論文　最適化理論に基づいたRC構造物の鉄筋径・かぶりの推定手法に関する研究

王　会娟[*1]・倉橋　貴彦[*2]・大下　英吉[*3]

要旨：本研究は，電磁波レーダによる鉄筋モルタル試験体への入射波と鉄筋からの反射波に基づいて試験体内部に存在する鉄筋の径およびかぶりを推定するものである。具体的手法は鉄筋からの反射波を計測波として，随伴変数法に基づく形状最適化理論によるものである。構築手法は計測波と有限要素法に基づき計算された反射波の残差二乗和で定義された評価関数を最小とする最適な鉄筋径とかぶりを同時に推定するものである。鉄筋径とかぶりの真値と異なる初期値を設定し，解析後求まった鉄筋径とかぶりの値は真値よりほぼ96%以上の精度が得られた。

キーワード：電磁波レーダ法，形状最適化理論，鉄筋径，かぶり

1.　はじめに

近年，鉄筋コンクリート構造物の維持管理の重要性が高まり，実用的かつ高精度な劣化診断技術の確立が急務となってきている。特に，鉄筋のかぶり，鉄筋径や間隔と言った配筋状態を非破壊手法で予測することは，鉄筋腐食，かぶりコンクリートの剥落，構造物の耐荷力という耐久性能や構造物性能のみならず，施工管理においても非常に重要である。

鉄筋の径やかぶりに関する現在の主たる非破壊検査手法には，電磁レーダ法，電磁誘導法などが挙げられる。かぶりに関しては，いずれの手法においても比較的精度良く推定が可能であるが，鉄筋径に関しては電磁誘導法のみによる推定に留まるが,その精度にやや問題がある。すなわち，現時点において，鉄筋径を高精度に推定する手法は確立されておらず，かぶりも同時に評価可能とする手法は皆無であるといっても過言ではない。

本研究は，電磁レーダ法により鉄筋の径やかぶりを同時にかつ精度良く評価することのできる非破壊検査手法の確立を最終目的として，その基礎的研究に位置付け，形状最適化理論に基づいて鉄筋の径とかぶりを同時に推定可能とする手法を構築する。

2.　形状最適化理論に基づく鉄筋径およびかぶりの推定手法の構築

2.1　評価関数

本研究においては，鉄筋モルタル試験体表面のある計測点における鉄筋からの反射波と有限要素法に基づき計算された反射波を一致させるような最適な鉄筋径とかぶりを同時に推定するものである。したがって，評価関数は計算により求まった反射波と計測波の残差二乗和により式(1)のように定義する。

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\int_{\Omega}\left(u-u_{obs.}\right)Q\left(u-u_{obs.}\right)d\Omega dt \tag{1}$$

$u_{obs.}$：計測波の振幅の時系列値(単位：volt)
u：計算波の振幅の時系列値(単位：volt)
t_f：計測時間の終端時刻，7ns と設定している
Q：重み定数，計測点においては 1
それ以外は 0 とする

形状最適化問題においては，式(2)に示す波動方程式および式(3)～式(6)に示す初期条件と境界条件のもとで評価関数を最小とする鉄筋径およびかぶりを求めることとなる。ここで，η は減衰係数であり，電磁波は試験体における減衰効果を把握していないため，この項をゼロとしている。c は真空中の光速である。また，$\dot{u}$ は $\partial u/\partial t$，$\ddot{u}$ は $\partial^2 u/\partial t^2$，$u_{,i}$ は $\partial u/\partial x_i$，$u_{,ii}$ は $\partial^2 u/\partial x_i{}^2$ を示す。

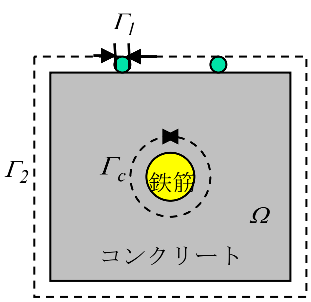
$$\ddot{u}+\eta\dot{u}-c^2u_{,ii}=0 \tag{2}$$

$$u=0 \quad at \quad t=t_0 \quad in \quad \Omega \tag{3}$$

$$\dot{u}=0 \quad at \quad t=t_0 \quad in \quad \Omega \tag{4}$$

$$u=\hat{u} \quad on \quad \Gamma_1 \tag{5}$$

$$c^2u_{,i}n_i=0 \quad on \quad \Gamma_2 \quad and \quad \Gamma_c \tag{6}$$



図－1　計算領域

*1　中央大学大学院　理工学研究科土木工学専攻　博士前期課程 2 年　(学生会員)
*2　長岡技術科学大学　機械系　機械情報・制御工学大講座助教　工博　(非会員)
*3　中央大学　理工学部土木工学科教授　工博　(正会員)

計算領域は**図−1**に示すように定義される。Γ_1 は電磁波を入力する境界，Γ_2 は入力点以外の表面境界，Γ_c は鉄筋周りの境界，Ω はそれ以外の境界を示す。

2.2　拡張評価関数

本研究では，式(1)に示した評価関数の最小化問題を解くことにより鉄筋周りの座標値を推定することとなる。この評価関数には，計算値が含まれていることから，式(2)に示す波動方程式および式(3)〜式(6)に示す初期条件および境界条件を拘束条件とした拘束付きの最小化問題に帰着されることとなる。拘束条件付きの最小化問題に対して随伴変数 λ を導入すると，式(1)に示す評価関数は波動方程式を用いることにより式(7)のように拡張することができる。

$$J^* = J + \int_{t_0}^{t_f} \int_\Omega \lambda\left(\ddot{u} + \eta\dot{u} - c^2 u_{,ii}\right) d\Omega dt \tag{7}$$

2.3　停留条件

拡張評価関数 J^* は u の関数であり，それは時間 t の関数でもあることから，汎関数であることがわかる。汎関数の最小化問題を議論するに当たり停留条件の導出を行う。停留条件は拡張評価関数 J^* の第一変分を計算することで導くことができ，拡張評価関数 J^* の第一変分は式(8)のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta J^* &= \frac{\partial J^*}{\partial u}\delta u + \frac{\partial J^*}{\partial \lambda}\delta\lambda \\
&= \int_{t_0}^{t_f}\int_\Omega (u - u_{obs.})Q\delta u d\Omega dt \\
&+ \int_{t_0}^{t_f}\int_\Omega \lambda\left(\delta\ddot{u} + \eta\delta\dot{u} - c^2 u_{,ii}\right) d\Omega dt \\
&+ \int_{t_0}^{t_f}\int_\Omega \delta\lambda\left(\ddot{u} + \eta\dot{u} - c^2 u_{,ii}\right) d\Omega dt
\end{aligned} \tag{8}$$

式(8)に対してグリーン・ガウスの積分定理を適用して整理すると，式(9)で表すことができる

$$\begin{aligned}
\delta J^* &= \int_{t_0}^{t_f}\int_\Omega \delta\lambda\left(\ddot{u} + \eta\dot{u} - c^2 \delta u_{,ii}\right) d\Omega dt \\
&+ \int_{t_0}^{t_f}\int_\Omega \left\{\ddot{\lambda} - \lambda\eta - c^2\lambda_{ii} + (u - u_{obs.})Q\right\}\delta u d\Omega dt \\
&+ \int_\Omega \left\{\lambda(t_f)\delta\dot{u}(t_f) - \lambda(t_0)\delta\dot{u}(t_0)\right\} d\Omega \\
&- \int_\Omega \left\{\dot{\lambda}(t_f)\delta u(t_f) - \dot{\lambda}(t_0)\delta u(t_0)\right\} d\Omega \\
&+ \int_\Omega \left\{\lambda(t_f)\eta\delta u(t_f) - \lambda(t_0)\eta\delta u(t_0)\right\} d\Omega \\
&- \int_{t_0}^{t_f}\int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_c} \lambda c^2 \delta u_{,i} n_i d\Gamma dt \\
&+ \int_{t_0}^{t_f}\int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_c} \lambda_{,i} c^2 \delta u n_i d\Gamma dt
\end{aligned} \tag{9}$$

拡張評価関数に含まれる各条件は停留条件のため，最終的に式(9)に示す拡張評価関数 J^* の第一変分 δJ^* がゼロとなる。式(9)において右辺第一項は波動方程式を示しており，右辺第二項は随伴変数 λ により構成される随伴方程式であり式(10)で表される。そして，式(3)式(4)に示す初期条件および式(5)式(6)に示す境界条件を考慮すると，波動方程式および随伴方程式を解く際に必要とされる計算条件は式(11)〜式(13)のようになる。

$$\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}\eta - c^2\lambda_{,ii} + (u - u_{obs.})Q = 0 \tag{10}$$

$$\lambda = 0 \quad at \quad t = t_f \quad in \quad \Omega \tag{11}$$

$$\dot{\lambda} = 0 \quad at \quad t = t_f \quad in \quad \Omega \tag{12}$$

$$c^2 \delta u_{,i} n_i = 0 \qquad on \qquad \Gamma_2 \quad and \quad \Gamma_c \tag{13}$$

ここで，式(10)に示した随伴方程式は式(11)と式(12)で示した終端条件が与えられているため，終端から初期に向かって逆時間方向に解くことになる。

本研究においては，境界 Γ_c における座標値のみを設計変数としており，それ以外の境界においては座標値を規定するため δx_i がゼロとなる。また，鉄筋の座標値は時間方向に対して不変であるため，拡張評価関数 J^* の座標値 x_i に対する勾配は，全時間領域において積分したものである。したがって，式(14)に示すように拡張評価関数 J^* の座標値 x_i に対する勾配の式が導出されこの勾配をゼロとするような繰り返し計算により鉄筋の座標値が更新されることとなる。

$$\frac{\partial J^*}{\partial x_i} = \int_{t_0}^{t_f} (c^2 \lambda_{,i} n_i) u_{,i} dt \tag{14}$$

2.4　拡張評価関数の最小化手法

拡張評価関数の最小化手法には，Sakawa・Shindo らにより提案された勾配法 [1)] を適用する。すなわち，拡張評価関数 J^* にペナルティ項を付加した修正拡張評価関数を導入する。境界 Γ_c における未知となる座標の変化量が繰り返し計算過程においてほぼゼロとなるまで計算した際，無視することができる項となっている。したがって，拡張評価関数 J^* の座標 x_i に対する勾配をゼロとするような繰り返す計算のアルゴリズムを構築する際に，式(15)に示す修正拡張評価関数 K を導入する。

$$K^{(l)} = J^{*(l)} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\int_{\Gamma_c} XW^{(l)} X d\Gamma dt \tag{15}$$

ここで，(l) は繰り返し計算回数，W は重みパラメータ，X は式(16)で表される。

$$X = x_i^{(l+1)} - x_i^{(l)} \tag{16}$$

式 (15) に示す修正拡張評価関数 K を最小化するには，停留条件を導き出す必要がある。拡張評価関数 J^* と同じように修正拡張評価関数 K の第一変分を計算することで次のように停留条件を導くことができる。

$$\begin{aligned}
\delta K^{(l)} &= \int_{t_0}^{t_f}\int_{\Gamma_c} \frac{\partial K^{(l)}}{\partial u^{(l)}}\frac{\partial u^{(l)}}{\partial x_i^{(l)}}\delta x_i^{(l)} d\Gamma dt \\
&= \int_{t_0}^{t_f}\int_{\Gamma_c} \left(\frac{\partial J^{*(l)}}{\partial u^{(l)}}\frac{\partial u^{(l)}}{\partial x_i^{(l)}} + XW^{(l)}\right)\delta x_i^{(l)} d\Gamma dt = 0
\end{aligned} \tag{17}$$

式(17)は式(18)となる。

$$\frac{\partial K^{(l)}}{\partial u^{(l)}}\frac{\partial u^{(l)}}{\partial x_i^{(l)}}=\frac{\partial J^{*(l)}}{\partial u^{(l)}}\frac{\partial u^{(l)}}{\partial x_i^{(l)}}+XW^{(l)}=0 \tag{18}$$

最終的に，鉄筋周りの境界 Γc における座標 x_i の更新式は，式(19)のように表すことができる。

$$X^{(l+1)}=X^{(l)}-\frac{1}{W^{(l)}}\frac{\partial J^{*(l)}}{\partial u^{(l)}}\frac{\partial u^{(l)}}{\partial x_i^{(l)}} \quad on \quad \Gamma_c \tag{19}$$

式(19)に示す座標 x_i の更新式を用いることで繰り返し計算アルゴリズムは以下のように示すことができる。

Step1 境界 Γ_c 上における鉄筋周りの初期座標値 $x_i^{(l)}$ および収束判定定数 ε を設定する。

Step2 波動方程式より $u^{(l)}$ を算定し，評価関数 $J^{(l)}$ を計算する。

Step3 随伴方程式より $\lambda^{(l)}$ を算定し，拡張評価関数 $J^{*(l)}$ の座標値 $x_i^{(l)}$ に対する勾配 $\partial J^{*(l)}/\partial x_i^{(l)}$ を計算する。

Step4 境界 Γ_c 上において式(20)に基づき座標値を更新し $x_i^{(l+1)}$ とする。

Step5 収束判定を行う。

If $\left|J^{(l)}\right|<\varepsilon$ then Stop else go to Step 6

Step6 波動方程式より $u^{(l+1)}$ を算定し，評価関数 $J^{(l+1)}$ を計算する。

Step7 重みパラメータ $W^{(l)}$ の更新を行う。

If $J^{(l+1)}\leq J^{(l)}$ then $W^{(l+1)}=2.0W^{(l)}$ go to Step 3

else $W^{(l+1)}=0.9W^{(l)}$ go to Step 4

2.5 波動方程式と随伴方程式の離散化

波動方程式および随伴方程式に対して，有限要素法を適用する際，空間方向の離散化にはガラーキン法を適用すると次式となる

$$M\ddot{u}+\eta M\dot{u}+c^2H_{,ii}u=F \tag{20}$$

$$M\ddot{\lambda}-\eta M\dot{\lambda}+c^2H_{,ii}\lambda+P=S \tag{21}$$

ここで,

$$M=\int_{\Omega_e}\Phi\Phi^T d\Omega \tag{22}$$

$$H_{,ii}=\int_{\Omega_e}\Phi_{,i}\Phi_{,i}{}^T d\Omega \tag{23}$$

$$F=\int_{\Gamma_2+\Gamma_c}\Phi c^2 u_{,i}n_i d\Gamma_2+\Gamma_c \tag{24}$$

$$P=\int_{\Omega_e}\Phi Q(u-u_{obj.})d\Omega \tag{25}$$

$$S=\int_{\Gamma_c}\Phi c^2\lambda_{,i}n_i d\Gamma_c \tag{26}$$

そして，式(20)および式(21)を時間方向に差分法を適用して，離散化すると式(27)および式(28)になる。

$$u^{n+1}=\frac{F^n\Delta t^2M^{-1}+2u^n-c^2H_{,ii}\Delta t^2M^{-1}u^n+(0.5\Delta t\eta-1)u^{n-1}}{0.5\Delta t\eta+1} \tag{27}$$

$$\lambda^{n-1}=\frac{(S^n-P^n)\Delta t^2M^{-1}+2\lambda^n-c^2H_{,ii}\Delta t^2M^{-1}\lambda^n+(0.5\Delta t-1)\lambda^{n+1}}{0.5\Delta t\eta+1} \tag{28}$$

ここに，n は時間ステップを表す。

3. 鉄筋径とかぶりの推定

3.1 実験概要

(1) 電磁波レーダ装置と試験体

本研究で使用した電磁波レーダ装置は**図－2** に示し，中心周波数 1GHz のパルス方式で，送受信アンテナが分離型となっている。

試験体は**図－3** に示すように 300mm×300mm×500mm の形状寸法で有筋と無筋モルタル試験体 2 台がある。有筋試験体においては，かぶり 60mm 試験体の中心位置に直径 25mm の丸鋼が設置されている。なお、有筋と無筋モルタル試験体の配合は，w/c=0.45，s/c=2.5 である。試験体を脱型後温度２０℃湿度 60%の恒温恒湿室に 3 ヶ月置いた後に計測を行った。送信アンテナと受信アンテナは同図に示すように，試験体の中心から左右 36mm の位置に設置した。また，計測により試験体の比誘電率は 13 である。

(2) 試験体への入射波形

試験体への入射波は，**図－4** に示すものであり，ゲイン 55.5dB と設定したものである。これは**図－5** に示す受信アンテナでの計測波をもとに，波の伝搬逆解析により推定したものである。

(3) 鉄筋からの反射波形の抽出

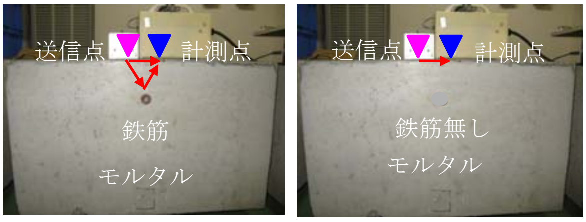
図－3(a) に示した受信アンテナでは，鉄筋からの反射波に加えて送信アンテナから試験体表面を直接伝搬した波(以下直達波と称す)も受信することとなる。波形は**図－6** に示すとおりである。本来であれば，受信した全波形を計測値として前章で構築した理論に適用すべきであるが，推定精度の向上のためには，全波のうち鉄筋からの反射波成分のみを抽出する必要がある。そこで，本研究では，**図－3(b)** に示す鉄筋を設置していない**図－3(a)** と同じ形状寸法の試験体で直達波を計測した（**図－7**）。そして,**図－6** に示す全受信波形から**図－7** に示す直達波成分を除いた波形を計測された鉄筋からの反射波形とした。得られた反射波形は**図－8** に示す通りであり，計算においてはこの波形を計測波としている。なお，実構造物のように，複数本の鉄筋が配筋された状態への本手法の拡張に際しては，対象とする鉄筋のみからの反射波形を抽出しなければならなく，これに関しては今後の課題としたい。

3.2 推定値と精度の検討

2 章で構築したモデルに**図－5** に示す試験体への入射波と**図－8** に示す計測波を適用し，鉄筋径とかぶりの推

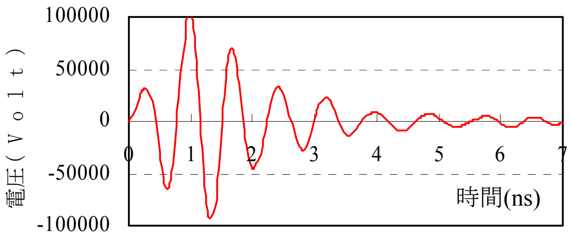
装置本体　　　　　　送受信アンテナ

図－2　電磁波レーダ装置

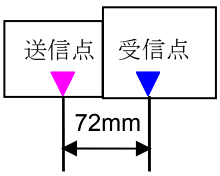


(a)　有筋試験体　　　　　(b)　無筋試験体

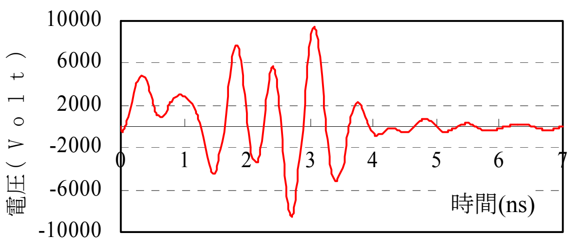
図－3　試験体への送受信アンテナの設置概要



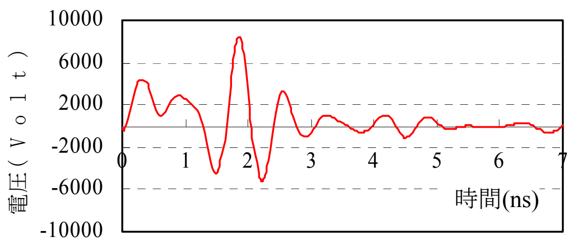
図－4　試験体への入射波形



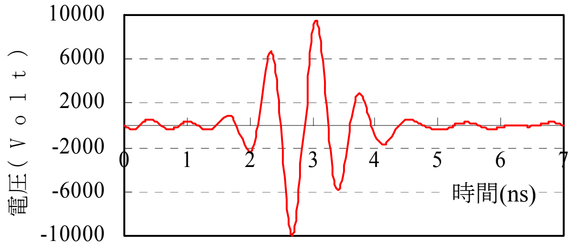
図－5　電磁波レーダ装置送受信アンテナの設置



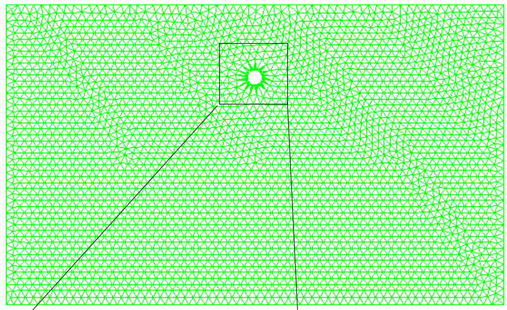
図－6　図－3(a)の計測点で受信した波形



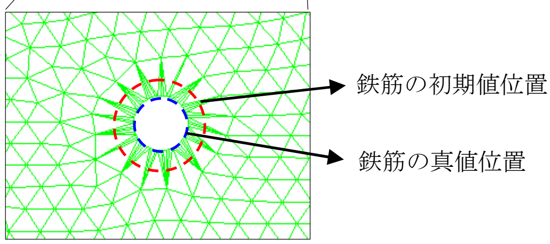
図－7　図－3(b)の計測点で受信した波形



図－8　鉄筋からの反射波(計測波)



(a)　解析メッシュ(nodes=3210 elements=6162)



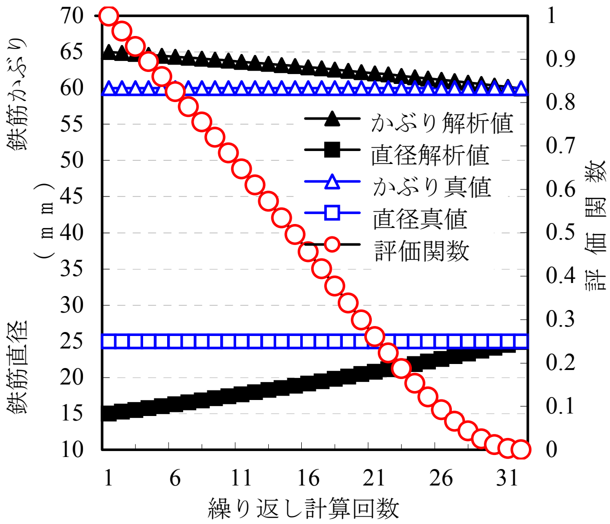
(b)　局所拡大図

図－9　鉄筋に関する初期条件

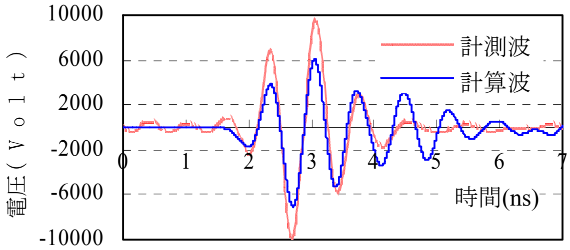
表－1　解析条件

時間増分 Δt(ns)	0.001
時間ステップ数	7001
初期重みパラメータ W(0)	1×10^{9}
比誘電率	13
入力周波数(GHz)	1
真空中の光速(m/s)	3×10^{8}
収束判定定数 ε	1×10^{-3}

定を実施することとなる。解析における鉄筋に関する初期条件は**図－9** に示すように直径が 15mm，かぶりが 65mm である。なお,解析条件は**表－1** に示す通りである。**図－10** は，繰り返し計算に応じた鉄筋直径およびかぶりの推定値であり，各図中には評価関数も表している。**図－10** 示すように評価関数は繰り返し計算によりほぼゼロとなっており，鉄筋直径とかぶりの解析値が真値に近づいていることがわかった。評価関数が最小となった時点における鉄筋直径およびかぶりは，それぞれ 24.9mm および 60.0mm であり，真値とほぼ一致している。このときに得られた計算波は**図－11** に示すように計測波と良好な一致を示している。



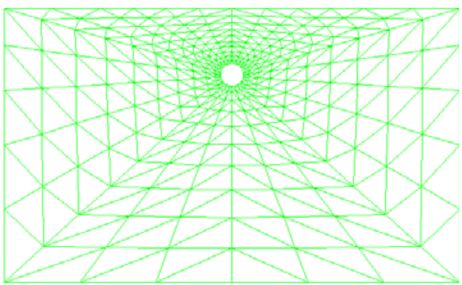
図−10　評価関数および鉄筋直径とかぶり解析値の変化



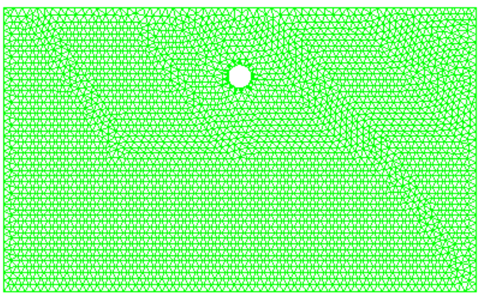
図−11　計測波と計算波の比較

3.3　推定精度に及ぼすメッシュおよび時間増分依存性

本節では，推定精度に及ぼすメッシュ依存性ならびに時間増分の依存性について検討する。解析に用いたメッシュ図は，図−12 に示すケース 1 とケース 2 であり，それぞれ節点数 308，要素数 560 および節点数 3210 要素数 6162 である。



(a)　ケース 1 (nodes=308 elements=560)

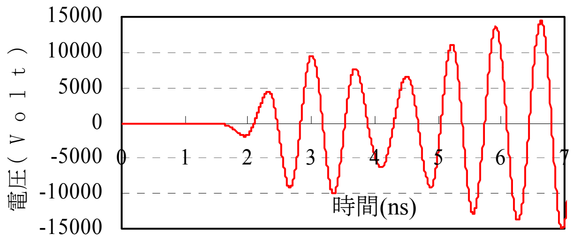


(b)　ケース 2 (nodes=3210 elements=6162)

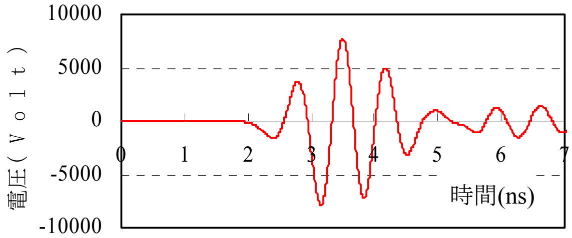
図−12　メッシュ図

(1)　時間増分 0.01ns の場合

ケース 1 のメッシュを用いた場合，図−13 に示す波形が得られ，図−8 に示した波形とは時間後半部においては異なるものとなった。この結果にたいして，図−12(b) に示すケース 2 のメッシュを用いた場合，図−14 に示す波形が得られ，ケース 1 の場合に比べ，図−8 に近い波形であることがわかる。本検討では，両ケースにおいて波速は同じ値を用いているため，メッシュの大きさを小さく設定した場合，時間増分も同様に小さい値に設定する必要がある。よって，ケース 2 のメッシュに対して時間増分をより小さく設定した場合について検討を行う。



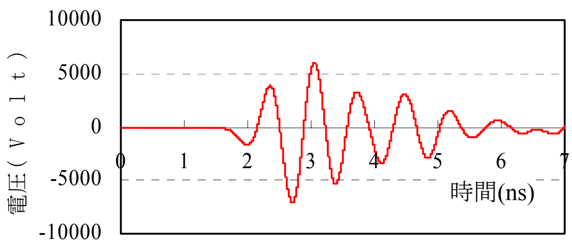
図−13　ケース 1 計算波形



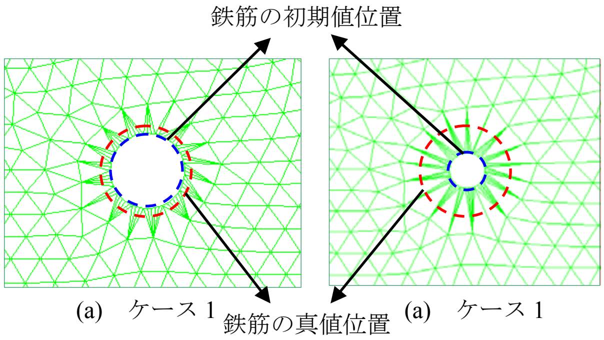
図−14　ケース 1 計算波形

(2)　時間増分 $\Delta t = 0.001$ns

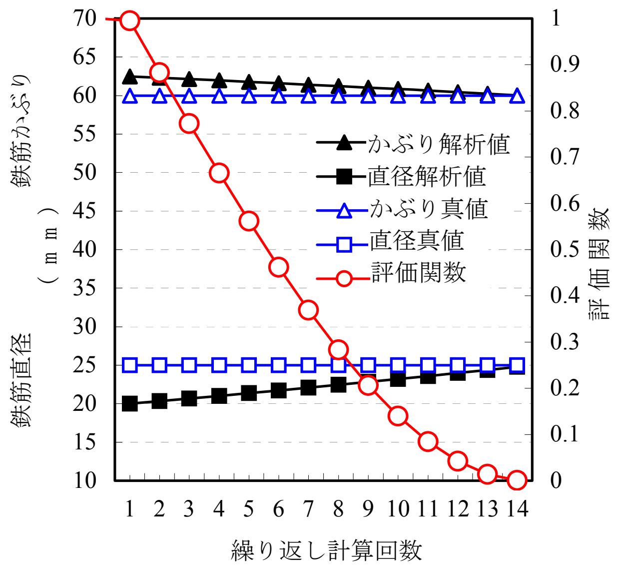
ケース 2 のメッシュに対して，時間増分を 0.001ns とした場合の結果を図−15 に示す。図−15 を図−8 に示す計測波と比較すると，時間増分 0.01ns と設定した場合に比べ良好な一致を示していることがわかる。よって，メッシュを細かく設定し，時間増分を適切に与えた場合は，実験の状況をシミュレーションにより適切に再現できるものと考えられる。



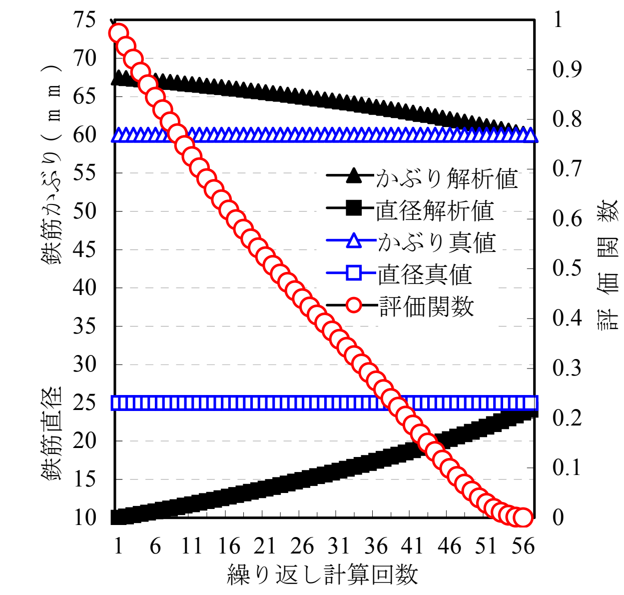
図−15　ケース 2 計算波形 ($\Delta t = 0.001$ns)



図－16　鉄筋に関する初期条件



図－17　評価関数および鉄筋直径とかぶり解析値の変化（ケース 1 の計算結果）



図－18　評価関数および鉄筋直径とかぶり解析値の変化（ケース 2 の計算結果）

3.4　推定精度と計算時間に及ぼす初期値依存性

本節では,推定精度と計算時間に及ぼす初期値の依存性について検討する。検討に際しては，図－16 示すように，鉄筋直径とかぶりが真値に近いケース 1 およびかけ離れたケース 2 の 2 種類とした。具体的な設定値は，前者のケース 1 では直径 20mm かぶり 65mm，後者のケースでは直径 10mm かぶり 67.5mm である。

計算結果は，図－17 と図－18 に示すようになり，ケース 1 の場合は 14 回の繰り返し計算回数で収束しているのに対し, ケース 2 では 56 回の繰り返し計算を要する結果となった。また，両ケースにおいて推定された鉄筋径とかぶりの値は，ケース 1 では 247.8mm，60.0mm，ケース 2 では 24.1mm，60.0mm となっており，両ケースとも真値と良好に一致していることがわかる。

以上の結果を踏まえ，鉄筋径とかぶりの推定計算において，真値とかけ離れたメッシュを初期入力値として用意した場合, 反復的に行う計算の回数は増加するものの，初期メッシュに依存せず，鉄筋径およびかぶりは適切に推定することができると言える。

4.　おわりに

本研究においては最適化理論と有限要素法を組み合わせたシミュレーションにより鉄筋モルタル試験体内部における鉄筋直径およびかぶりに関する推定計算を行った。鉄筋直径とかぶりの推定精度は真値と比較したところ 96%以上となった。

しかしながら，本稿では，未知パラメータは鉄筋直径とかぶりを対象としており，試験体の含水率が一定の条件下における比誘電率は既知であるものとして計算を行った。実構造物においては，乾湿変化に起因して構造物表面からの位置により含水率は異なるため，含水率に依存する比誘電率も位置により異なることがある。よって，今後は，電磁波強度に着目し，電磁波強度に及ぼす鉄筋直径, 位置, および含水率の影響に関する実験を実施し，各要因の関連性を把握する上で，鉄筋直径、かぶりの他に, 含水率に依存する比誘電率を未知パラメータに加え，３種のパラメータを同時に推定する手法について検討を行う予定である。

謝辞：本論文の作成に当たり，アイレック技建株式会社に電磁波レーダ装置をご提供頂いた。ここに記して謝意を表す。

参考文献

1) Y.Sakawa and Y.Shindo: On Global Convergence of An Algorithm for Optimal Control, IEEE Trans. On Automatic Control, Vol.ac-25, No.6, pp.1149-1153, 1980