

# 論文 鉄道橋の動的応答における部材振動性状の簡易同定法

原田 和洋\*1・杉崎 光一\*2・貝戸 清之\*3・曾我部正道\*4

**要旨**：列車の高速化のためには、構造物の共振に関する安全性や振動・騒音に関する使用性の観点から、部材の固有振動数を推定しておくことが重要となってくる。本研究では、最も一般的な鉄道構造物である RC ラーメン高架橋に関して、実験解析によるモード形同定手法を用い、多点同時計測結果から、例えば張出しスラブ 1 次 13Hz, 中間スラブ 1 次 20Hz などの、固有振動数及び振動モードを推定した。またこれら推定値を簡易に評価する手法についても適用式の種類及び剛性の考慮方法の観点から整理、考察した。

**キーワード**：鉄道 RC ラーメン高架橋, 振動モード, 固有振動数, 多点同時計測

## 1. はじめに

近年、新幹線の営業速度や試験最高速度は飛躍的に向上しており、更なる速度向上への技術開発も進められている。列車の速度向上においては、安全性の観点からは共振に対する評価が、使用性の観点からは、振動・騒音などの周辺環境への影響評価が重要な課題となってくる。これらの課題に的確に対処していくためには、構造物の振動特性を部材単位まできめ細かく把握しておく必要がある。

曾我部ら<sup>1)</sup>はコンクリート構造物を対象として、高速化に伴う全体系 1 次モードに関する共振現象を指摘し、動的設計手法を提案している。宮下ら<sup>2)</sup>は、部材振動の研究として、鋼鉄道橋における高速走行に対し、列車走行速度と局部振動についての関係を明らかにし、局部振動によって局部応力が大きくなることで、疲労上問題が発生することを指摘している。原ら<sup>3)</sup>は、高架橋張出しスラブ部材の振動が地盤振動に悪影響を及ぼす場合があること等を指摘している。

しかし、最も一般的な鉄道構造物である RC ラーメン高架橋については、振動特性や振動モードが十分には明らかにされていないのが実状である。鉄道構造物設計標準・同解説<sup>4)</sup> (以下、設計標準という)は、その設計の手引き<sup>5)</sup>において衝撃係数を算定する際に必要とされる部材の固有振動数の推定式を提供しているが、実構造物での検証は未実施となっている。

以上のような背景から本研究では、以下を研究の目的とした。

(1) 鉄道 RC ラーメン高架橋を対象として、実験解析によるモード形同定手法を用いて、多点同時計測結果から振動特性、特に振動モード形および固有振動数を推定する。

(2) 上記の成果を踏まえ部材振動の簡易な推定方法を提案する。

## 2. 振動特性の同定方法

### 2.1 実験解析を利用した振動性状の把握方法

振動特性を同定する方法は機械工学の分野でその理論や実証が多く行われている。これらの方法については、参考文献 6), 7) に詳しい。振動特性を把握する方法としては、数値解析による方法、および実験解析による方法がある。近年では、安価なセンサーが開発されたことで、多点同時計測を簡易に行なうことができるようになった。以下、鉄道構造物に設置した加速度センサーの応答値を利用して、振動モード形を把握する方法を述べる。なお、同定方法には、簡易なものから複雑なものまで理論整理されているが、本研究の目的から、最も簡易なものを利用する。本計測では、インパルスハンマーを利用した衝撃加振試験を行っている。この方法は簡易に加振ができる上に、自由振動に近い振動を励起できることに特徴がある。また、加振力に可観測性があることも特徴である。しかし、波高率が極端に大きいことや、SN 比が小さいこと、また、低周波帯域を励起しにくいことに注意が必要である。本計測では、入力インパルスハンマーによる加振であるため、力として可観測であるが、実際の構造物への入力値は未知である場合が多いため、入力が未知である場合の振動モード形の同定手法について示す。この場合には、構造物に対する入力において①構造物の減衰が小さく、各モードが近接していない、②入力が卓越した振動数成分を持たないホワイトノイズであるという 2 条件を満たした場合、以下の手順により振動同定が可能である。同期化された計測点が N 点あると考える。各計測点における加速度振動計測の離散データ

\*1 鉄道総合技術研究所 コンクリート構造 研究員 (正会員)

\*2 株式会社ビーエムシー

\*3 大阪大学大学院 グローバル若手研究者フロンティア研究拠点 特任講師 博(工)

\*4 鉄道総合技術研究所 構造力学 主任研究員 博(工) (正会員)

を  $a_n(t)(n=1, 2, 3\cdots, N)$  とする。 $a_n(t)$  に対して、フーリエ変換

$$A_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a_n(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

を施す。 $A_n(\omega)$  は加速度のフーリエスペクトルである。また、 $i$  は虚数単位を示す。このとき、任意外力が作用する構造物に対して、物理座標空間における計測点のフーリエスペクトルはモード座標空間における加速度フーリエスペクトルの和として近似的に式(2)で表すことができる。

$$\begin{aligned} A_\ell(\omega) &= \sum_{j=1}^J \phi_{j\ell} Q_j(\omega) \\ &= \sum_{j=1}^J \phi_{j\ell} \frac{-\omega^2 \phi_j F(\omega)}{(\omega_j^2 - \omega^2) + 2i\zeta_j \omega_j \omega} \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)中、 $j$  はモード次数、 $J$  は考慮するモード総数を示す。また  $\phi_{j\ell}$  は点における  $j$  次の振動モード形、 $\omega_j$  と  $\zeta_j$  は  $j$  次の固有振動数と減衰比であり、 $F(\omega)$  は外力ベクトルのフーリエ変換である。この式から減衰比が無視できるほど小さく、入力が卓越した振動数成分を持たない場合、計測点  $\ell$  のフーリエスペクトル  $A_\ell(\omega)$  は、 $\omega \approx \omega_j$  でピークを示すことがわかる。したがって、計測された加速度フーリエスペクトルに対して、卓越するピーク周波数を読み取ることにより、固有振動数の候補を特定することができる。

振動モード形は、計測点間におけるフーリエスペクトルの比で表されることから、はじめに各々の次数の振動モード形において節とならない計測点  $k$  を基準として定める。本計測では、この基準点に構造物上の加速度を採用する。次に任意の計測点の基準点  $k$  に対する加速度フーリエスペクトルの比をとると、式(2)より式(3)となる。

$$\frac{A_\ell}{A_k} = \frac{\sum_{j=1}^n \phi_{j\ell} \frac{-\omega^2 \phi_j F(\omega)}{(\omega_j^2 - \omega^2) - 2i\zeta_j \omega_j \omega}}{\sum_{j=1}^n \phi_{jk} \frac{-\omega^2 \phi_j F(\omega)}{(\omega_j^2 - \omega^2) - 2i\zeta_j \omega_j \omega}} \quad (3)$$

隣り合うモード間の固有振動数が近接しておらず、減衰比を無視し得る場合には、 $j^*$  次の固有振動数付近では、 $1/(\omega_{j^*}^2 - \omega^2)$  を含む項が支配的となる。したがって、式(4)を得る。

$$\frac{A_\ell}{A_k} \approx \frac{\phi_{j^*\ell} \phi_{j^*} F(\omega) / (\omega_{j^*}^2 - \omega^2)}{\phi_{j^*k} \phi_{j^*} F(\omega) / (\omega_{j^*}^2 - \omega^2)} = \frac{\phi_{j^*\ell}}{\phi_{j^*k}} \quad (4)$$

を得る。すなわち、 $j^*$  次の固有振動数付近では、任意の計測点の基準点  $k$  に対するフーリエスペクトルの比を、計測点間の  $j^*$  次の振動モード形振幅の比に近似することができる。ただし、これは基準点  $k$  のモード振幅で基準化された振動モード形である。また、式(4)の分子であるフーリエスペクトルの代わりに、次式(5)で表せれるような任意の計測点と基準点  $k$  とのクロススペクトルを用い

るほうがよい。

$$A_{\ell,k}(\omega) = A_\ell(\omega) \bar{A}_k(\omega) \quad (5)$$

式(5)中、 $\bar{A}_k(\omega)$  は  $A_k(\omega)$  の複素共役を表す。クロススペクトル  $A_{\ell,k}(\omega)$  は  $A_\ell(\omega)$  と  $A_k(\omega)$  の両スペクトルで共通のピーク周波数をより卓越させる性質を持つ。これはクロススペクトルが2点間の相互相関のフーリエ変換に他ならないためであり、基準点を同定対象とする次数のモード形の節でない点に設定することができれば、計測点間で相関の高い固有振動数成分がより卓越することを意味する。一方で、計測誤差のような計測点間で無相関であると考えられる誤差によって生じるピークの増大を抑制することができる。以上を考慮すると、式(4)は式(6)となる。

$$\frac{A_\ell(\omega) \bar{A}_k(\omega)}{A_k(\omega) \bar{A}_k(\omega)} = \frac{A_{\ell,k}(\omega)}{|A_k(\omega)|^2} = \frac{\phi_{j^*\ell}}{\phi_{j^*k}} \quad (6)$$

なお式(6)中、 $|A(\omega)|^2$  はパワースペクトルを表す。したがって、式(6)のピーク周波数を固有振動数に候補としてストックし、対応する振動数での  $\phi_{j^*\ell} / \phi_{j^*k}$  を算出すればよい。ただし、非減衰系ではない場合には、式(6)の  $\phi_{j^*\ell} / \phi_{j^*k}$  は複素数となる。これは、式(6)がクロススペクトルとパワースペクトルの比であることから理解できる。そこで、式(6)をあらためて式(7)で表す。

$$\frac{\phi_{j^*\ell}}{\phi_{j^*k}} = \phi_{j^*} = \text{Re}\{\phi_{j^*}\} + i \cdot \text{Im}\{\phi_{j^*}\} \quad (7)$$

ここに、 $\text{Re}$  は実部を、 $\text{Im}$  は虚部を示す。このとき、振動モード形の振幅と位相は、それぞれ式(8)、(9)となる。

$$\phi_{j^*} = \sqrt{\text{Re}\{\phi_{j^*}\}^2 + \text{Im}\{\phi_{j^*}\}^2} \quad (8)$$

$$\theta_{j^*} = \tan^{-1}(\text{Im}\{\phi_{j^*}\} / \text{Re}\{\phi_{j^*}\}) \quad (9)$$

したがって、最終的に計測点  $\ell$  の  $j$  次モードは、式(10)として与えることができる。

$$\phi_{j^*} = \begin{cases} \phi_{j^*} & (|\theta_{j^*}| \leq \pi/2 \text{ のとき}) \\ -\phi_{j^*} & (|\theta_{j^*}| > \pi/2 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (10)$$

なお、次章の適用事例では、同定された振動モード形に対して、最大振幅が1となるように基準化を行っている。

次に、得られた振動モード形の候補に対し、統計的検定手法である MAC (Modal Assurance Criteria) 検定<sup>8)</sup>を行い、MAC 値が事前に設定した基準値以上になるものを振動モード形、さらにそのときのピーク振動数を固有振動数として採用することができる。MAC 検定とは、振動モード形の理論値と実測値の相関係数である MAC 値

$$MAC = \frac{COV(\Psi \times \Xi)}{VAR(\Psi) \times VAR(\Xi)} \quad (11)$$

を指標として、MAC 値の大きさから振動モード形の候補が真の振動モード形とみなせるか否かを検定する手法である。式中  $\Psi$  は同定された振動モード形、 $\Xi$  は振動モード形の理論値のベクトル(振動モード形に採用する計測点数が  $M$  点のときには  $M$  次元)をそれぞれ示す。また、

COV は共分散を，VAR は分散をそれぞれ示す。いま，MAC 値の閾値を  $\alpha(0 \leq \alpha \leq 1)$  とすれば，条件

$$MAC \geq \alpha \quad (12)$$

を満足する候補が真の振動モードとして採用されることになる。例えば，橋梁のような梁構造の構造物を対象とする場合には，振動モード形の理論値としては，両数を用いてサインカーブを算出することで，振動モード形の理論値を得ることができる。また，有限要素法により計測モデルを作成し，固有値解析で得られる振動モード形を理論値として採用してもよい。

### 3. 実コンクリート構造物の振動特性

#### 3.1 検討方法

##### (1) 計測対象構造物

計測はコンクリート構造物，特に RC ラーメン高架橋を対象として行った。RC 単純 T 型桁における部材でも同様の試験を行った。計測対象構造物を表-1 に示す。これらを選定した理由として，構造物の中で割合が多いためである。

表-1 計測対象構造物

No	構造物種類	対象部材
1	RC 壁	高欄
2	ラーメン高架橋	中間スラブ
3		片持ちスラブ
4		縦梁・横梁
5	RC 単純 T 型桁	中間スラブ
6		片持ちスラブ

##### (2) 計測方法

計測方法について，RC 片持ちスラブを模擬した RC 壁の高欄を基本例題として取り上げて示す。RC 壁の形状および加速度センサーの配置を図-1 に示す。図中の番号は計測点番号を示す。この計測例では，12 の計測点を設けた。なお，図中の○は電圧型加速度計，●はサーボ型加速度計を示す。サーボ型加速度計は低振幅域(～約  $20\text{m/second}^2$ )しか計測ができないという性能を考慮して，基本的には振幅が小さいと考えられる箇所に配置した。サンプリング周波数は  $2000\text{Hz}$  とし，計測時間は数回の試行計測から 10 秒と設定した。加振は，ハンマー打撃による衝撃加振を用いた。打撃箇所は，高欄中央上端(計測点 4)付近を中心として，左端上端(計測点 1)，や  $L/4$  点上端(計測点 2 と 3 の中間)など複数点で行った。これは，高欄中央上端を節とする振動モード形を励起し，同定することを目的としている。写真-1 にセンサー配置状況を示す。中央上端におけるハンマー打撃を行った際の計

測点 4 での加速度応答を図-2 に示す。ハンマー打撃は，高欄から約 20cm ハンマーを離し，わずかな力で衝撃を与えた。最大振幅は， $20 \text{ m/second}^2$  となった。加速度応答は，一般的な自由振動波形であり，全計測点においても同様の傾向であった。

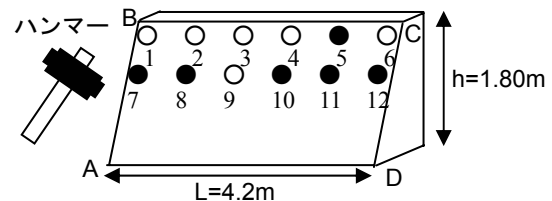


図-1 RC 壁 (高欄)



写真-1 センサー配置状況

##### (3) 振動モード形の同定方法

計測結果を利用して，2 章に示した方法によりモード形の同定を行う。まず，基準点としては，いずれのモードの節にならない点，かつ低次モードの腹にならない点として計測点 11 とした。次に，基準点と各計測点のクロススペクトルを算出する。さらに，基準点を入力し，各計測点を出力として全計測点の伝達関数も併せて求めた。一例として，計測点 4 のクロススペクトルを図-3 と伝達関数を図-4 に示す。図中，複数のピークを確認することができるが，これらのピーク周波数を固有振動数の候補としてストックした。対応する振動数での伝達関数の振幅を読み取り，振動モード形の振幅とした。また，ピーク周波数の位相情報を利用して， $-\pi/2 \sim \pi/2$  であれば同位相，それ以外であれば逆位相として振動モードに ± の符号を与えた。なお，得られた振動モード形に対しては，最大振幅が 1 となるように基準化を行った。同定結果の一例を図-5 に示す。 $83\text{Hz}$  で 1 次の振動モード形， $94\text{Hz}$  で 2 次のモード形を同定することが可能であった。1 次では全体が倒れるようなモードであり，2 次では自由端がねじれるモードであった。これ以外の振動数においても，明瞭なピークを確認したが，規則性のある幾何形状ではなかったため，高欄とは異なる部材の振動が混入したか，あるいは音響振動であると判断した。なお，打撃位置において，中央上端では 2 次モードを確認するこ

とができなかったが、打撃位置を計測点1近傍に変更した際は同定可能であった。

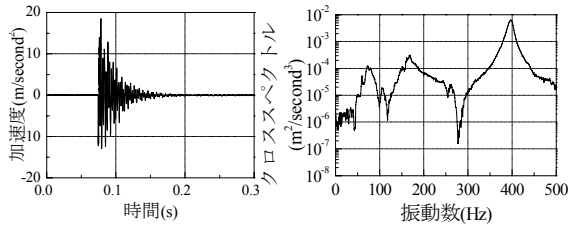
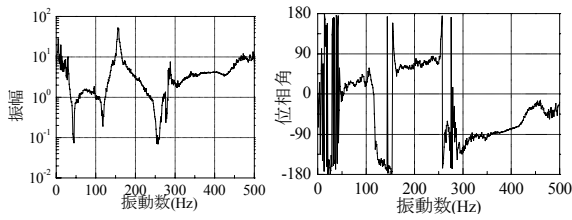


図-2 加速度応答

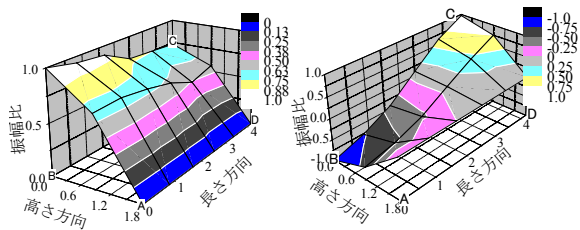
図-3 クロススペクトル



(a)振幅

(b)位相角

図-4 伝達関数



(a)83Hz

(b)94Hz

図-5 計測振動モード（高欄）

### 3.2 結果の整理

高欄と同様に、その他の構造物でも計測結果をもとに振動モード形を同定した結果を示す。また、あわせて三次元FEMにより固有モードを算出し比較した。

#### (1) ラーメン高架橋

##### a) 中間スラブ

中間スラブの計測におけるセンサー配置を図-6に示す。センサーは縦梁のスパンを6等分、横梁のスパンを4等分し、その格子上の点に25個を配置した。同定した振動モードおよび振動数を図-7に示す。加振位置はスラブ中央とし計測を行った。計測結果の1次の固有振動数は20Hzと推定される。解析結果を図-8に示す。解析結果では21Hzで同様の振動モードが得られた。計測結果の96Hzでは2次の振動モードが得られた。

##### b) 張出しスラブ

張出しスラブの計測におけるセンサー配置を図-9に示す。橋軸方向は、端横梁間を12等分し、予測されるモード形状にあわせて図中の位置に配置した。橋軸直角方向には、張出し長を3等分した位置に配置した。同定した振動モードを図-10に示す。また、解析結果を図-

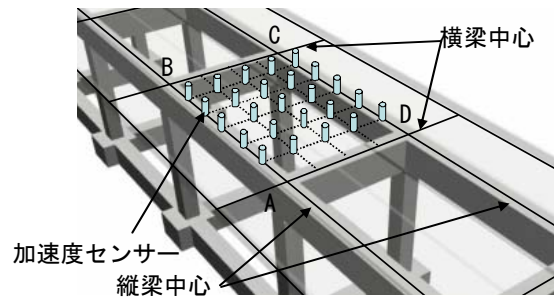
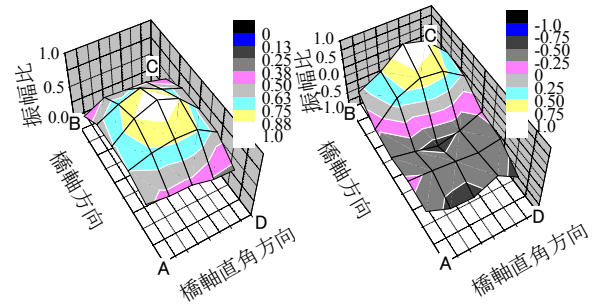


図-6 センサー配置（中間スラブ）



(a)20Hz

(b)96Hz

図-7 計測振動モード（中間スラブ）

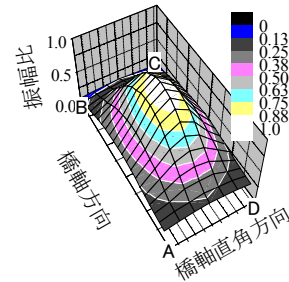


図-8 解析振動モード（中間スラブ）21Hz

11に示す。解析結果では、1次の固有振動数は13Hzであった。計測結果では、13Hzにピークが確認できたが、解析結果とは異なる振動モードであった。これは、張出しスラブに取付けられている電柱基礎の影響により、加振した振動が全体に伝わらず、同様の振動モードではなかったと考えられる。このため、境界条件が明確でなく、綺麗なモードが得られないものがあつた。19Hzでは中央部がたわみ端部が逆位相となる振動モードであった。

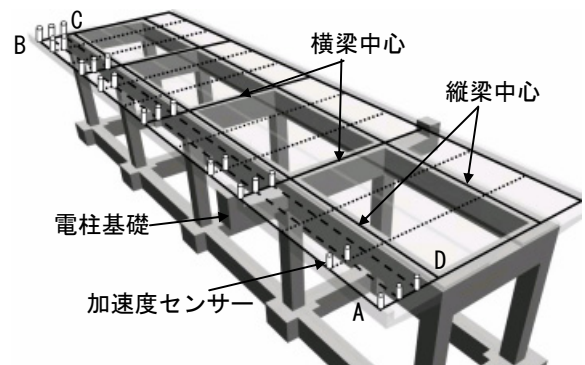


図-9 センサー配置（張出しスラブ）



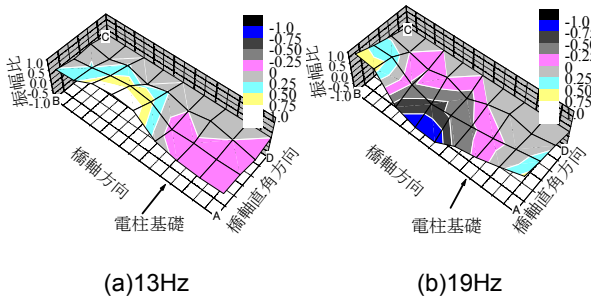


図-10 計測振動モード（張出しスラブ）

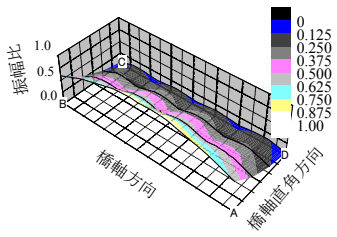


図-11 解析振動モード（張出しスラブ）13Hz

### c) 縦梁および横梁

縦梁および横梁の計測におけるセンサー配置を図-12に示す。センサー配置において、縦梁は横梁中心間を12等分し、横梁においては縦梁中心間を12等分した位置に配置した。縦梁と横梁の同定した振動モードおよび振動数と解析結果を図-13に示す。縦梁、横梁の計測結果については、綺麗な振動モードが得られなかった。これは、梁にスラブが取り付けられており、その境界が明確ではなく、スラブと練成して振動しているためと考えられる。また、解析結果に比べ計測結果の固有振動数が大きい結果であった。実構造では、梁上に路盤コンクリートが配置されている。解析では、路盤コンクリートの質量は考慮しているが、剛性は考慮されていない。このため、計測結果では梁の剛性に路盤コンクリートの剛性が寄与し、解析結果を上回る結果となったと考えられる。

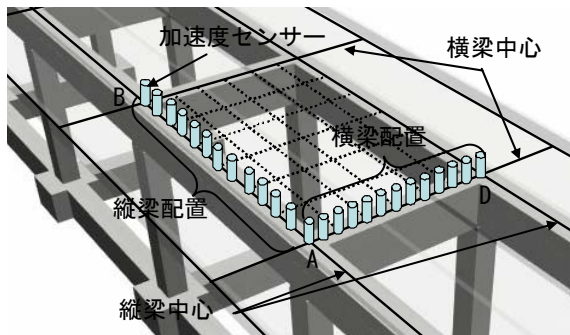


図-12 センサー配置（縦梁・横梁）

### (2) RC単純T型桁

#### a) 中間スラブ

中間スラブの計測におけるセンサー配置は図-6に示

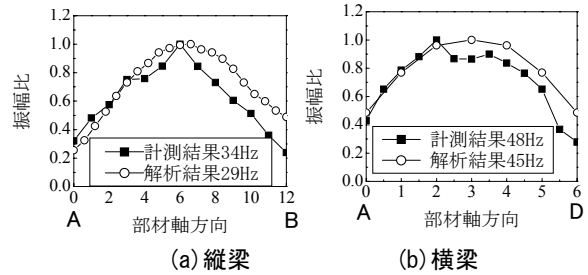


図-13 計測および解析振動モード（縦梁・横梁）

すラーメン高架橋の中間スラブと同様である。同定した計測振動モードを図-14、解析振動モードを図-15に示す。ラーメン高架橋と同様の振動モードが得られ、解析結果とも比較的近い値を示している。

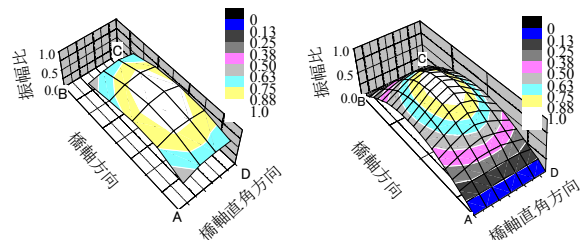


図-14 計測振動モード19Hz 図-15 解析振動モード17Hz

### b) 張出しスラブ

張出しスラブの計測におけるセンサー配置は、図-7のラーメン高架橋と同様である。計測結果および解析結果を図-16、17に示す。計測結果と解析結果が同様の振動モードとなり、固有振動数の同定が可能であった。これは、電柱基礎の取付けが無く、スパンも短いため、部材全体の加振が容易であったためと考えられる。

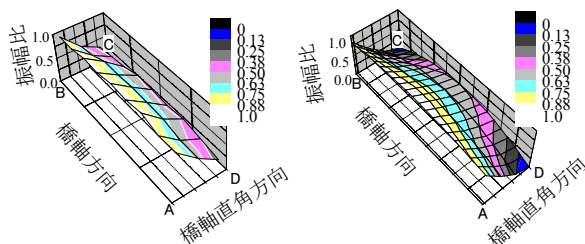


図-16 計測振動モード11Hz 図-17 解析振動モード11Hz

## 4. 実コンクリート構造物の部材振動推定法

### 4.1 土木学会による推定法

土木学会の構造力学公式集<sup>9)</sup>では、部材の固有振動数を求める際の算定式が提案されている。計測した部材を対象とした振動数の算定式を以下に示す。

・梁の固有振動数: 式(13)に片持ち梁, 式(14)に単純梁, 式(15)に両端固定梁の固有振動数算定式を示す。

$$n = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \sqrt{\frac{3EI \cdot g}{\rho A(\mu + 0.23)}} \quad (13)$$

表-2 振動数の比較

		計測 (Hz)	FEM 解析 (Hz)	簡易式						
				固定支持(Hz)		単純支持(Hz)		使用数値		
				路盤コンクリート		路盤コンクリート		部材 寸法(m)	E (kN/m <sup>2</sup> )	単位重量 (kN/m <sup>3</sup> )
				非考慮	考慮	非考慮	考慮			
ラーメン 高架橋	中間スラブ	20	21	30	61	16	31	a=5.2,b=9.2	2.5E+7	24.5
	張出しスラブ	13	13	13				λ=2.6		
	縦梁	34	29	25	33	11	14	λ=10.0		
	横梁	48	45	94	143	40	63	λ=6.0		
単純 T型桁	中間スラブ	19	17	42	79	21	40	a=5.2,b=9.2		
	張出しスラブ	11	12	13				λ=2.6		

$$n = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \sqrt{\frac{48EI \cdot g}{\rho A(\mu + 0.49)}} \quad (14)$$

$$n = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \sqrt{\frac{192EI \cdot g}{\rho A(\mu + 0.38)}} \quad (15)$$

ここに、λは部材の長さ(m)、Eは部材のヤング係数(kN/m<sup>2</sup>)、Iは部材の曲げ剛性(m<sup>4</sup>)、Aは部材の断面積(m<sup>2</sup>)、gは重力加速度(m/s<sup>2</sup>)、ρは部材の単位重量(kN/m<sup>3</sup>)、μ(=m/ρAλ)、mは集中質量(kN)を示す。

・スラブの固有振動数：式(16)に四辺単純支持および固定支持スラブの固有振動数算定式を示す。

$$n = k \frac{\pi}{2a^2} \sqrt{\frac{D \cdot g}{\rho \cdot h}} \quad (16)$$

ここに、k(=b/a)は長辺、短辺比率、支持条件(固定または単純)による係数、aは短辺長さ(m)、bは長辺長さ(m)、Dは部材の曲げ剛性(kN・m<sup>2</sup>)、hは部材厚(m)を示す。

#### 4.2 推定法との比較

計測結果、解析結果および構造力学公式集による推定法より求めた振動数の一覧を表-2に示す。支持条件は固定支持と単純支持とした。路盤コンクリート剛性の考慮の有無についても検討した(図-18)。ヤング係数や路盤コンクリートの影響が明確でないため、必ずしも全ての現象を説明しきれていないが、設計への対応の観点からは表中で着色したケースが妥当であると考えられる。

縦梁は、ラーメン径間数が多いため支持条件の固定度が高くなっていると推定される。また全スパンに渡り路盤コンクリートが設置されているためその影響も大きくなったと推定される。

横梁、中間スラブは、計測および解析より支持条件の固定度があまり大きくないことが推定され、また路盤コンクリートも間欠となるため影響は少ないと推定される。

#### 5. まとめ

本研究では、実験解析によるモード形同定手法を用いて、以下の知見を得た。

(1) 多点同時計測結果から標準的な鉄道RCラーメン高

架橋の振動特性、例えば、梁出スラブ1次13Hz、中間スラブ1次20Hzなど、固有振動数および振動モードを推定した。その結果、FEM解析結果とも比較的よい一致を示した。

(2) 上記の推定値を簡易式で評価する手法について適用式の種類および剛性の考慮方法を整理した。

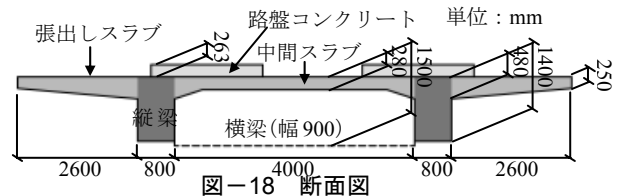


図-18 断面図

#### 参考文献

- 1) 曾我部正道,松本信之,藤野陽三,涌井一,金森真,宮本雅章,吉田一博: 共振領域におけるコンクリート鉄道橋の動的設計法に関する研究,土木学会論文集 No.724/I-62,83-102, 2003.1
- 2) 宮下剛,石井博典,藤野陽三,庄司朋宏,関雅樹: レーザ計測を用いた鋼鉄道橋の高速走行により発生する局部振動の把握と列車速度の影響,土木学会論文集 A Vol.63, No.2, 277-296, 2007.4
- 3) 原恒雄ほか: 新幹線走行に伴う沿線地盤振動低減のための高架橋補強工の開発,土木学会論文集 No.766/I-68,325-338,2004.7
- 4) (財)鉄道総合技術研究所: 鉄道構造物設計標準・同解説-コンクリート構造物,丸善,2004.4
- 5) (財)鉄道総合技術研究所: 照査例 RC ラーメン高架橋,2005.3
- 6) 日野幹雄: スペクトル解析, 朝倉書店, 1977
- 7) 長沼昭男: モード解析,倍風館,1985.7
- 8) 長山智則,阿部雅人,藤野陽三,池田憲二: 常時微動計測に基づく非比例減衰系の非反復構造逆解析と長大吊橋の動特性の理解,土木学会論文集 No.745/I-65,155-169,2003.10
- 9) (社)土木学会: 構造力学公式,博栄社,1986.6