧縮下にある健全なコンクリートとしての応力を算定してしまうため，多少実験値より高い結果となったと考えられる。

実験 D では，本構成則は一軸圧縮下におけるコンクリートの Envelop を規定し，その Envelop 上に次ステップの応力を決定するため，除荷後に応力点が緩やかに低下していく挙動を正確に



(a) 実験 A　　(b) 実験 B

(c) 実験 C　　(d) 実験 D

図－6　解析結果（圧縮応力－ひずみ関係）

追随するに至らなかった。

上記の解析から，コンクリートの損傷度，載荷履歴など本構成則に未だ考慮されていな点はあるが，ピーク応力σ_{PEAK}，ピークひずみε_{PEAK}を決定するだけで，簡便かつ妥当な応力－ひずみ関係の Envelop を描くことができたと考えられる。さらに，側圧が初期段階に載荷されるものから，側圧途中載荷，側圧途中除荷などといったすべての経路において応力状態の変化にも対応できることが証明された。

3.4　提案モデルの最適化

(a) ピーク応力σ_{PEAK}の補正

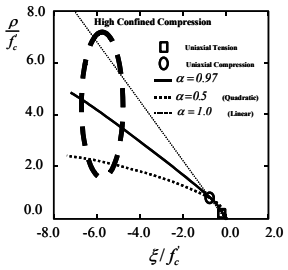
本研究で用いた破壊曲面の静水圧断面を**図－7** に示す。図に示すよう，破壊曲面は圧縮子午線上の高圧縮応力点をパラメーターとして Envelop を描いており，この値は実験値と整合することによってのみ与えられる，本解析では，低側圧においてピーク応力σ_{PEAK}が実験値とほぼ一致するようにこのパラメーターαを$\alpha = 0.97$と決定した。そのため，高側圧領域においてピーク応力σ_{PEAK}を過大評価する結果となった。高側圧，低側圧双方に対応する妥当なパラメーターαの値を決定するには，何種類もの実験と整合し，統計的に決定していかなければならない。

(b) ピークひずみε_{PEAK}の補正

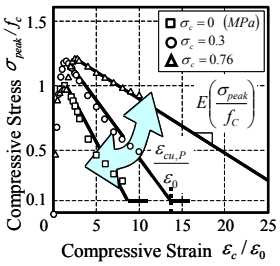
提案式（4），（5）は S.P.Shah らが行った一軸圧縮実験結果に基づき定式化が行われている。そこで，畑中らが行った一軸圧縮実験における一軸圧縮強度と対応する一軸ピークひずみを用いてε_0，γ_0を求め，式（4），（5）に適用した。その結果，図－6 に示すように，本解析では三軸圧縮下におけるコンクリートのピークひずみを精度良く評価できた。

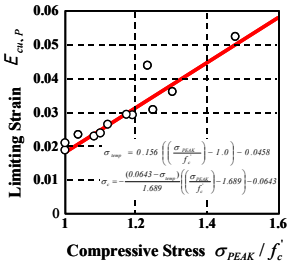
(c) 軟化勾配の算定

三軸圧縮下のコンクリートの載荷試験結果に基づき，ピーク応力σ_{PEAK}の関数として規定した。図－8 にその算定手順を示す。図－8(a)のプロットデータはそれぞれ側圧が 0.0，0.3，0.76(MPa)の時の三軸圧縮応力－ひずみ関係である。これらの実験結果と対応する直線を引き，それぞれの三軸圧縮状況における限界ひずみ点$\left(\varepsilon_{cu,P}, 0.1 f_c\right)$を求める。同様にして，上述のすべての実験における限界ひずみ点を求め，σ_{PEAK} / f_cとの関係を図－8(b)に示す。図－8(b)の値から最小自乗法により限界ひずみをピーク応力の関数として算定した。この限界ひず



図－7　破壊曲面の静水圧断面





図－8 軟化勾配

み点$\left(\varepsilon_{cu,P},0.1f_C\right)$とピーク点$\left(\varepsilon_{PEAK},\sigma_{PEAK}\right)$を直線で結ぶことにより，簡潔に軟化勾配を決定することができる。

（d）硬化域の勾配

本論文で採用した式（1）の応力－ひずみ関係では，三軸圧縮状態になりピークひずみが一軸圧縮状態より大きくなると，硬化域において一軸圧縮の Envelop よりも応力が小さくなり，勾配がなだらかになる。適切な応力－ひずみ関係を適用することで，この問題は解決される。

（e）構造解析への適用

ひずみ軟化材料を仮定した構造解析を行う際，解析結果が要素寸法に依存するのは周知である。そのため構造解析へ適用するためには，解の要素寸法依存性を低減するために，圧縮エネルギーを導入する必要がある。中村らは，応力－ひずみ関係の軟化直線が囲む面積と，圧縮破壊エネルギーが等価になるように，限界ひずみε_{cu}を一軸圧縮実験に基づき提案している。

本構成則では，この圧縮破壊エネルギーの概念を導入し，一軸圧縮状態における限界ひずみε_{cu}を算定した。三軸効果を考慮する際，上述の三軸圧縮解析から得られた一軸から三軸応力状態に以降する際のひずみ増加率を圧縮破壊エネルギーに基づく限界ひずみε_{cu}に乗じることで，本構成則を構造物レベル解析まで適用できるよう拡張した。

4.　結論

三次元構造物では，応力・ひずみが複雑に分布しており，数値解析を行う際，三軸効果を考慮する必要がある。本研究では，塑性理論のような複雑な理論を必要とせず，簡便かつ妥当な解析結果を導く構成則を構築し，以下の結論が得られた。

・構築した構成則はピーク応力σ_{PEAK}，ピークひずみε_{PEAK}の二つを決定するだけで，軟化勾配が三軸圧縮応力へ依存する現象もモデル化し，妥当な三軸圧縮効果を表現できる。

・ピーク応力σ_{PEAK}，ピークひずみはそれぞれパラメーターを含んでおり，本研究で用いた実験のみならず，様々な実験と適合させることでパラメーターを決定し，より一般的なモデルに修正することが可能である。

参考文献

1) Syed Ishtiaq Ahmad and Tada-aki Tanabe : Development of Concrete Constitutive Laws Based on 3D Lattice Equivalent Continuum Model, JSCE, No.725/V-58, pp.293-304, 2003

2) Kang, H. : Triaxial constitutive model for plain and reinforced concrete behavior, PhD thesis, CEAE Dept., University of Colorado, Boulder, Colorado,1997

3) N.S.Ottosen : Constitutive model for short-time loading of concrete, Proc.of ASCE, EMI, pp.127～141, 1979

4) Shuaib, H.Ahmad and Surendra P.Shah : Complete Triaxial Stress-Strain Curves for Concrete, ASCE, Vol.108, pp.728-741, 1982

5) 小阪義夫，谷川恭雄，畑中重光：低側圧 3 軸圧縮下のコンクリートの塑性変形挙動，第 6 回コンクリート工学年次講演会論文集，pp. 257-260, 1984