

# 論文 選点法と調和解析法を導入した混合法による道路橋補強床版の数値解析

横山 広<sup>\*1</sup>・安東 祐樹<sup>\*2</sup>・関口 幹夫<sup>\*3</sup>・堀川 都志雄<sup>\*4</sup>

**要旨**：劣化した道路橋床版の下面側からの補強対策では、補強材が支持桁で遮られることで連続していないため、床版の挙動は急激な断面変化を持つ変断面版の特性を呈すると推測される。また補強材の一体化を検討する際には、主として既設床版との付着性状を把握することが肝要であるが、変断面版を対象とした解析手法は未だ確立されていない。本研究では厚板理論と薄板理論による混合法に選点法と調和解析法を組み合わせた新規の解析手法を変断面版に適用し、その妥当性を検証した。数値解析の結果から実用上十分な成果が得られたので、本手法は実橋で遭遇する各種の変断面版に応用できることが判った。

**キーワード**：鉄筋コンクリート床版、厚板理論、薄板理論、混合法

## 1. はじめに

道路橋床版の維持管理の場面では、各種の要因で劣化が進行した床版の上面、あるいは下面側に補強材を一体化させる工法が広く採用されている<sup>1)</sup>。代表的な工法には床版下面側にエポキシ樹脂で 4.5mm の鋼板を接着する鋼板接着工法や、シート状に織られた炭素繊維をエポキシ樹脂で含浸接着させる炭素繊維シート接着工法、及びポリマーセメントモルタルを吹き付け、もしくはコテ塗りする下面増厚工法が挙げられる。これら下面側の床版補強では、補強材の端部が主桁位置に至っていないこともあり、力学的見地からすると補強床版を変断面版として考慮する必要があると考えられる。

床版劣化対策の補強効果を確認する手段として、計算の立場からは鉄筋コンクリート構造として補強材を換算する方法や一部には有限要素法による算定値が参照されており、また実験的な照査では輪荷重走行試験機下での耐久性試験から得られる計測結果との照合も行われている<sup>2)</sup>。しかしながら、補強材と床版との連続性の評価には、はく離現象を引き起こす接触界面での付着せん断応力に着目することが特に重要となるが、簡便でかつ高精度の解析手法が無いのが現状である。一方、厚板理論のみで変断面版を解析する場合には、境界条件の処理を含めて煩雑な手続きとなり、現実的な手法でないことが想定される。そこで本研究では、接触界面での厳密な応力や変位を得ることに主眼を置き、厚板理論による混合法に選点法と調和解析法を組み合わせた新しい手法を開発し、補強床版を想定した変断面版に適用する。これらの

方法を駆使することにより、主桁と合成される補強床版の解析も可能となるので、実橋床版での応力や変位が容易に把握できると推測される。

## 2. 混合法の概要と変断面版への適用

混合法は特解に厚板理論から導かれる全周単純支持の級数解と、境界条件を満足させる同時解に薄板理論の解を用いて構成されている。本解法は局所的な応力・変位の挙動が把握できることに加え、種々の境界条件をもつ床版の解析が容易にできる特長を有している<sup>3)</sup>。

### 2.1 混合法での特解と同時解の基礎式

採用する座標軸  $x, y$  は版の中央面に置き、 $z$  軸を鉛直方向に取る (図—1)。

#### (1) 特解

厚板理論は重調和型の変位関数  $f_3$  と調和型の関数  $\theta_3$  から導かれ、その基礎式は次のように示される。

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)^2 f_3 &= 0 \\ (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) \theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$x, y$  および  $z$  方向の変位  $u, v$  および  $w$  と変位関数との関係は以下に与えられる。

$$\begin{aligned} 2\mu u^p &= -\partial_x \partial_z f_3 + \partial_y \theta_3, \\ 2\mu v^p &= -\partial_y \partial_z f_3 - \partial_x \theta_3, \\ 2\mu w^p &= \mu / (\lambda + \mu) \{ \partial_z^2 + (\lambda + 2\mu) / \mu (\partial_x^2 + \partial_y^2) \} f_3 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \partial_x &= \partial / \partial x, \quad \partial_y = \partial / \partial y, \quad \partial_z = \partial / \partial z \\ \partial_x^2 &= \partial^2 / \partial x^2, \quad \partial_y^2 = \partial^2 / \partial y^2, \quad \partial_z^2 = \partial^2 / \partial z^2 \\ \mu, \lambda &: \text{ラメの定数, 上添字 } p \text{ は特解を意味する.} \end{aligned}$$

\*1 ショーボンド建設(株) 北陸支店工事技術課課長 (正会員)

\*2 ショーボンド建設(株) 補修工学研究所

\*3 東京都土木技術センター 技術調査課

\*4 大阪工業大学 都市デザイン工学科 工博

式(1)を三角級数で展開すれば、次のように示される。

$$f_3 = \Sigma \Sigma [C_1 ch\gamma z + C_2 sh\gamma z + C_3 zch\gamma z + C_4 zsh\gamma z] \sin \beta_n y \sin \alpha_m x$$

$$\theta_3 = \Sigma \Sigma [C_5 ch\gamma z + C_6 sh\gamma z] \cdot \cos \beta_n y \cos \alpha_m x \quad (3)$$

ここで、 $C_1 \sim C_6$ は版の上・下面での境界条件から決定される積分定数で、 $\alpha_m = m\pi/a$ 、 $\beta_n = n\pi/b$ 、 $a$ 、 $b$ :  $x$ 、 $y$ 方向のスパンである。

式(3)を式(2)に代入して、変位  $u$ 、 $v$  および  $w$  を求める。次に3次元のフックの法則により、それぞれの応力  $\sigma_x^p$ 、 $\sigma_y^p$ 、 $\dots$ 、 $\tau_{yz}^p$  が得られる。さらに各応力を版厚方向に積分することで、版の曲げ問題に対応する断面力  $M_x^p$ 、 $M_y^p$ 、 $\dots$ 、 $Q_y^p$  が、また引張り問題での面内力  $N_x^p$ 、 $N_y^p$ 、 $N_{xy}^p$  が求められる。例えば、曲げモーメント  $M_y^p$ 、せん断力  $Q_y^p$ 、面内力  $N_{xy}^p$  は以下の式から得られる。

$$M_y^p = \int \sigma_y^p z dz, \quad Q_y^p = \int \tau_{yz}^p dz, \quad N_{xy}^p = \int \tau_{xy}^p dz \quad (4)$$

薄板理論との整合性を図るために、自由辺の処理については換算せん断力  $V_y^p$  を導入する。

$$V_y^p = Q_y^p + \partial x M_{xy}^p \quad (5)$$

## (2) 同時解

微小変形理論での薄板理論は、曲げ問題と引張り問題に分離される。

### a. 曲げ問題

版のたわみ  $w^h$  の基礎式は以下のように示される。

$$D(\partial x^2 + \partial y^2)^2 w^h = 0 \quad (6)$$

ここで、 $D$ : 曲げ剛性、上添字  $h$  は同時解を示す。

### b. 引張り問題

2次元タイプの変位関数  $\phi^h$  の基礎式は3次元体と同様に誘導される。

$$H(\partial x^2 + \partial y^2)^2 \phi^h = 0 \quad (7)$$

$x$ 、 $y$  方向の変位  $u_0^h$  と  $v_0^h$  と関数  $\phi^h$  との関係を以下に示す。

$$Hu_0^h = \{(1-\nu)\partial x^2 + 2\partial y^2\}\phi^h,$$

$$Hv_0^h = -(1+\nu)\partial x\partial y\phi^h \quad (8)$$

ここで、 $H$ : 延び剛性、 $\nu$ : ポアソン比

床版の曲げと引張り問題が同時に発生する場合、版厚方向の変位  $u^h$  と  $v^h$  の分布は次のように求められる。

$$u^h = u_0^h - z\partial x w^h, \quad v^h = v_0^h - z\partial y w^h \quad (9)$$

式(6)と式(7)から、 $w^h$  と  $\phi^h$  は式(3)と同様に三角級数で表わされる。

$$w^h = \Sigma [A_m ch\alpha_m y + B_m sh\alpha_m y + C_m \alpha_m y ch\alpha_m y + D_m \alpha_m y sh\alpha_m y] \sin \alpha_m x,$$

$$\phi^h = \Sigma [I_m ch\alpha_m y + J_m sh\alpha_m y + K_m \alpha_m y ch\alpha_m y + L_m \alpha_m y sh\alpha_m y] \cdot \cos \alpha_m x \quad (10)$$

ここで、 $A_m \sim D_m$  および  $I_m \sim L_m$ :  $y$  方向の両端辺の境界条件から決定される積分定数を示す。

式(10)を式(9)に代入することにより、変位  $u^h$  と  $v^h$  が得られる。さらにフックの法則を用いて、同時解での断面

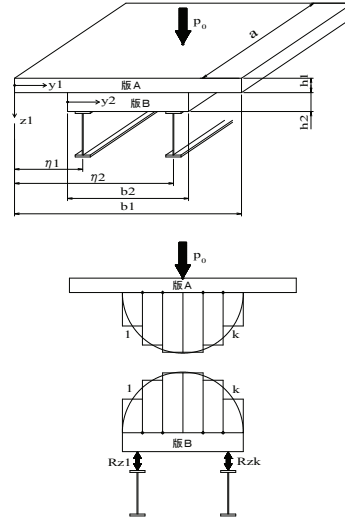


図-1 変断面版のモデル

力  $M_x^h$ 、 $M_y^h$ 、 $\dots$ 、 $N_{xy}^h$  が得られる。

## 2.2 変断面版への適用

$x=0$ 、 $a$ の対辺が単純支持、残りの2辺  $y=0$ 、 $b$ が自由で、かつ  $y$  方向の版厚が急変する変断面版(図-1)の解析は、界面及び桁との間で授受される伝達力や反力を選点法を全面的に適用して計算することもできるが、本研究では計算精度を向上させる意味で  $x$  方向に調和解析法を、 $y$  方向には選点法<sup>4)</sup>を適用する。その手順を以下にまとめる。

- (1) 自由辺を有する版の上・下面に種々の荷重が作用する場合の基本解を作成する。
- (2) 変断面版をAとBに区分し、分離した界面に作用する分布応力を選点法により離散的なパルス状の伝達力  $X_j$ 、 $Y_j$ 、 $Z_j$  ( $i=1, k$ )に置き換える。
- (3) Aの床版には外荷重  $p_0$  と伝達力が作用し、Bの床版には伝達力と支持桁との合成作用による反力  $R_{xj}$ 、 $R_{zj}$  ( $j=1, t$ ) が働く。これらの力が作用する場合のAの床版下面の変位  $u_1$ 、 $v_1$ 、 $w_1$  と、同様にBの床版上面の変位  $u_2$ 、 $v_2$ 、 $w_2$  を誘導する。ただし、伝達力と桁からの反力の大きさは単位荷重とする。
- (4) 伝達力の中心点におけるそれぞれの変位を連続させることにより、桁の反力  $R_{xj}$  と  $R_{zj}$  が単位荷重である場合に対して、伝達力に関する柔性マトリックスからその大きさの比(=影響係数)を求めておく。
- (5) 床版Bの下面での  $x$  と  $z$  方向の変位  $u_3$ 、 $w_3$  と桁の上面の水平変位  $u_B$  とたわみ  $w_B$  との合成条件から、桁からの反力の大きさを決定する。さらにこれらの反力と影響係数を用いて、各々の伝達力の大きさを確定する。
- (6) 最終的に得られた界面の伝達力、桁反力および外荷重を考慮して、床版AとBに生じる変位や応力、その積分値である断面力が算出される。

なお、選点法でのブロック形状は矩形だけでなく、計算精度が向上する台形も採用可能であり、本研究の単純支持版では台形を採用している。

### 2.3 解析手法の妥当性

本解析手法の妥当性を検証するものとして *Timoshenko* による古典解<sup>5)</sup> との比較を表-1 に示した。等分布荷重  $q$  を受ける矩形版 ( $\nu=0.3$ ) の形状はスパン比  $b/a=2.0$ 、版厚比  $h/a=0.1$  とし、支持桁 (桁幅  $a=0.02$ ) の曲げ剛性を無限大としている。計算結果のたわみと応力はそれぞれ ( $E/qa$ ) と ( $1/q$ ) の物理量を乗じて無次元化している。表によれば、層数を2層とした場合 (選点ブロックの総数を5に設定) でも1層とほぼ同等であり、古典解との比較では両辺自由の支持条件ではほぼ等しい。その他の条件のたわみは桁幅の影響で1割程度の差があるが値は同等であることから、本研究で提案する解析手法は良好な精度を有しており、今後実験等による検証も必要であるが、実用上の問題はないと推察される。

### 3. 計算モデル

計算モデルを図-2 に示す。床版幅を2500mmとし、橋軸方向の長辺を5000mmとした。上面増厚工法2の計算では桁を考慮しているが、その位置は端部より100mmとしているため床版の支間長は2300mmとなる (図-2(c))。床版厚さは昭和39年の道路橋示方書による190mmを基準とし、上面増厚床版では10mmの切削を考慮して180mmとした。計算に用いた物性値は表-2の通りで、下面増厚工法ではポリマーセメントモルタルのポリマーの増減によるヤング係数の変化を示すものとして2種類を設定し、上面増厚では既設床版の劣化程度を表現するためにヤング係数を低下させた計算も行った。道路橋床版はひび割れの拡がりに応じて補修されており、版の性状を發揮している範囲を対象とする本研究の範囲では、ヤング係数の低減によるひび割れ床版の評価で十分に実用的であると考えている。なお、補強材料の硬化収縮が有害なひずみとなることも想定されるが、材料として改善すべき問題であるため本研究では力学的見地から活荷重による影響のみ対象とする。

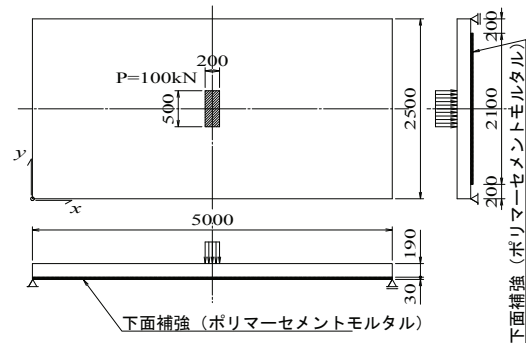
### 4. 数値計算例

#### 4.1 下面増厚工法

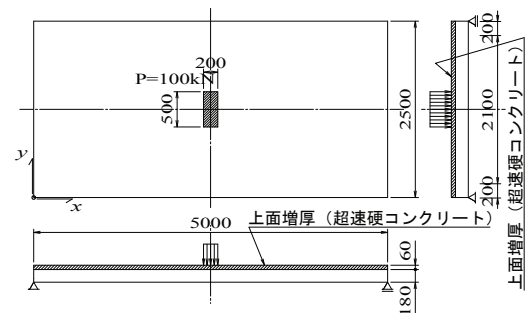
下面増厚工法の計算結果 (選点ブロック総数は10に設定) を図-3 および図-4 に示す。図-3 によれば、下面増厚材料のヤング係数が1/2に低下することで、床版中央のたわみがCASE-1で0.54mm、CASE-2で0.62mmとなり、その比は約1.14倍まで大きくなるのが判る。図-4(a)の床版下縁の曲げ応力分布では、版中央から

表-1 古典解との比較

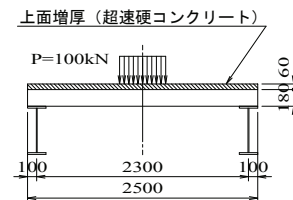
計算ケース	項目	座標		層数		古典解 Timoshenko	A/C	B/C	
		y/a	z/a	2(選点法)					
				A	B				
両辺自由	1(中央)	0.05	w	143.5	142.9	140.8	1.02	1.01	
				$\sigma_x$	74.3	74.1	74.1	1.00	1.00
				$\sigma_y$	21.8	22.0	21.8	1.00	1.01
	0(自由辺)	0.05	w	171.6	164.1	166.1	1.03	0.99	
				$\sigma_x$	81.1	79.1	79.7	1.02	0.99
				$\sigma_y$	0	0	0	0.00	0.00
一辺自由 中央桁支持 (一辺自由、他辺固定)	0(自由辺)	0.05	w	132.9	123.0	140.4	0.95	0.88	
				$\sigma_x$	61.7	58.9	67.2	0.92	0.88
				$\sigma_y$	0	0	0	0.00	0.00
自由辺近傍で桁支持 (全周単純支持)	1(中央)	0.05	w	123.3	110.7	110.6	1.11	1.00	
				$\sigma_x$	60.7	60	61	1.00	0.98
				$\sigma_y$	27.9	28.1	27.8	1.00	1.01



(a) 下面増厚工法



(b) 上面増厚工法 1



(c) 桁付き床版の断面 (上面増厚工法 2)

図-2 計算モデル

表-2 物性値

種別	厚さ (mm)	ヤング係数 ( $\text{kN}/\text{mm}^2$ )	ポアソン比	備考
下面増厚工法	コンクリート床版	23.5	0.2	—
	ポリマーセメントモルタル	15		CASE-1
		7.5		CASE-2
上面増厚工法	コンクリート床版	23.5	0.2	CASE-3
	超速硬コンクリート	14.0		CASE-4
		33.0		0.17

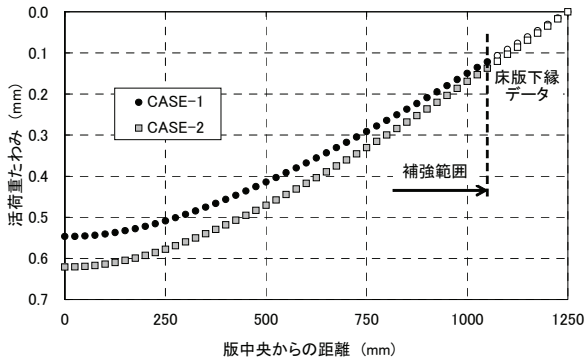


図-3 増厚材下縁の活荷重たわみ分布

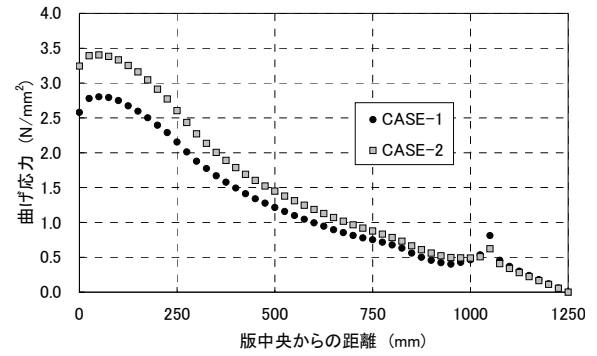
1050mm の近傍で直線的に変化していない。これは、増厚部の自由端の断面変化による影響と考えられる。また版中央点での応力が他の点よりも低いのは分割ブロックの設定位置、すなわち中央点とブロックの端部が一致しているためと推察される。図-4(b)は増厚材下縁の曲げ応力分布であり、応力度レベルは床版下縁よりも小さい値で推移し、端部近傍では僅かに大きくなる傾向が認められる。図-4(c)の付着せん断応力の分布は版中央から250mm 離れた位置の荷重の端部付近でピーク値を示し、CASE-1 の場合で  $\tau=0.12\text{N/mm}^2$  程度の値となっており、CASE-2 の2倍近い値である。それらのピーク値付近は平坦な分布であるが、これは選点法のブロック分割の影響を受けているためと推量される。なお、力学的には増厚材の最端部は特異点となるが、荷重端付近に匹敵するピークが増厚材端部近傍にも発生しており、端部近傍も弱点になることが伺える。

下面増厚工法では付着性能の改善の他に、施工後の増厚層のひび割れを制御するためにポリマーの含有量を増加させることで対処されるが、その際には補強効果が大きく変動することに注意を払う必要がある。

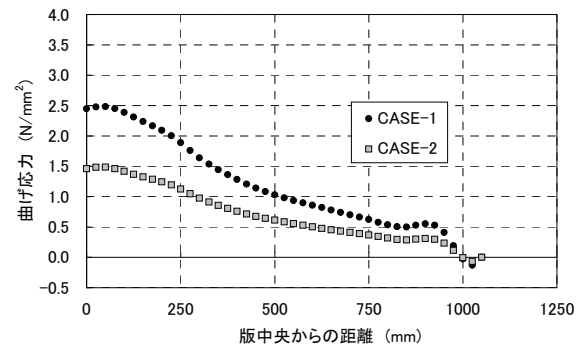
#### 4.2 上面増厚工法 1

上面増厚工法は高速道路の床版補強工法として多くの実績を有している。しかしながら、増厚材料の超速硬コンクリートはその性質上強度が大きくなる傾向にあり、疲労によりひび割れが進展した既設床版との一体性が持続的に確保できるかが課題である。

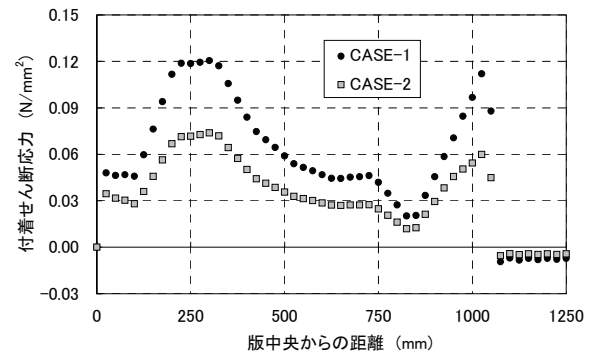
選点ブロックの総数を 20 とした場合の活荷重たわみの分布を図-5 に示す。既設床版が健全であると仮定した CASE-3 では中央の活荷重たわみが 0.32mm 程度であるのに対し、ひび割れが発生している状態を考慮した計算では 0.44mm と約 1.4 倍程度まで大きくなる。参考として下面増厚工法で増厚材の厚さを 60mm とし、ポリマーセメントモルタルのヤング係数が  $E=15.0\text{kN/mm}^2$  で、かつ既設床版のヤング係数が同じである場合の結果でも活荷重たわみの値が 0.41mm 程度であることから、上面



(a) 床版下縁の曲げ応力分布 (y方向)



(b) 増厚材下縁の曲げ応力分布



(c) 付着せん断応力分布

図-4 下面増厚の応力分布 (橋軸直角方向)

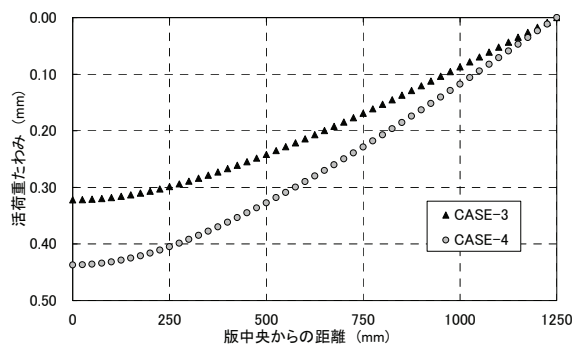
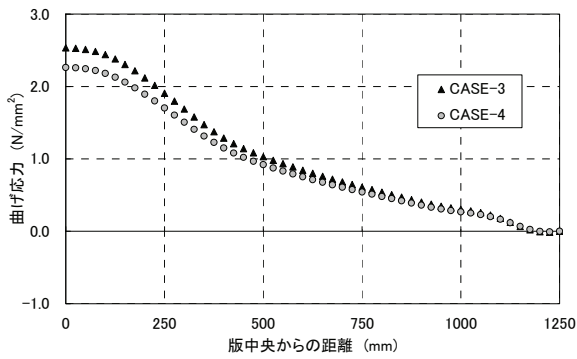
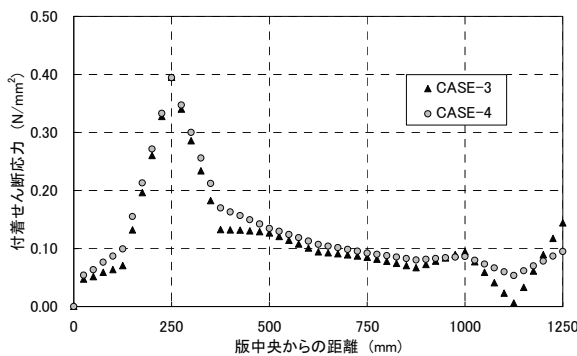


図-5 既設床版下縁の活荷重たわみの分布



(a) 床版下縁の曲げ応力分布



(b) 付着せん断応力分布

図-6 上面増厚の応力分布（橋軸直角方向）

増厚工法の方が剛性向上への寄与が大きいことが理解できる。

図-6(a)の曲げ応力分布によると既設床版のヤング係数の違いは中央の応力値で1.12倍程度の差となることが判った。その応力レベルは下面増厚工法よりも小さく、活荷重たわみと同様に上面増厚工法の剛性向上の効果が伺える。図-6(b)の付着せん断応力の計算結果では、下面増厚工法と同様に  $L=250\text{mm}$  の荷重端近傍にピークがあり、 $\tau=0.40\text{N/mm}^2$  程度の大きい値である。このピーク値の大きさは既設床版のヤング係数の大小のに影響がなくほぼ同等である。下面増厚工法では  $\tau=0.12\text{N/mm}^2$  がピーク値であり上面増厚工法が約 3.3 倍となっている事が判る。この理由は増厚層と既設床版の界面が荷重作用位置に近いことが挙げられるが、増厚層のヤング係数が既設床版よりも大きいことによる影響も含まれていると考えられる。なお、床版端部で値が増減しているが、これは増厚層の引張りによる軸方向力の影響と選点ブロックの分割による影響が加味されて生じたものと考えられる。

コンクリート系材料の付着せん断応力の許容値の設定はないが、例えば防水層では  $\tau_a=0.2\text{N/mm}^2$  が推奨されている。一般に樹脂材料系のずれ・はく離現象を伴う終局状態は、コンクリートの引張り強度が小さいことに起因することが推察される。本研究による付着せん断応力の計算結果は、実橋床版でのはく離現象についての貴重

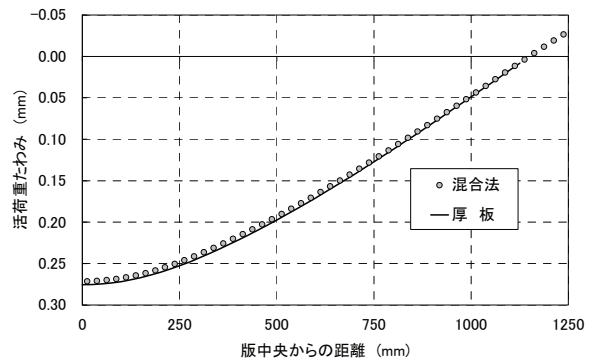
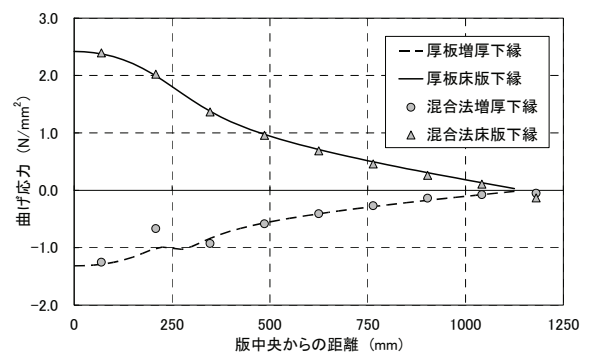
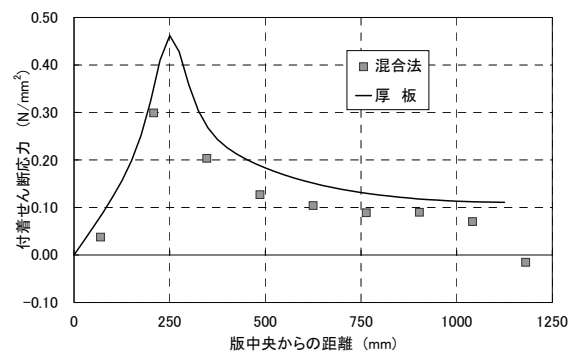


図-7 既設床版下縁の活荷重たわみの分布



(a) 床版下縁の曲げ応力分布



(b) 付着せん断応力分布

図-8 上面増厚工法2の応力分布（橋軸直角方向）

な参考資料になると考えられる。

#### 4.3 上面増厚工法2

本研究における混合法の計算手法をさらに拡張するものとして、前節の上面増厚工法のモデルで自由端近傍に桁を配置した場合を検討する。桁の断面はI型で、床版と接する桁幅は  $b_B=200\text{mm}$  とし、荷重作用による桁のたわみと水平変位を考慮する。ただし、桁の捻り抵抗は無視する。前節では版の端部で単純支持されたモデルであるが、この計算では端部を自由辺として桁のみで支持している。なお、選点法におけるブロック形状は矩形でその総数を18とした。本計算の妥当性を確認するために厚板理論で構成された床版支間長  $2300\text{mm}$  の全周単純支持された積層板の計算手法<sup>6)</sup>を用いて比較する。

図-7によれば桁を考慮した計算結果は、界面が完全合成されている厚板の解とほぼ同等となっており、計算手法には問題のないことが伺える。前節の床版支間 $L=2500\text{mm}$ の計算結果による既設床版のヤング係数の低下がない場合の中央たわみが $0.32\text{mm}$ であり、本計算結果の $0.27\text{mm}$ は幅員方向の床版支間が短縮されていることから妥当な値であると推量される。

図-8に応力分布を示す。図-8(a)は床版下縁の曲げ応力分布であり、混合法の値は選点法によるブロック分割の中央点で表示しており、その計算結果は厚板の解と良く一致していることが認められる。しかし、増厚材下縁の $250\text{mm}$ 付近のデータのみが厚板の解と異なる結果となっているが、これは選点ブロックの分割形状と活荷重載荷位置の影響によるものと推察される。

図-8(b)は付着せん断応力の計算結果であり、混合法による桁付き床版と厚板の解とは傾向は類似しているもののそれぞれのピーク値は異なる結果となった。厚板の解でのピーク値は $\tau=0.46\text{N/mm}^2$ であるのに対し桁付き床版は $\tau=0.30\text{N/mm}^2$ と約1.53倍となっている。この原因は選点法によるブロック形状の影響が最も大きいと考えられ、局所応力が急変する場合には、選点法のブロック形状(台形ブロック)の取り扱いによって精度を向上させることが必要であると推察される。因みに図-6(b)との比較では、単純支持版での計算結果が $\tau=0.40\text{N/mm}^2$ であることから1.33倍程度の差となっている。

## 5. まとめ

本研究では局所挙動が表現できる厚板理論を特解に、境界条件を満たす同次解に薄板理論を組み合わせる混合法を変断面2層版に適用し、調和解法と選点法を併用する手法を提案した。選点法のもつ柔性マトリックスに適切な工夫を施せば、層構造の一部が非合成となるはく離問題にも応用できると推察される。また、実橋での主桁支持も再現でき、より実情に即した解析が可能となる。本研究ではこの解法を下面増厚工法と上面増厚工法に適用し、そのたわみ分布や応力分布から工法の特性や補強効果を考察した。以下に得られた知見を列挙する。

(1) 本研究で提案した変断面2層版の解析手法の妥当性を検証するものとしてTimoshenkoによる古典解と比較した結果、層数が2層の場合の計算結果と1層の値は同等で古典解との比較でもほぼ等しく、提案した手法は良好な精度を有している。

- (2) 下面増厚工法での計算の結果、発生応力度に着目すれば増厚材のポリマーセメントモルタルのヤング係数を低下させることは、補強効果にも影響を及ぼすことから、付着性能の改善や曲げひび割れの抑制のためのポリマー量の増加には注意が必要である。
- (3) 下面増厚工法における付着せん断応力は、輪荷重幅の端部で最大となる。ただし、増厚材端部でも同等の値が発生することから、その近傍も構造上の弱点になると考えられる。
- (4) 上面増厚工法1では超速硬コンクリートによる剛性向上の効果が認められ、下面増厚工法と比較すればたわみ等の値が低減される。
- (5) 上面増厚工法2の増厚材と既設床版界面の付着せん断応力の発生レベルは高く、コンクリートの引張強度を考慮すれば、実橋床版においてもはく離現象が発生すると予測される。
- (6) 混合法による解法で選点法を適用する際には、選点ブロック形状の影響を受けることから、矩形ブロックの幅を狭める方法やブロック形状を台形にする等により、計算精度の向上を図る操作が必要である。

## 参考文献

- 1) 社団法人土木学会鋼構造委員会鋼橋床版の調査研究小委員会：道路橋床版の新技术と性能照査型設計，pp.55-73，2000.8.
- 2) 横山和昭，菅野匡，紫桃孝一郎，横山広：輪荷重走行の方法による既設橋床版を用いた各種補修・補強工法の延命効果比較試験，性能照査型システムにおけるコンクリート構造物の補強，コンクリート技術シリーズ42，pp.II 69-76，2001.6.
- 3) 横山 広，関口幹夫，堀川都志雄：主桁近傍の床版最小厚さに関する研究，構造工学論文集，Vol.51A，pp.1353-1358，2005.3.
- 4) 横山広，安東祐樹，関口幹夫，堀川都志雄：全周固定される多層版解析の一手法について，構造工学論文集，vol.54A，99.910-917，2008.3.
- 5) S.P.Timoshenko and S.Woinowsky-krieger, *Theory of Plate and Shells*, 2nd ed., McGraw-HILL
- 6) 横山広，堀川都志雄：道路橋合成床版の床版厚さに関する研究，構造工学論文集，vol.49A，pp.1107-1113，2003.3.