

論文 ビンガム流体の流動解析におけるMPS法の適用

富山 潤^{*1}・入部綱清^{*2}・山田義智^{*3}・伊良波繁雄^{*4}

要旨：フレッシュコンクリートやセメントペーストなどの流動特性を数値解析的に評価する試みがこれまで多く行われてきており，筆者らも，大変形問題に適したフリーメッシュ法，MPS法，オイラー型有限要素法やMAC法などを適用し，構成モデルとしてビンガムモデルを採用した解析を行った。しかし，これらのうち，MPS法における解法では，ビンガムモデルの材料非線形性を考慮していなかったため，他の解法に比べ解析精度に多少問題が残る結果となっていた。そこで，本研究では，MPS法のビンガム流体への適用に関する解析精度の向上を目的に，従来の手法に改良を加え，再検証を行い，解析結果も良好であった。

キーワード：MPS法，ビンガム流体，非線形構成則，フレッシュコンクリート

1. はじめに

これまで，フレッシュコンクリートやセメントペーストなどの流動挙動を数値解析的に評価する試みが多く行われてきた。筆者らも，大変形問題に適したフリーメッシュ法¹⁾，MPS(Moving particle semi-implicit)法²⁾，オイラー型有限要素法³⁾やMAC法⁴⁾をフレッシュコンクリートの流動解析に適用し，良好な結果を得た。しかし，これらの解析で用いたフレッシュコンクリートの構成モデルであるビンガムモデルは，ひずみ速度に依存する材料非線形性を有しており，解法においても非線形方程式を解くことになる。上記に示した手法のうちMPS法以外は非線形性に対する収斂計算を行っているが，MPS法の解法では，重力項と粘性項を1ステップ前の粘性を用いて陽的に解き，圧力を陰的に解くといったSMAC法を基礎とした半陰解法アルゴリズムを用いて非圧縮性流れを解いていることから，これまで材料非線形性に対する収斂計算を行っていなかった。粘性が一定の流れの解析では精度的に問題ないが，ビンガム流体のように粘性が空間的に一定でなく，非線形性を示す

ような問題では，上記に示した他の解析結果に比べ精度的に多少問題があることは確認されていた。しかし，MPS法は粒子法の一つで移動・自由境界を解くということに対して非常に優れた解法であり，フレッシュコンクリートなどの流動解析には非常に有力な解析手法であることは明らかである。そこで本研究では，MPS法のビンガム流体への適用に関する解析精度の向上を目的に，従来の手法に改良を加え，数値解析例としてL型フロー試験の解析を行い，本手法の妥当性を検討した。

2. ビンガム流体の支配方程式

2.1 ビンガム流体の構成モデル

一般的にフレッシュコンクリートの流動挙動はビンガム流体で表される。しかし，ビンガム流体はせん断応力が降伏値を超えるまでひずみ速度がゼロであるため，応力が不定となり，そのままでは数値解析に適用することは難しい。そこで，本解析手法ではせん断応力が降伏値に達するまでは高粘性流体として扱い，流動速度を非常に小さくすることで不動状態と表現する

*1 琉球大学 工学部環境建設工学科助教 博士(工学) (正会員)

*2 プロメテック・ソフトウェア(株) 修士(工学)

*3 琉球大学 工学部環境建設工学教授 博士(工学) (正会員)

*4 琉球大学 工学部環境建設工学教授 博士(工学) (正会員)

図-1 に示す bi-viscosity モデルを用いた。

流動時におけるフレッシュコンクリートの構成モデルは粘塑性モデルとし図-2(a)に示す。また、構成式は次式で表される。

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\left(\eta + \frac{\tau_y}{\sqrt{\Pi}}\right)\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \quad \Pi \geq \Pi_c \quad (1)$$

ここで、 P は圧力、 η は塑性粘度、 τ_y は降伏値、 $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ は流動時のひずみ速度、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ、 $\Pi = 2\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}$ である。

不動時における構成モデルは高粘性流体モデルとし図-2(b)に示す。また、構成式を次式で表す。

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\left(\eta + \frac{\tau_y}{\sqrt{\Pi_c}}\right)\dot{\epsilon}_{ij}^v \quad \Pi < \Pi_c \quad (2)$$

式(2)の $\dot{\epsilon}_{ij}^v$ は不動時のひずみ速度、 Π_c は流動状態と不動状態の降伏基準値であり、流動限界ひずみ速度 π_c を用いて次式となる。

$$\Pi_c = (2\pi_c)^2 \quad (3)$$

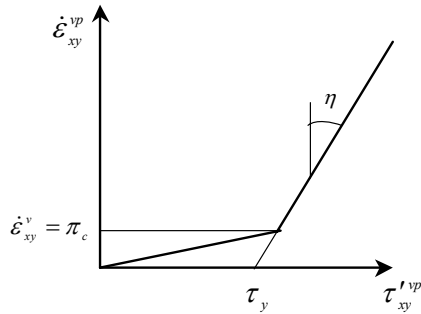


図-1 bi-viscosity モデル

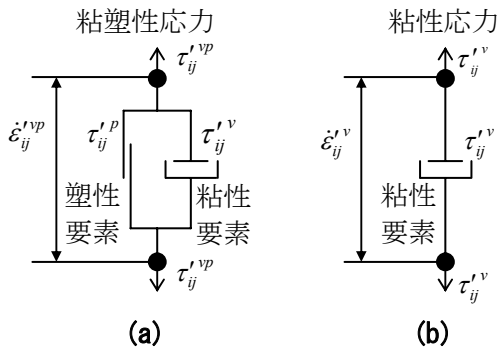


図-2 構成モデル

2.2 ビンガム流体の運動方程式

流動時のビンガム流体の運動方程式は構成式である式(1)を用い式(4)となる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = F_i - \frac{1}{\rho} \nabla P + (\eta + \Lambda) \nabla^2 u_i + 2\dot{\epsilon}_{ij} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_j} \quad (4)$$

$$\Lambda = \frac{\tau_y}{\sqrt{\Pi}} \quad (5)$$

また、式(1)、(2)で流動判定に用いられる Π はひずみ速度の関数であり次式で表される。

$$\Pi = 2\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = & \dot{\epsilon}_{xx}^{vp2} + \dot{\epsilon}_{yy}^{vp2} + \dot{\epsilon}_{zz}^{vp2} \\ & + 2\left(\dot{\epsilon}_{xy}^{vp2} + \dot{\epsilon}_{yz}^{vp2} + \dot{\epsilon}_{zx}^{vp2}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで $\dot{\epsilon}_{xx}^{vp}$ は x 方向ひずみ速度、 $\dot{\epsilon}_{yy}^{vp}$ は y 方向ひずみ速度、 $\dot{\epsilon}_{zz}^{vp}$ は z 方向ひずみ速度、 $\dot{\epsilon}_{xy}^{vp}$ 、 $\dot{\epsilon}_{yz}^{vp}$ 、 $\dot{\epsilon}_{zx}^{vp}$ はせん断ひずみ速度である。

3. MPS 法によるビンガム流体の流動解析

3.1 勾配モデル、ラプラシアンモデル⁵⁾

MPS 法は、非圧縮性流れをラグランジ的に、粒子を移動させて解く手法であり、数値解析手法の分類では粒子法として位置づけられており、式(4)に出てくる微分演算子を粒子間の相互作用によって表現することにその特徴がある。

MPS 法では連続体を有限個の粒子に置き換え、式(8)で表される重み関数を用い、粒子間相互作用を解いている。

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e - r}{r} - 1 & r \leq r_e \\ 0 & r_e < r \end{cases} \quad (8)$$

ここで r は粒子間距離、 r_e は粒子間相互作用の及ぶ範囲の半径である。

流体の支配方程式には微分演算子として勾配とラプラシアンが含まれる。MPS 法では粒子 i のある物理量を ϕ とすると勾配とラプラシアンは、重み関数 w を用いそれぞれ次式で表される。

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{\phi_j - \phi_i}{|r_j - r_i|} (r_j - r_i) w(|r_j - r_i|) \right] \quad (9)$$

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \frac{2d}{\lambda n^0} \sum_{j \neq i} [(\phi_j - \phi_i) w(|r_j - r_i|)] \quad (10)$$

ここで、 $\langle \rangle_i$ は粒子 i における粒子間相互作用モデルを表す。 r は粒子の位置ベクトル、 j は近傍粒子番号、 d は次元数、また、式(9)、(10)の n^0 は初期配置から求められた粒子数密度である。

また、粒子数密度は重み関数を用いて次式で定義する。

$$\langle n \rangle_i = \sum_{j \neq i} w(|r_j - r_i|) \quad (11)$$

式(11)は粒子 i において、粒子 i と近傍粒子である各粒子との重みの和を表している。式(10)の係数 λ は変数分布の分散を解析解と一致させるための係数であり次式より求まる。

$$\lambda = \frac{\sum_{j \neq i} [w(|r_j - r_i|) |r_j - r_i|^2]}{\sum_{j \neq i} [w(|r_j - r_i|)]} \quad (12)$$

3.2 計算アルゴリズム

前述したように MPS 法の非圧縮性流れの計算アルゴリズムは SMAC 法的手法である半陰解法アルゴリズムが用いられており、以下にそのアルゴリズムを簡単に述べる。

解くべき方程式は、下記の連続の式と運動方程式である。

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \right]^{k+1} = 0^k \quad (13)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = - \left[\frac{1}{\rho} \nabla p \right]^{k+1} + [(\eta_0 + \Lambda) \nabla^2 u_i + 2\dot{\epsilon}_{ij} \nabla \Lambda]^k + [F_i]^k \quad (14)$$

ここで、 Δt は時間刻み、 k はタイムステップである。はじめに陽的な解法として、粘性項と重力項を解き、仮速度 u_i^* と仮の位置 r_i^* を次式により求める。

$$u_i^* = u_i^k + \Delta t [(\eta_0 + \Lambda) \nabla^2 u_i + 2\dot{\epsilon}_{ij} \nabla \Lambda + F_i]^k \quad (15)$$

$$r_i^* = r_i^k + \Delta t u_i^* \quad (16)$$

ここで、粘性項に含まれる勾配とラプラシアンは、それぞれ式(9)、(10)を用いて表す。

仮の位置 r_i^* で粒子数密度 n^* を求めると、初期粒子数密度 n^0 と一致していないため、式(13)で示す非圧縮条件を満足していない。そこで、次ス

テップとして、粒子の初期配置から粒子数密度 n^0 と毎ステップで計算される粒子数密度 n^* を一致させる。そうすることで影響半径内に一定の粒子が存在するような圧力が発生し、質量が保存され非圧縮条件を満足させることができる。

粒子の圧力は、 n^* から n^0 への修正量から次式を用いて陰的に計算することができる。

$$\nabla^2 p^{k+1} = - \frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{n_i^* - n^0}{n^0} \quad (17)$$

これより得られた各粒子の圧力から、次式により修正速度 u'_i が得られる。

$$u'_i = - \frac{\Delta t}{\rho_0} \nabla p^{k+1} \quad (18)$$

修正速度 u'_i を用いて最終的に、真の速度および位置が次式で求まる。

$$\left. \begin{aligned} u_i^{k+1} &= u_i^* + u'_i \\ r_i^{k+1} &= r_i^* + r'_i \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

以上が従来の MPS 法の計算アルゴリズムであり、式(14)の材料非線形性を考慮していなかった。今回新たに、仮速度を求める陽的なステップにおいて直接反復法⁹⁾による収斂計算を行うことで計算精度の向上を可能にした。

簡単に収斂計算のアルゴリズムを示す。

- ① 仮の速度の初期速度 u_i^{*0} と仮定する。
- ② u_i^{*0} を用いて、ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ を計算する。
- ③ $\dot{\epsilon}_{ij}$ を用いて、式(15)の粘性項を計算し、 u_i^* を計算する。
- ④ 誤差判定として、次式の計算を行い、収斂判定を行う。なお、収斂条件は次式のように 0.05 以下とした。

$$\text{誤差} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (u_i^* - u_i^{*0})^2}{\sum_{i=1}^n (u_i^*)^2}} \leq 0.05$$

n : 総粒子数

- ⑤ 収斂した場合は、次の計算ステップへ進み、収斂していない場合は、 $u_i^{*0} = u_i^*$ として、②～④を繰り返す。

なお、収斂計算のループにおいても流動—不

動の判定も同時に行っている。また、ひずみ速度を精度良く求めるために、最小自乗法を用いている。具体的には、3次元空間において、粒子Iの座標を (x_i, y_i, z_i) とするとし、その近傍の速度 (u, v, w) の分布を次式の1次式で仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3z \\ v &= a_4 + a_5x + a_6y + a_7z \\ w &= a_8 + a_9x + a_{10}y + a_{11}z \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここで、 $a_0 \sim a_{11}$ は未定係数である。式(20)と各計算点(粒子位置)での速度値との差について2乗の和を J とすると、

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \sum_i (a_0 + a_1x_i + a_2y_i + a_3z_i - u_i)^2 \\ J_y &= \sum_i (a_4 + a_5x_i + a_6y_i + a_7z_i - v_i)^2 \\ J_z &= \sum_i (a_8 + a_9x_i + a_{10}y_i + a_{11}z_i - w_i)^2 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

と書ける。 J を最小にするには、それぞれの未定係数で J を偏微分したものをゼロとすればよい。つまり、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J_x}{\partial a_0} = \frac{\partial J_x}{\partial a_1} = \frac{\partial J_x}{\partial a_2} = \frac{\partial J_x}{\partial a_3} = 0 \\ \frac{\partial J_y}{\partial a_4} = \frac{\partial J_y}{\partial a_5} = \frac{\partial J_y}{\partial a_6} = \frac{\partial J_y}{\partial a_7} = 0 \\ \frac{\partial J_z}{\partial a_8} = \frac{\partial J_z}{\partial a_9} = \frac{\partial J_z}{\partial a_{10}} = \frac{\partial J_z}{\partial a_{11}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

具体的に、 J_x について書き下すと、

$$\begin{bmatrix} \sum_i 1 \\ \sum_i x_i \\ \sum_i y_i \\ \sum_i z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_i x_i^2 \\ \sum_i x_i y_i \\ \sum_i x_i z_i \\ \sum_i y_i^2 \\ \sum_i y_i z_i \\ \sum_i z_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i u_i \\ \sum_i u_i x_i \\ \sum_i v_i y_i \\ \sum_i w_i z_i \end{bmatrix} \quad (23)$$

となり、これを解いて未定係数の値が決まると、次式のようにひずみ速度成分を求めることができる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = a_2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = a_3 \quad (24)$$

同様に、 J_y, J_z についても解くと、

$$\frac{\partial v}{\partial x} = a_5, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_6, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = a_7 \quad (25)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = a_9, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = a_{10}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = a_{11} \quad (26)$$

となり、ひずみ速度を次式に示すように求める

ことができる。

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\epsilon}_{yy} & \dot{\epsilon}_{zz} \\ \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{yz} & \dot{\epsilon}_{zx} \\ \dot{\epsilon}_{yz} & \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (27)$$

4. 数値解析例

図-3に示すL型フロー試験を対象に、流動速度およびLフローに対して、本手法の検証を行った。また、解析に用いた粒子モデルを図-4に示す。なお、粒子数は39,425で、図-4のフレッシュコンクリート粒子は7,749粒子、それ以外は壁粒子①(圧力を計算する壁粒子)、壁粒子②(圧力を計算しない壁粒子)で構成する。壁境界でノンスリップ条件を設定するため、壁粒子の速度を常にゼロにし、フレッシュコンクリート粒子との間で粘性を考慮している。また、解析に用いた流動限界ひずみ速度 π_c はすべての解析で0.1とした。時間刻み Δt は初期値0.001秒を与えて解析を行うが、数値安定性を考慮して拡散数⁵⁾が0.5を満足するように自動的に Δt を計算して解析を行った。

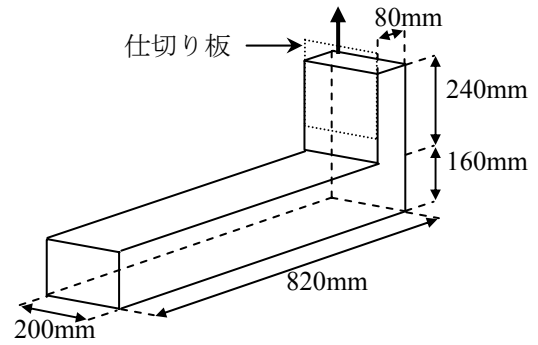


図-3 L型フロー試験機

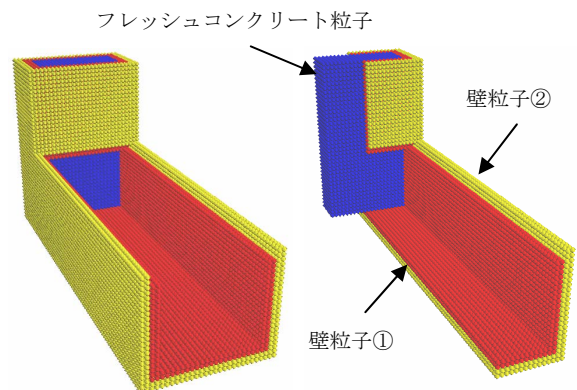


図-4 解析モデル (39,425 粒子)

4.1 流動速度の検証

表-1 に示す 3 ケースの解析条件で L フローが 15cm に到達するまでの時間および初速度の検証を行った。この解析条件は安本⁷⁾らが実験をもとに設定した値である。安本らの実験は、同じ配合条件においてもビンガム定数を測定する試験方法(球引上げ式粘度計, せん断 BOX 試験装置, 回転翼粘度計) が異なると測定結果が非常にばらつくことを示している。このため降伏値のばらつきの小さかった条件をもとに塑性粘度の最大値, 最小値, 中心値を設定し, 各種試験によるビンガム定数を入力データとした L 型フロー試験の流動解析を行い, 解析結果に及ぼす影響を議論している。

図-5 に L フローが 15 cm に到達するまでの時間と L フローとの関係を示し, 比較のために非線形性を考慮しない場合も示してある。また, 表-2 に本手法より得られた初速度を示す。比較のために実測値⁷⁾も示す。なお, 表-2, 図-5 の改良法と従来法とは, それぞれ非線形性を考慮した場合としない場合を示している。

表-2, 図-5 から改良法では安本らの実測値に近い値を示しているが, 従来法では実測値に比べ速い流れとなっていることがわかる。これより非線形性を考慮した改良法は従来法よりも数値解析の精度が向上していると言える。

表-1 解析条件

解析ケース	降伏値(Pa)	塑性粘度(Pa・s)
ケース 1	160	300
ケース 2		250
ケース 3		200

表-2 L フロー初速度の解析結果

解析ケース	初速度(cm/s)		
	改良法	従来法	実測値 ⁷⁾
ケース 1	12.30	26.45	13.9
ケース 2	13.45	28.85	
ケース 3	14.51	30.38	

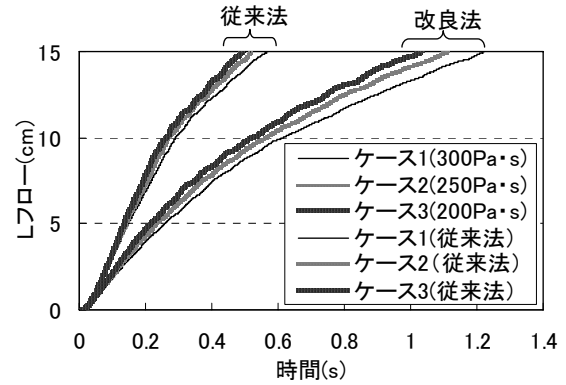


図-5 L フローの流動解析結果

4.2 L フローの検証

L フローの検証として, 表-3 に示す 2 ケースで解析を行い, 宮本⁸⁾の実験結果と比較した。図-6 に 2 ケースの L フロー曲線を示す。また, 図-7 に降伏値と L フロー (粒子の 98% が不動とはじめて判定されたときの値) の関係を示す。比較のために実測値の近似曲線も同時に示した。また, 図-8 にケース 2 の流動挙動を示す。

表-3 解析条件

解析ケース	降伏値(Pa)	塑性粘度(Pa・s)
ケース 1	100	200
ケース 2	50	

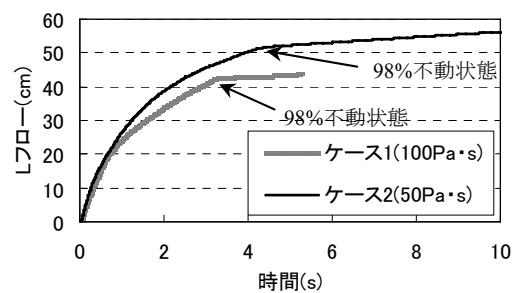


図-6 L フロー曲線

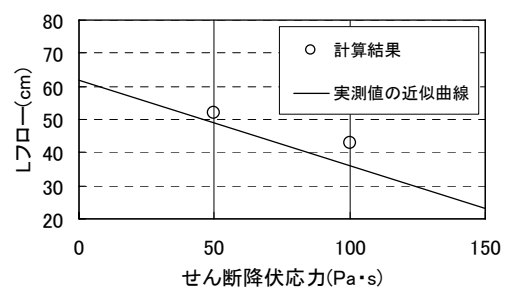
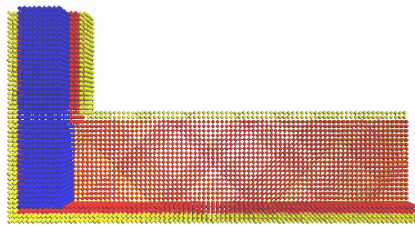
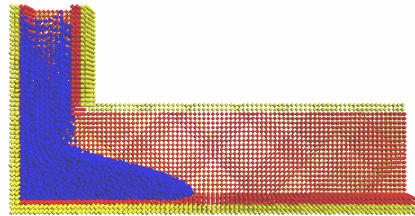


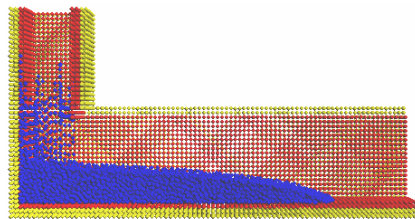
図-7 せん断応力降伏値と L フロー



(a) 0 秒



(b) 1 秒



(c) 10 秒

図-8 流動挙動(ケース 2:50Pa)

図-6 より、本解析結果は、降伏値の違いによる L フロー値の違いを表現できていることがわかる。また、図-7 から本結果は宮本らの実験結果の近似曲線の上側を示したが同様の傾向を得ることができた。図-8 の流動挙動からは流動先端が丸みを帯びた高粘性流体の流れに類似した挙動を示しているのがわかる。

5. まとめ

本研究は、ビンガム流体の流動解析における MPS 法の適用に関する数値解析精度の向上を目的に行った。以下に得られた知見と今後の課題を示す。

(1) MPS 法の解法にビンガム流体のひずみ速度に依存した非線形性を考慮することで、L 型フロー試験の初速度において非線形性を考慮していなかった従来法よりも実測値に近い結果を得ることができ、数値解析精度の向上が確認できた。

- (2) L フローの値は、宮本らの実測結果の近似曲線と同様な傾向を示した。
- (3) 今後の課題として、実問題を例に解析を行い、より詳細な検討を行う。

謝辞：本研究の一部は、平成 18 年度科学研究補助金（基盤研究(C)：課題番号：18560554，研究代表者：山田義智）による助成を受けた。ここに記して感謝の意を表す。

参考文献

- 1) 富山潤，伊良波繁雄，山田義智，松原仁，矢川元基：フリーメッシュ法によるフレッシュコンクリートの流動解析に関する研究，土木学会論文集，No.746，V-61，pp.91-101，2003
- 2) 入部綱清，伊良波繁雄，富山潤，松原仁：フレッシュコンクリートの流動問題への粒子法の適用，コンクリート工学年次論文集，Vol.25，No.1，pp.905-910，2003.
- 3) 富山潤，山田義智，入部綱清，伊良波繁雄：オイラー型有限要素法によるフレッシュコンクリート流動解析，コンクリート工学年次論文集，Vol.27，No.1，pp.1039-1044，2005.
- 4) 山田義智，大城武：フレッシュコンクリート流動解析への MAC 法への適用，コンクリート工学年次論文集，Vol.20，No.1，pp.131-136，1998.
- 5) 越塚誠一：粒子法 計算力学レクチャーシリーズ⑤，丸善株式会社，2006.
- 6) 青木勇，ほか：塑性力学の基礎-初等解析から有限要素法まで-，産業図書，2000.
- 7) コンシステンシー評価指標委員会：フレッシュコンクリートのコンシステンシー評価に関する技術の現状と課題(Ⅱ)，土木学会，pp.93-94，2003.7
- 8) 宮本欣明，山本康弘：J 型フロー試験による高流動コンクリートの流動特性・調合に関する研究，日本建築学会構造系論文集，No.547，pp.9-15，2001.9