

論文 コンクリートの離散ひび割れ解析手法に関する研究

神田 康行^{*1}・松原 仁^{*2}・伊良波 繁雄^{*3}・富山 潤^{*4}

要旨：有限要素法は、弾性域では良い精度の解をもたらすが、すべり破壊や引張破壊が離散的に生じた場合は一般にリンク要素やジョイント要素が必要となる。一方、剛体ばねモデルは極限解析専用のモデルであり塑性域では、すべり破壊や引張破壊を離散的に取り扱うのに適している。しかし、弾性域での精度は一般に保証されない。したがって、弾性域からすべりや引張破壊が生じる領域までを解析することを考えると、弾性域では有限要素解析を行い、破壊領域は剛体ばねモデルを用いることが望ましいといえる。本研究では両者を融合した離散ひび割れ解析手法の一つを提案し、数値解析例を示し、本手法の妥当性を検討した。

キーワード：有限要素法、剛体ばねモデル、自由度の数、離散ひびわれ解析

1. はじめに

固体を有限要素の集合体に理想化した場合の変形は、要素内部の変位と要素間のすべりによる変形の 2 つに支配され、弾性域では前者が重要で、塑性域では後者が重要となる¹⁾。このような観点から変位法に基づく有限要素法 (FEM) では、連続体力学を基礎としているため変位の連続が保証される弾性域では良い解をもたらすが、塑性域での要素間すべりによる変形を考慮する場合は一般にリンク要素やジョイント要素が必要となる^{2),3)}。一方、剛体ばねモデル(RBSM)では要素を剛体と仮定し、要素境界を 2 種類のばね (要素境界に垂直な垂直ばねと平行なせん断ばね) で接続したモデルである⁴⁾。よって、RBSM は要素間のすべりが重要となる塑性域では良い解をもたらすが、変位の連続が必要な弾性域では、接続した 2 つのばねでは弾性変形を表現するのは非常に困難となる。したがって、弾塑性解析では、変位の連続が保証される弾性域は FEM、要素間のすべりが重要となる塑性域は RBSM を用いた方がよい¹⁾。

本研究では、一節点あたりの自由度が 3 と

なる回転自由度を有する平面三角形要素と要素内自由度が 3 の RBSM を結合し、弾性域では FEM、塑性域では RBSM を用いるという離散ひび割れ解析法 (以下 FE-RBSM と称する) を提案した。

2. 回転自由度を有する平面三角形要素

2.1 要素の定式化

平面要素に回転自由度を導入することは多くの研究者らによってその有用性が証明されている。関口、菊池は、変位場に回転角を導入することによって、回転自由度を有する平面四辺形要素(RDs:Sekiguchi's 4-node Rectangular element with Drilling dofs)を導いた⁵⁾。ここでは、関口、菊池の仮定に基づいて回転自由度を有する平面三角形要素(TDs:Sekiguchi's Triangular element with Drilling dofs)を定式化する。

関口、菊池が仮定した回転角を導入した TDs の変位場(u^{TDs}, v^{TDs})は次式のようにになる。

$$\begin{cases} u^{TDs} = \sum_{i=1}^3 (u_i - (y - y_i)\theta_i^{TDs})N_i^{T3} \\ v^{TDs} = \sum_{i=1}^3 (v_i + (x - x_i)\theta_i^{TDs})N_i^{T3} \end{cases} \quad (1)$$

*1 琉球大学大学院 理工学研究科 学生 学士(工学) (正会員)

*2 琉球大学大学院 理工学研究科 学生 修士(工学) (正会員)

*3 琉球大学 環境建設工学科 教授 博士(工学) (正会員)

*4 琉球大学 環境建設工学科 助手 博士(工学) (正会員)

ここで、 u_i 、 v_i はそれぞれ三角形の頂点の x 及び y 軸方向の変位、 x 、 y は要素内の任意点座標、 x_i 、 y_i は三角形要素の頂点座標、 θ_i^{TDs} は i 頂点の回転角、 N_i^{T3} は一般に使用されている定ひずみ三角形要素の形状関数である。したがって、式(1)を微分することで TDs のひずみ-変位マトリックス $[B^{TDs}]$ を次式のように得ることが出来る。

$$[B^{TDs}] = [B_1^s \ B_2^s \ B_3^s]$$

$$B_i^s = \begin{bmatrix} dX_i & 0 & (-y+y_i)dX_i \\ 0 & dY_i & (x-x_i)dY_i \\ dY_i & dX_i & (x-x_i)dX_i - (y-y_i)dY_i \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで、 $dX_i = \partial N_i^{T3} / \partial x$ 、 $dY_i = \partial N_i^{T3} / \partial y$ である。よって、式(2)を用いると TDs の要素剛性マトリックス $[k^{TDs}]$ は次のように求めることが出来る。

$$[k^{TDs}] = t \int_0^1 \int_0^{1-\zeta_1} [B^{TDs}]^T [D] [B^{TDs}] \det[J] d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (3)$$

ここで、 t は要素の厚さ、 ζ_1 、 ζ_2 は面積座標、 $[J]$ はヤコビアンマトリックス、 $[D]$ は応力-ひずみマトリックスである。式(3)より、TDs の要素剛性マトリックスは通常用いられる要素剛性マトリックスと同様に数値積分を用いて導くことができる。図-1に開口、菊地の仮定に基づいた三角形要素 TDs を示す。

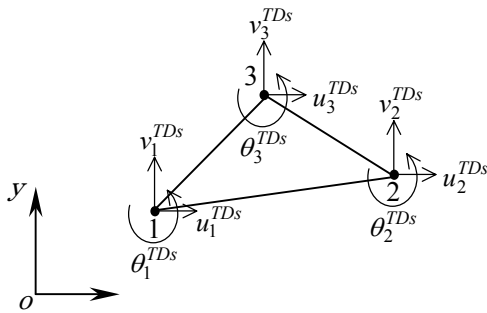


図-1 回転自由度を有する三角形要素

2.1 TDs の精度評価

ここでは形状関数が一次及び二次の三角形要素と TDs の精度比較を行う。解析モデルは図-2に示す 1:10 の片持ち梁で行い、ヤング係数は 30000.0N/mm^2 、ポアソン比は 0.25 である。なお、TDs および 2 次要素の面積積分はガウスの 3 点積分を用いた⁶⁾。

図-3 に得られた結果を示す。T3 は一次要素、

T6 は二次要素である。解析結果から T6 が最も精度が良く、T3 の精度は理論解に達していない。TDs はちょうど T3 と T6 の中間にあり、二次要素に近い精度を持つことがわかる。このように TDs は比較的簡単に定式化することができ、良い弾性解をもたらすため、本研究では、使用する有限要素として TDs を用いることにする。

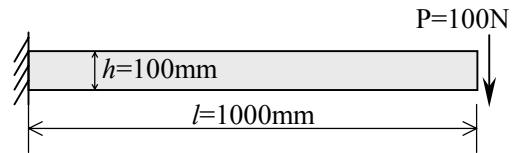


図-2 精度評価解析モデル

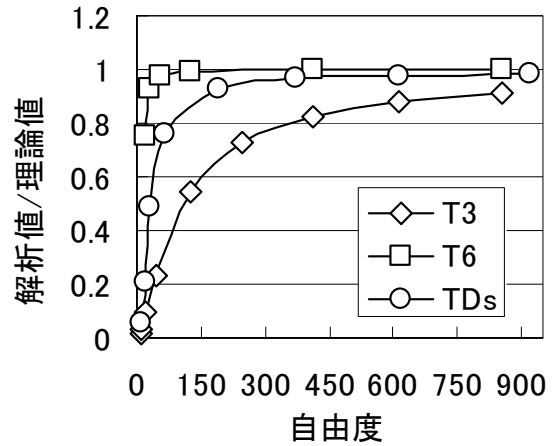


図-3 TDs の精度評価

3. FE-RBSM の計算方法

3.1 TDs と RBSM の要素内自由度の関係

一般に使用される有限要素の一節点あたりの自由度は 2 であり、RBSM の要素内自由度の数と一致しない。このことから、FEM と RBSM を融合した理想的な解析は困難であったが、図-1 から明らかなように TDs の一節点あたりの自由度は 3 であり RBSM の要素内自由度と一致する。したがって、弾性域では TDs を用いた FEM で計算し、要素が降伏した時、その降伏した要素は次のステップからは RBSM で計算することが可能になる。

3.2 要素内すべりを RBSM で表す方法

有限要素解析で要素が降伏した後は要素間のすべりが重要になる。そこで、本研究では有限要素の降伏後は剛体要素になると仮定し、すべりは剛体要素境界で評価する。三角形要素内に

すべり線が発生した時は、要素内部を図-4 (a) のように 3 つの剛体四辺形に分割し、剛体四辺形間のすべりを考慮することにした。

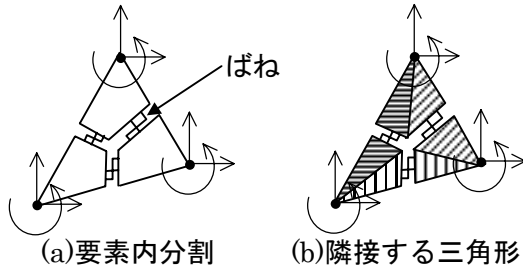


図-4 ばね剛性の評価

一般に RBSM のばね剛性は要素重心点を用いて表され、弾性時では $[k^{spe}]$ 、塑性時では $[k^{spp}]$ とすればそれぞれ次式で与えられる。

$$[k^{spe}] = \int [B^{sp}]^T [D^{spe}] [B^{sp}] ds \quad (4)$$

$$[k^{spp}] = \int [B^{sp}]^T [D^{spp}] [B^{sp}] ds \quad (5)$$

ここで、 $[B^{sp}]$ は相対変位と要素変位関係を表すマトリックス⁴⁾、 $[D^{spe}]$ は弾性時の相対変位と表面力関係を表すマトリックス⁴⁾、 $[D^{spp}]$ は塑性時の相対変位と表面力関係を表すマトリックス⁴⁾である。一方、本研究で用いている RBSM は三角形頂点に自由度をもつため、ばね剛性は図-4(b)のように斜線で分けられた三角形の間で評価しなければならない。よって、 $[B^{sp}]$ は自由度を節点に移動した場合は次式になる。

$$[B^{sp}] = \begin{bmatrix} -l_1 & -m_1 & l_1(y-y_1) - m_1(x-x_1) \\ -l_2 & -m_2 & l_2(y-y_1) - m_2(x-x_1) \\ l_1 & m_1 & -l_1(y-y_2) + m_1(x-x_2) \\ l_2 & m_2 & -l_2(y-y_2) + m_2(x-x_2) \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここで、式(6)で用いている値は図-5 を参考にして、 $l_1 = y_{35} / l_{35}$ 、 $l_2 = x_{35} / l_{35}$ 、 $m_1 = x_{53} / l_{35}$ 、 $m_2 = y_{53} / l_{35}$ となり、下付きの数字は $x_{ij} = x_i - x_j$ 、 $y_{ij} = y_i - y_j$ を意味する。 l_{35} は辺 35 の長さであり、 x_1 、 y_1 、 x_2 、 y_2 はそれぞれの節点座標値、 x 、 y は表面力に関するばね積分点である。なお、式(4)、(5)の要素境界上の線積分⁴⁾は、式(6)を式(4)、(5)に代入することによってばね剛性マトリックスを得ることができる。

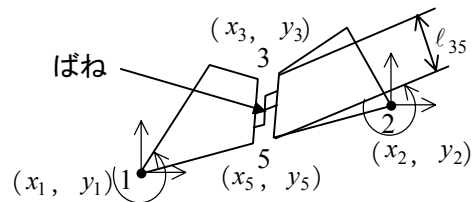


図-5 剛体四辺形要素

3.3 要素内分割手法

要素内分割手法については、図-6(a)のように要素重心から三角形要素の 3 辺それぞれの中点に向かって離散ひび割れが発生すると仮定した中点分割手法と、図-6(b)のように要素内の主応力方向と垂直に離散ひび割れが発生するという主応力分割手法の 2 つの方法を提案する。

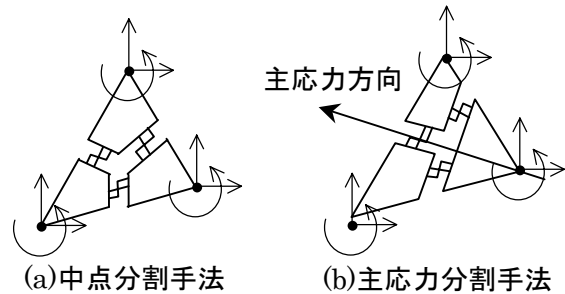


図-6 要素内分割手法

中点分割手法は、ひび割れ方向をあらかじめ決定しているため、ひび割れが連続に発生するが、応力の方向を考慮していないため正しいひび割れ方向を評価するのは困難である。一方、主応力分割手法は、主応力方向と垂直にひび割れが発生するので比較的正しいひび割れ方向を考慮できるが、ひび割れの連続は保証されない。

3.4 降伏判定について

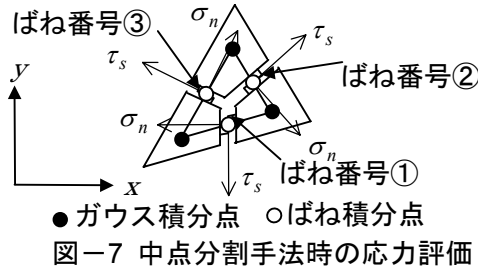
FEM は一般に要素内応力で降伏判定を行い、RBSM は要素間の 2 つのばね表面力で降伏判定を行う。このことから、FEM の降伏判定は RBSM のばね表面力の方向及び場所 (ばね積分点) が一致するように変換した要素内応力で行った。

要素内応力の変換は要素内分割手法によってそれぞれ異なるが、両手法とも平面三角形要素の面積積分にはガウスの 3 点積分を用いた。ガウスの 3 点積分を結んだ三角形と平面三角形要素は大きさが 1:2 で相似かつ重心点の場所が一致するという関係があり、この関係を用いれば

ばね積分点での要素内応力を容易に評価できる。

(1)中点分割手法

中点分割手法では、剛体四辺形同士の共有辺が常に重心と辺中点を結ぶ線上にあるため、ばね積分点はその線上のちょうど 1/2 の場所になる。よって、3つのばね積分点は図-7のようにガウスの3点積分を結んだ三角形の線上にある。



この関係を用いれば、それぞれのばね積分点での要素内応力 σ_{xp} , σ_{yp} , τ_{xyp} は、形状関数 N_i^{T3} にばね積分点の座標値を代入することによって次式でそれぞれ簡単に求めることができる。

$$\begin{cases} \sigma_{xp} = \sum_{i=1}^3 (\sigma_{xi} N_i^{T3}) \\ \sigma_{yp} = \sum_{i=1}^3 (\sigma_{yi} N_i^{T3}) \\ \tau_{xyp} = \sum_{i=1}^3 (\tau_{xyi} N_i^{T3}) \end{cases} \quad (7)$$

ここで、 σ_{xi} , σ_{yi} , τ_{xyi} はガウス積分点での応力値である。図-7 に示す x 軸と τ_s 方向との交角を θ_p とすれば、中点分割手法での垂直応力 σ_n , せん断応力 τ_s は次式で与えられる。

$$\sigma_n = 0.5(\sigma_{xp} + \sigma_{yp}) + 0.5(\sigma_{xp} - \sigma_{yp}) \cos 2\theta_p + \tau_{xyp} \sin 2\theta_p \quad (8)$$

$$\tau_s = -0.5(\sigma_{xp} - \sigma_{yp}) \sin 2\theta_p + \tau_{xyp} \cos 2\theta_p \quad (9)$$

なお、式(8), (9)の関係は各ばね積分点で成立する。よって、中点分割時の要素降伏判定は、式(8), (9)で求めた垂直応力 σ_n , せん断応力 τ_s で判定する。3点の要素内応力の内一つでも降伏条件を満足したならば要素は降伏した事となり、降伏後のばね剛性は、降伏条件を満足した点では塑性ばね、満足してない点では弾性ばねとなる。

(2)主応力分割手法時

主応力分割手法では、要素内主応力が降伏条件を満たした時要素が降伏することになるので、

主応力方向と垂直方向に三角形を2分割した時、分割線上にある2つのばねは降伏したものと考え塑性時のばね剛性となる(図-8(a))。この2つのばね積分点は、中点分割手法と違い剛体四辺形の共有辺が図-8(a)のように主応力方向に支配される。そこで、本研究では三角形分割線とガウスの3点積分の座標を結んだ三角形との交点座標を取ることにした。

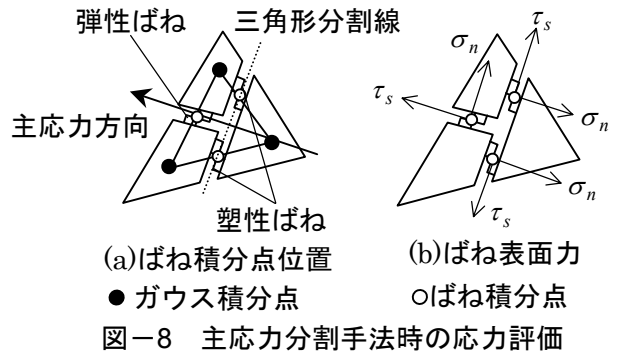


図-8 に示すばね積分点は RBSM の表面力計算には必要であるが、本研究では最大主応力の方向と垂直方向にひび割れが発生すると仮定しているため、図-8(b)のように主応力方向と垂直ばね表面力 σ_n の方向は一致し、主応力面ではせん断力は0であるから、三角形分割線上の2つのばね表面力には次の関係が成り立つ。

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_1 \\ \tau_s = 0.0 \end{cases} \quad (10)$$

ここで、 σ_1 は要素内最大主応力である。

4. 数値解析例

4.1 FE-RBSM と RBSM の比較検討

FE-RBSM と RBSM の比較検討として RBSM の極限荷重の精度検証に良く用いられる図-9に示すような V ノッチを有する金属薄板の弾塑性解析を行った。要素分割は対称性から右上半分とし、RBSM では図-9(a)¹⁾、本手法では図-9(b)に示す節点数 231,要素数 416 の Case1 と、同様な要素分割で節点数 877 要素数 1664 と要素分割を細かくした Case2 の二つとした。要素内分割手法は中点分割手法とし、解析に用いた諸係数を表-1 に示す。荷重は変位制御で行い強制変

位増分 $\Delta u = 1 \times 10^{-4}$ (mm) を作用させ、降伏条件は Von-Mises の条件とし平面応力問題とした。

図-10 に荷重-変位曲線を、図-11 に Case1 の破壊進行状況をそれぞれ示す。図-10 より弾性域において、RBSM と本手法は一致しているのがわかる。しかし、RBSM は梁要素などを除いて要素分割が任意形状の場合、変位が良好とはいえない¹⁾。塑性域においては、RBSM の崩壊荷重は 692.8N であるのに対し、Case1 では 743N、Case2 では 723N という結果を得た。本手法による結果は RBSM よりやや高めに出ているが、良好な結果であるといえる。図-11 より破壊進行状況は、始めに V ノッチの左上端からすべりが入り (a)、荷重が増加していくと斜め方向にすべりが徐々に進行して行く (b)。その後、左端部に一つの亀裂を形成する (c)。やがて、その亀裂が下方まで到達し降伏状態となる (d)。

表-1 V ノッチを有する薄板の解析条件

弾性係数 $E(N/mm^2)$	20000.0
ポアソン比	0.3
降伏強度 $\sigma_Y(N/mm^2)$	30.0

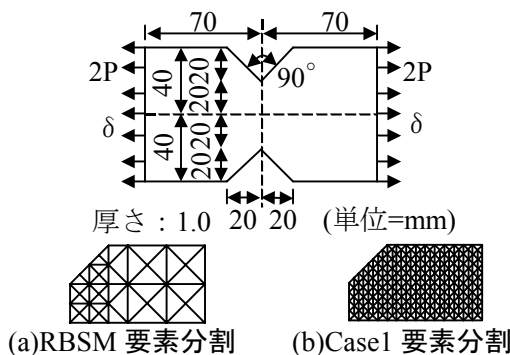


図-9 V ノッチを有する板の引張問題

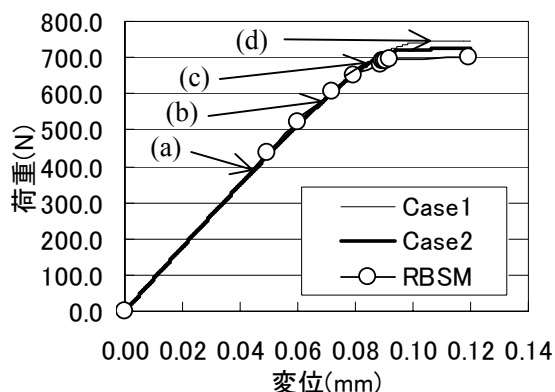


図-10 荷重-変位曲線

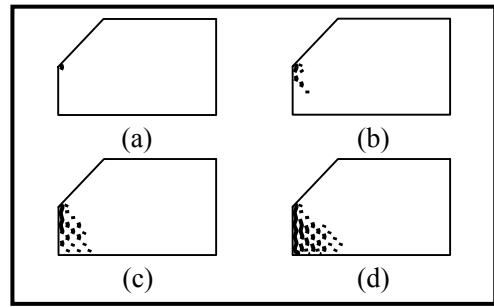
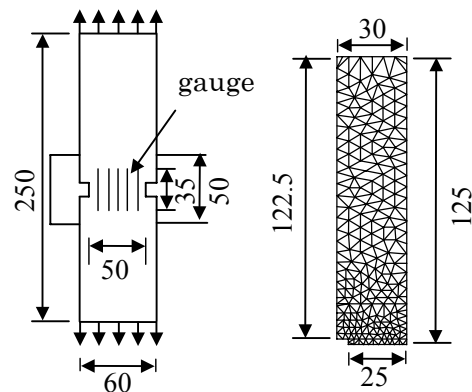


図-11 破壊進行状況

4.2 コンクリートの直接引張試験

本節では、Cornelissen³⁾らが行ったコンクリートの直接引張試験をシミュレートした。解析モデルは図-12 であり、解析領域は対称性を考慮して全体の 1/4 のみ要素分割を行った。



厚さ : 50.0 (単位=mm)

図-12 解析モデルと要素分割

解析にはコンクリートの引張破壊解析に一般的に良く用いられる図-13 のような引張軟化曲線の二直線モデル^{3),7)}を用いた。本研究ではこの軟化則を要素降伏後の垂直ばねに用い、せん断ばねにはせん断弾性低減係数として 0.4 を乗じた。要素内分割方法は主応力分割手法とし、解析に用いた諸係数を表-2 に示す。荷重は強制変位増分を $\Delta u = 1 \times 10^{-4}$ (mm) を作用させた。

解析より、得られた切り欠き内部の平均主応力とエクステンソメーターの伸びの関係を図-14 に示す。Cornelissen らが行った実験範囲と本解析結果は比較的良好な一致を示している。また、破壊進行状況を図-15 に示す。まず、切り欠きの左端からひび割れが入る (a)。やがて、ひび割れは右端に向かって、徐々に進行していき右端に到達する (b)。第一勾配が終わり始め

た頃、第二勾配に入るばねが見られ始める (c)。最終的にはほとんどのばねが第二勾配に入るといのが確認できた (d)。

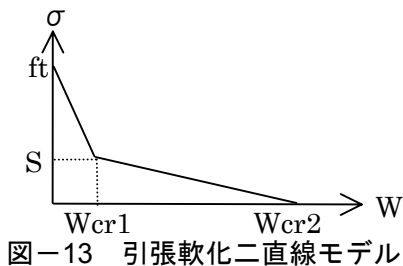


表-2 コンクリートの材料特性及び解析条件

弾性係数 $E(N/mm^2)$	39270.0
ポアソン比	0.3
引張強度 $ft(N/mm^2)$	3.2
破壊エネルギー $Gf(N/mm)$	0.10313
引張軟化モデル	1/4モデル

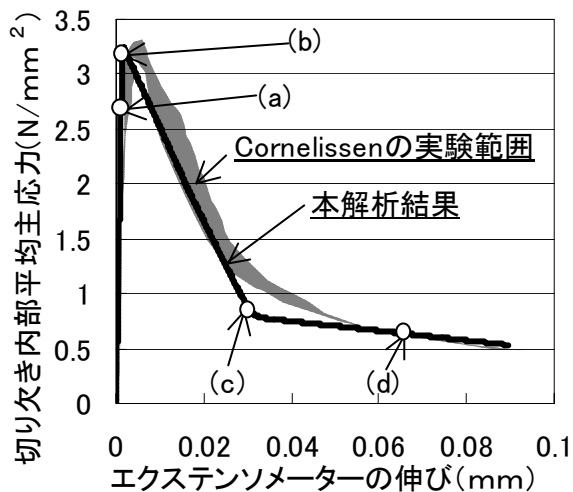


図-14 切り欠き内部平均主応力とエクステンソメーターの伸びの関係

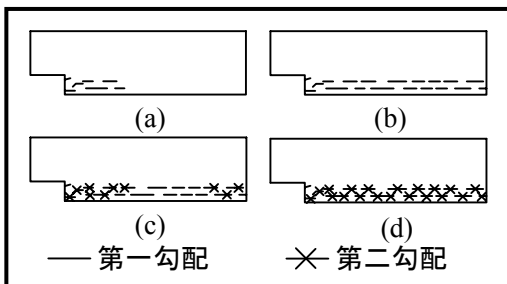


図-15 切り欠き内部破壊進行状況

5. まとめ

本研究では、弾性域では回転自由度を有する平面三角形要素を用い、塑性域は要素内部を3つの剛体四辺形で分割し、すべりを表すことに

より FEM と RBSM を融合した FE-RBSM を提案した。要素内の分割法は、数値解析より地盤や金属など、すべり方向の決定が難しい問題では中点分割手法が適していおり、コンクリートなど主応力方向と垂直にすべりが発生する問題では主応力分割手法が適していると考えられる。得られた結果を以下にまとめる。

- (1) FE-RBSM は FEM と RBSM の融合であるため、弾性から塑性領域まで良好な解を得ることができる。
- (2) V ノッチの切欠きを有する板の弾塑性解析において、FE-RBSM と RBSM による崩壊荷重の比較は良好な結果を得た。
- (3) FE-RBSM によるコンクリートの直接引張試験は Cornelissen らの実験結果とほぼ一致した。

本手法はすべり等を容易に扱える手法である。今後は、すべり等が卓越するような問題に取り込んで行く予定である。

参考文献

- 1) 川井忠彦編：固体力学諸問題の離散化極限解析、生研セミナーテキスト、生産技術研究奨励会、1982
- 2) Ngo, D., Scordelis, A. C.: Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams, ACI Journal, pp.152-163, 1967.3
- 3) 伊良波繁雄, 富山 潤：離散ひびわれ用のハイブリッドストレス要素を用いたコンクリートの破壊解析, 土木学会論文集, No.739, pp.121-135, 2003.8
- 4) 川井忠彦, 竹内則雄共著：離散化極限解析プログラミング, 培風館, 1990
- 5) Sekiguchi, M. and Kikuchi, N.: Re-examination of membrane elements with drilling freedom, Proceedings of the fifth world congress on computational mechanics, 2002
- 6) O.C.ツェンキ-ヴィッツ著, 吉識雅夫, 山田嘉昭監訳：基礎工学におけるマトリックス有限要素法, 培風館, 1977
- 7) Rokugo, K., F. H. Wittman., P. E. Roelfstra. and E. Brunwiler.: Different Methods to Determine Fracture Energy and Strain Softening of Concrete, コンクリート工学年次論文報告集, 9-2, pp.663-668, 1987