

# 論文 Wavelet 変換を用いた性能曲線のモード分解法の有効性に関する実験的研究

松本 裕史\*1・前田 礼一郎\*2・楠 浩一\*3・田才 晃\*4

**要旨:** 建物の各層に配置された加速度計測値から性能曲線を作成し、限界耐力計算の原理を用いて主として鉄筋コンクリート造建物を対象に残余耐震性能を把握する技術が提案されている。既往法が 1 次モードの卓越する建物を対象としているのに対し、Wavelet 変換を用いて性能曲線をモード分解する事ができれば、超高層鉄筋コンクリート造等の高次モードの影響を無視できない構造物に対しても本手法が有効であると考えられる。そこで固有周期と等価質量比をパラメータとした振動実験を行い、Wavelet 変換によるモード分解法の有用性を検証した。

**キーワード:** Wavelet 変換, 高次モード, 性能曲線, 応急危険度判定, ヘルスモニタリング

## 1. はじめに

建物に数台の加速度計を配置し、その計測値から建物の地震時の応答を計測し、地震後の残余耐震性能をほぼリアルタイムで機械的に判定する技術が提案され<sup>1)</sup>、その実用化に向けて研究がされている<sup>2)~7)</sup>。これまでの方法では 1 次モードの卓越する建物を対象としたものであったが、何らかの方法で 1 次モードのみを取り出し、その他の高次モードから分解することができれば、超高層 RC 造建物や立体振動が顕著な建物に対しても本手法が有効であると考えられる。文献 6)では Wavelet 変換による性能曲線のモード分解法が提案されている。Wavelet 変換とは、周波数領域で信号を表現するフーリエ解析の特徴を生かしつつ、変動の時間的推移も同時にとらえることのできる時間周波数解析である。なお今までは、Wavelet 変換により弾性状態の建物の 1 次モードの抽出が可能であることが確認されている<sup>6)7)</sup>。

そこで本論文では、高次のモードほど影響が小さいと考え、2 次モードまでが卓越する RC 造建物を想定した鋼製板ばね構面試験体を用いて、等価質量比を主なパラメータとした振動実験を行い、加速度計測値から作成した性能曲線を Wavelet 変換によりモード分解し、1 次モードのみの抽出が可能かを検証することを主目的として、本手法の有効性を検討する。

## 2. Wavelet 変換概要および性能曲線のモード分解<sup>6)8)</sup>

### 2.1 Wavelet 変換概要

Wavelet は、1982 年頃フランスの石油探査技師 Morlet が実際の応用を試みてから、その実用性が注目されるようになり、その後 1989 年頃にかけて Grossmann, Meyer,

Mallat らによって数学的基礎が築かれた。

Wavelet 変換とは、ある規定するマザーウェーブレットに対して、信号  $f(x)$  がいかに似通っているかを数学的に示すものである。N 個のデータを含むある信号  $f_0$  は、Wavelet 変換により式(1)に示すように、ある周波数帯の信号のみを含む要素  $g_1$  と残りの信号  $f_1$  に分解される。

$$f_0 = g_1 + f_1 \quad (1)$$

変換された  $g_1$  および  $f_1$  は、それぞれ N/2 個のデータを持つ。この変換を繰り返すことにより、

$$\begin{aligned} f_0 &= g_1 + f_1 \\ &= g_1 + (g_2 + f_2) = g_1 + g_2 + (g_3 + f_3) \\ &= \dots \\ &= g_1 + g_2 + g_3 + \dots + g_n + f_n \end{aligned} \quad (2)$$

のように分解できる。この時、

$$n = \log_2 N \quad (3)$$

であり、 $f_n$  は定数値となる。分解された信号は、数学的にその直行性が保証されている<sup>8)</sup>。

また  $g_j$  および  $f_j$  は、それぞれ式(4)および式(5)で計算できる。

$$g_j = \sum_k d_k^{(j)} \psi(2^j x - k) \quad (4)$$

$$f_j = \sum_k c_k^{(j)} \phi(2^j x - k) \quad (5)$$

ここで、 $d_k^{(j)}$  :  $g_j$  を計算するための数列、 $c_k^{(j)}$  :  $f_j$  を計算するための数列、 $\psi(x)$  : マザーウェーブレット、 $\phi(x)$  : Scaling である。

Wavelet 変換を用いた分解アルゴリズムは、式(6)および式(7)で、再構成アルゴリズムは式(8)で示される。なお、

\*1 横浜国立大学大学院 工学府 社会空間システム学専攻 (正会員)

\*2 横浜国立大学 工学部 建設学科 (仮会員)

\*3 横浜国立大学大学院 工学研究院 准教授 博士(工学) (正会員)

\*4 横浜国立大学大学院 工学研究院 教授 工博 (正会員)

式中の  $g_k, h_k, p_k, q_k$  はいずれもマザーウェーブレットに依存して一義的に決定される数列である。

$$c_k^{(j-1)} = \frac{1}{2} \sum_l g_{2k-l} c_k^{(j)} \quad (6)$$

$$d_k^{(j-1)} = \frac{1}{2} \sum_l h_{2k-l} c_k^{(j)} \quad (7)$$

$$c_k^{(j)} = \sum_l (p_{2k-l} c_k^{(j-1)} + q_{2k-l} d_k^{(j-1)}) \quad (8)$$

ここでは、マザーウェーブレットとして4階の B-Spline 関数を採用する。図-1(a)および(b)に使用した Scaling 関数およびマザーウェーブレットを示す。また、信号  $f(x)$  から、Rank0 の  $c_k^{(0)}$  を算出する際には、式(9)を用いて計算する。ここで、 $\beta_{l+m/2-k}^{(m)}$  は係数数列で、 $m$  は Spline 関数の次数（ここでは4）を示す。

$$c_l^{(0)} = \sum_k f(k) \beta_{l+m/2-k}^{(m)} \quad (9)$$

実際には  $\beta_{l+m/2-k}^{(m)}, g_k, h_k$  は無限数列となる。そこで、 $\beta_{l+m/2-k}^{(m)}$  としては10要素、 $g_k, h_k$  としては18要素を採用し、それ以外は0と仮定した。なお、この程度の要素を考慮すれば、十分な精度を有する分解が可能であることが知られている<sup>8)</sup>。

Wavelet 変換は、マザーウェーブレットをウィンドウとして用いた時間周波数解析と考えることができる。時間軸上のウィンドウの幅  $2\Delta_f$  と周波数軸上の幅  $2\Delta_f$  の間には、数学的に式(10)に示す不確定性関係がある。

$$2\Delta_f \cdot 2\Delta_f \geq 2 \quad (10)$$

よって、 $f(x)$  の時間刻みを  $\Delta_t$  とすると、 $i$  Rank での  $g_i$  の時間刻み  $\Delta_{t,i}$  は、

$$\Delta_{t,i} = \Delta_t \times 2^i \quad (11)$$

となる。したがって、 $i$  Rank の  $g_i$  の周波数帯域  $W_i$  は

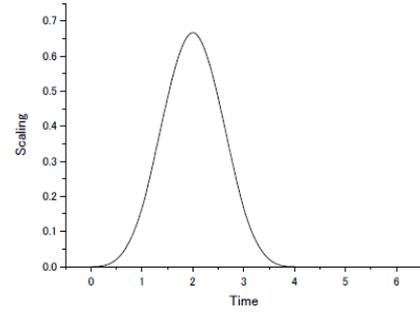
$$W_i = \frac{1}{2\Delta_t} \times 2^{i-2} \leftrightarrow \frac{1}{2\Delta_t} \times 2^{i-1} \quad (12)$$

となる。つまり、Wavelet 変換は数学的に不確定性関係を最小で満足するため、最も無駄の少ない時間周波数解析の一つと言える。

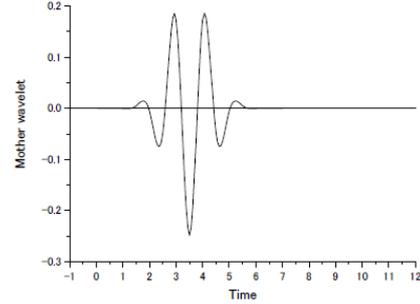
## 2.2 Wavelet変換を用いた性能曲線のモード分解

ここで、超高層建築物や長大構造物などの高次モードの影響を無視できない構造物、あるいは偏心などの立体振動を生じる構造物では、各方向で2つ以上のモードが卓越することとなる。その場合は、卓越振動数が複数確認され、作成した性能曲線の傾きとしても複数存在することとなる。

そこで Wavelet 変換を用いて性能曲線を分解することを試みる。計測変位  $\{M \cdot x\}$  および計測絶対加速度  $\{M \cdot \ddot{x} + \ddot{x}_0\}$



(a) Scaling



(b) マザーウェーブレット

図-1 Scaling 関数およびマザーウェーブレット

は Wavelet 変換により、それぞれ式(13)および式(14)のように分解することができる。

$$\{M \cdot x\} = \left\{ \sum_{i=1}^N g_{Disp,i} + f_{Disp,n} \right\} \quad (13)$$

$$\{M \cdot \ddot{x} + \ddot{x}_0\} = \left\{ \sum_{i=1}^N g_{Accel,i} + f_{Accel,n} \right\} \quad (14)$$

$f_N$  は定数値で、非常に長周期な成分となり、一般的には誤差成分と考えられるため、ここでは無視することとする。式(13)および式(14)を用いて、代表変位および代表加速度は、式(15)および式(16)のように計算できる。

$$\Delta = \sum_r \frac{\sum_i m_i \cdot g_{Disp,r}}{\sum_i m_i} \quad (15)$$

$$\ddot{\Delta} = \sum_r \frac{\sum_i m_i \cdot g_{Accel,r}}{\sum_i m_i} \quad (16)$$

よって、Wavelet 変換によって分解されたそれぞれのランク  $r$  に対して、代表変位  $\Delta_r$  および代表加速度  $\ddot{\Delta}_r$  は独立して式(17)および式(18)のように計算できる。

$$\Delta_r = \frac{\sum_i m_i \cdot g_{Disp,r}}{\sum_i m_i} \quad (17)$$

$$\ddot{\Delta}_r = \frac{\sum_i m_i \cdot g_{Accel,r}}{\sum_i m_i} \quad (18)$$

各ランクの代表変位-代表加速度関係の傾きは、式(17)および式(18)から明らかのように  $r$  ランクでの卓越角振動数  $\omega_r$  の 2 乗となる。

式(3)のように、Wavelet 変換で分解できるランク数は、データ数のみに依存しており、また各ランクの振動数範囲は、式(12)のように信号の時刻みにのみ依存している。言い換えれば、構造物の自由度数とは無関係である。各ランクに対する振動数範囲は不確定性関係から規定されたものであり、仮に 2 つの振動モードが非常に近く、あるランク内に 2 つのモードが存在したとしても、計測データからは 2 つのモードを分離することは困難であることを意味する。計算可能なランク数  $n$  は式(3)で計算されるが、一般的に高次ランクは非常に長周期となるので、実際に分解できるモード数は一般的に  $n$  よりも少ない。また、分解された  $r$  ランクの振動数範囲に卓越振動数が存在しない場合は、 $\Delta_r$  と  $\ddot{\Delta}_r$  の間に有意な相関性が確認されないことにより判断できる。

さらに、式(19)に示す  $r$  ランクの等価質量  ${}_rM$  を用いると、 $r$  次の代表変位  ${}_r\Delta'$  および代表加速度  $-({}_r\ddot{\Delta}' + \ddot{x}_0)$  を式(20)および式(21)のように計算できる。

$${}_rM = \frac{\left( \sum_i m_i \cdot g_{disp,r} \right)^2}{\sum_i m_i \cdot g_{disp,r}^2} \quad (19)$$

$${}_r\Delta' = \frac{M}{{}_rM} \Delta_r \quad (20)$$

$${}_r\ddot{\Delta}' + \ddot{x}_0 = \frac{M}{{}_rM} \ddot{\Delta}_r \quad (21)$$

この代表変位  ${}_r\Delta'$  および代表加速度  ${}_r\ddot{\Delta}'$  は、対応する卓越各振動数  $\omega_r$  を用いて、式(22)を解くことにより求めることができる。

$${}_r\ddot{\Delta}' + 2 \cdot {}_r h_r \cdot \omega_r \cdot \dot{{}_r\Delta}' + \omega_r^2 \cdot {}_r\Delta' = -\ddot{x}_0 \quad (22)$$

つまり、弾性範囲では、 ${}_r\Delta'$  は入力地震動  $\ddot{x}_0$  の減衰定数  ${}_r h_r$ 、卓越角振動数  $\omega_r$  での応答変位に一致することになる。よって、各ランクの性能曲線 ( ${}_r\Delta' - ({}_r\ddot{\Delta}' + \ddot{x}_0)$  関係) と入力地震動から計算される要求曲線を個別に比較すればよいこととなる。

### 3. 試験体概要

本実験では、想定する建物の再現よりも、本手法によるモード分解そのものに重点を置いたため、取り扱いの容易さを考慮し、試験体はいずれも図-2のように質量約 18kg の鉄の錘 4 個と様々な長さの 100mm×6mm の鋼板 (SS400 材) をボルト接合によって組み合わせた 2 層 1 スパンの鉄骨フレームを用いた。建物の固有周期および等価質量比によるモード分解への影響の傾向を把握するため、

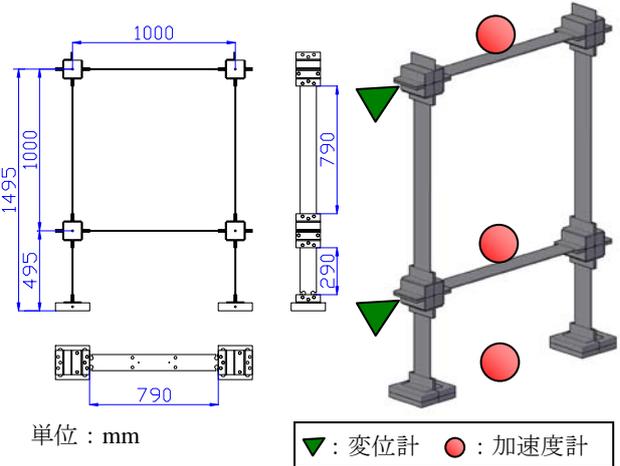


図-2 試験体図および計測イメージ (S4)

表-1 試験体諸元および固有値解析結果

試験体	S1	S2	S3	S4	L1	L2	L3	L4	
階高 (m)	2階	0.70	0.80	0.90	1.00	0.90	1.10	1.20	1.30
	1階	0.80	0.70	0.60	0.50	1.10	0.90	0.80	0.70
柱部材長 (m)	2階	0.49	0.59	0.69	0.79	0.69	0.89	0.99	1.09
	1階	0.59	0.49	0.39	0.29	0.89	0.69	0.59	0.49
スパン (m)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
梁部材長 (m)	0.79	0.79	0.79	0.79	0.79	0.79	0.79	0.79	
周期 (sec)	1次	0.62	0.60	0.60	0.62	0.97	0.90	0.90	0.93
	2次	0.16	0.16	0.15	0.13	0.26	0.27	0.26	0.23
等価質量比	1次	92%	85%	76%	67%	95%	84%	76%	68%
	2次	8%	15%	24%	33%	5%	16%	24%	32%

表-2 各ランクの周期帯および振動数帯

Rank	必要ステップ数	$\Delta t$ (sec)	Nyquist周波数 (Hz)	周期 (sec)
1	2	0.02	25	0.04
2	4	0.04	12.5	0.08
3	8	0.08	6.25	0.16
4	16	0.16	3.125	0.32
5	32	0.32	1.563	0.64
6	64	0.64	0.781	1.28
7	128	1.28	0.391	2.56
8	256	2.56	0.195	5.12
9	512	5.12	0.098	10.24
10	1024	10.24	0.049	20.48
11	2048	20.48	0.024	40.96
12	4096	40.96	0.012	81.92
13	8192	81.92	0.006	163.84
14	16384	163.84	0.003	327.68

それぞれの試験体の柱に部材長の異なる鋼板を組み合わせることにより、前述の 2 つをパラメータとする計 8 体 (S1~4, L1~4) を作成した。なお全試験体ともに全体崩壊型となるように、柱脚部および各層梁の両端部に、鋼板の幅が 30mm となるよう穴を開ける処理を施した。

表-1 に各試験体諸元および材料特性を考慮し行った固有値解析結果を示す。1 次固有周期は S シリーズが 0.6 秒程度、L シリーズが 0.9 秒~1.0 秒程度と算出された。1 次の等価質量比は、両シリーズとも試験体番号 1 から 4 の順に 90% 程度から 60% 程度となった。

### 4. 加振方法および計測項目

入力地震波には El Centro 波 NS 成分を用いた。入力レベルは原波に対し 25% から 25% 刻みで 200% まで、その

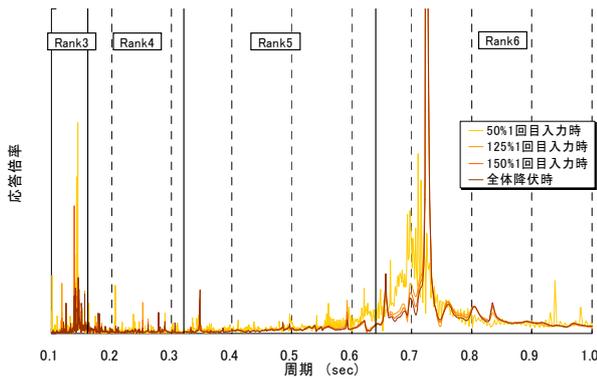


図-3 伝達関数 (S4)

後は 50%刻みで 300%までとすることで、弾性時および塑性化後それぞれのモード分解の状況を確認した。なお、余震の最大レベルは本震と同レベルであると仮定し、余震を模擬して各入力レベルで2回ずつ加振を行った。計測内容は図-2 中に示すように振動台上および各層の応答変位・応答加速度、さらに降伏状況を確認するための各部材端部両側歪みとした。加速度計測はITK 強震計を用い常時計測を行った。計測時間刻みは 0.01sec で、検討には記録周辺の4分間(24000 ステップ)を使用したため、Wavelet 変換により加速度記録を 14 ランクまで分解することが可能である。各ランクの周期帯および周波数帯の関係を表-2 に示す。なお、検討に用いる変位値には前加振時の残留変形を差し引いた値を用いた。

## 5. 実験結果および検討

### 5.1 実験結果の概況

全試験体で、125%入力付近で1層梁端が降伏、その後200%入力までに1層柱脚が降伏、さらに250%の加振終了までに2層の梁端に降伏が生じ、その後崩壊メカニズムに達するという傾向が見られた。全加振終了付近では梁中央に設置していた加速度計が傾きだし、挙動も徐々に水平方向から鉛直方向の振動が支配的となっていった。

### 5.2 伝達関数

弾性時の 50%1 回目、多くの試験体で降伏が見られた 125%および 150%1 回目、および柱脚・梁端が全て降伏に至った入力 (以下、全体降伏時と呼称)の、振動台上加速度と頂部の応答加速度の記録から伝達関数を求めた。なお、S4 の全体降伏は 250%1 回目の入力の際に生じた。例として試験体 S4 の結果を図-3 に示す。S4 において 1・2 次モードの卓越振動数はそれぞれ Rank6, Rank3 に存在する。同様に、S シリーズはそれぞれ Rank6, Rank3 に、L シリーズではそれぞれ Rank6, Rank4 に存在することが確認された。一般に、塑性化に従い卓越周期が長周期側に現れることが期待されるのであるが、各加振の全ステップを用いた場合、図のように降伏が進行しても

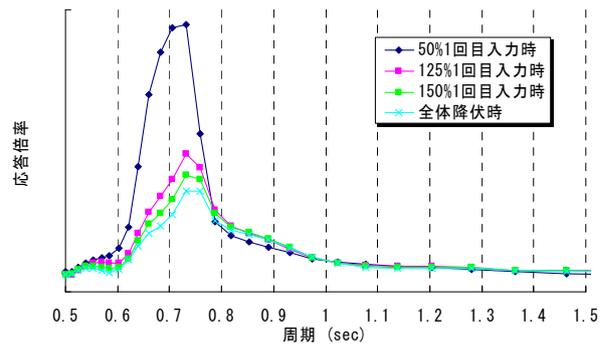


図-4 伝達関数 (最大応答付近 2048 ステップ)

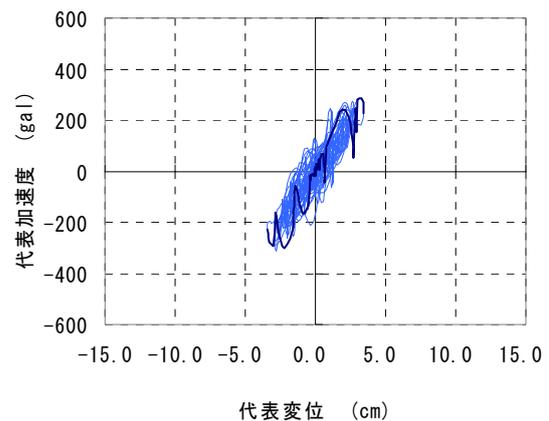


図-5 S4 50%1 回目 性能曲線 (分解前)

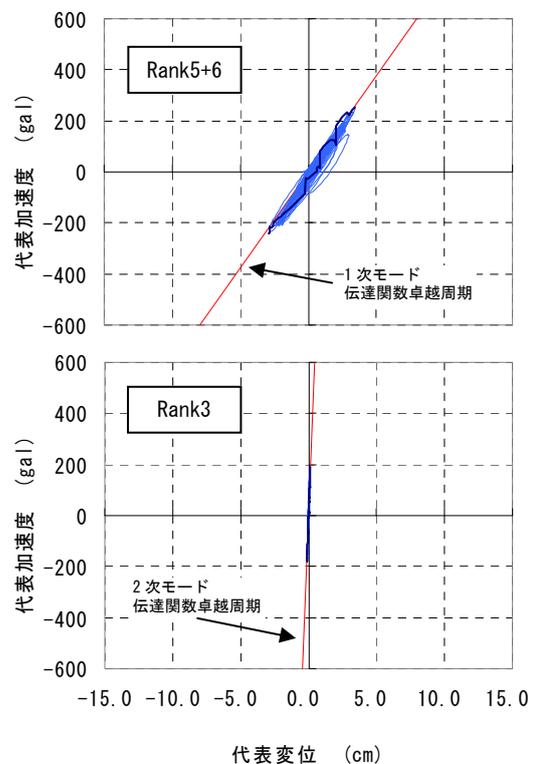


図-6 S4 50%1 回目 性能曲線 (分解後)

伝達関数では各試験体ともほぼ一定の周期が卓越していた。これは、鉄骨造は除荷剛性が弾性剛性と大きく変化せず、過半を占める主要動後の応答成分により一定の周

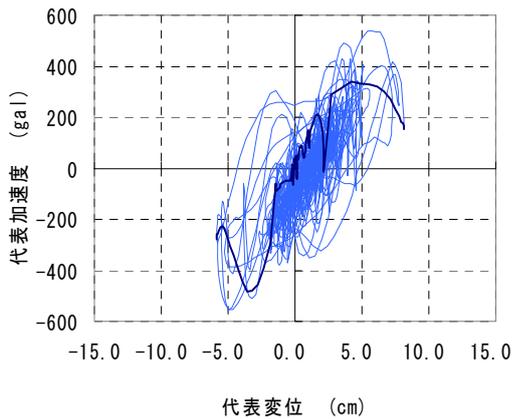


図-7 S4 175%2 回目 性能曲線 (分解前)

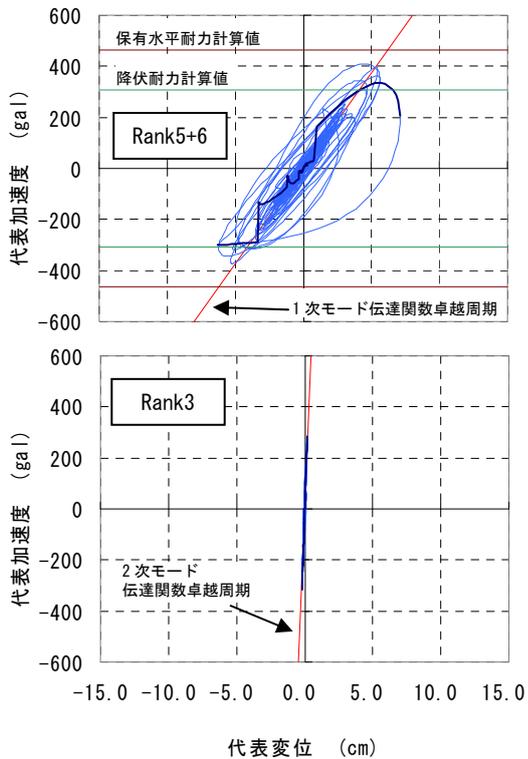


図-8 S4 175%2 回目 性能曲線 (分解後)

期成分が多く含まれたためと考えられる。そこで、各加振の最大応答付近の 2048 ステップ(20.48 秒分)のみを取り出し、伝達関数を算出した。その結果を図-4 に示す。わずかではあるが入力が大きくなるにつれて減衰が大きくなるとともに相対的に卓越周期が長周期側へ移りゆく傾向がうかがえる。

### 5.3 性能曲線の分解

弾性時である 50%1 回目入力時の試験体 S4 の分解前の性能曲線およびその骨格曲線を図-5 に示す。骨格曲線とは正・負側のそれまでの最大値となる点を逐次取り出した曲線である<sup>1)</sup>。代表変位の算出には各層の変位計測値を用いた。図から S4 の性能曲線は大きく上下にうねっており 2 次モードの影響を大きく受けていることが確認できる。次に加速度計測値のみから Wavelet 変換を併用

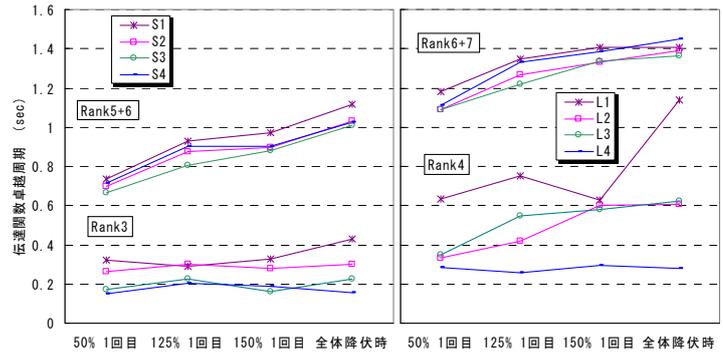


図-9 最大応答点等価周期の推移

し作成した分解後の性能曲線( $\Delta_r - (\ddot{\Delta}_r + \ddot{x}_0)$  関係)とその骨格曲線を図-6 に示す。図-3 の結果を考慮し、S シリーズの 1 次モードには Rank6 とその影響がやや含まれると考えられる Rank5 を、L シリーズでは Rank6 に Rank7 を足し合わせた性能曲線を採用した。図には 1 次・2 次の伝達関数卓越周期を併せて示している。分解後の性能曲線では分解前に見られたうねりが小さくなっており、2 次モードの影響が除去されていることがわかる。また、性能曲線の傾きは伝達関数卓越周期と良好に一致していた。2 次モードを含むと思われる Rank3 についても、2 次の卓越周期から求めた傾きとほぼ一致しており、非常に精度良くモード分解が行われていることが分かる。

全体降伏時である 175%2 回目入力時の S4 の分解前の性能曲線およびその骨格曲線を図-7 に、分解後のものを図-8 に示す。弾性時と同様、1・2 次モードの性能曲線が良好に抽出された。図中には、鋼板の降伏モーメントおよび全塑性モーメントから仮想仕事法により算出した耐力に 1 次等価質量比を乗じた値を示している。ともに計算値よりも実験値がやや下回っているものの概ね近い値となっていることがわかる。2 次モードでは、S4 の場合依然として線形状態を維持しており、その傾きは 2 次固有周期と良好に一致していた。一方、1 次モードでは正負最大応答点を結ぶ等価周期ほど伝達関数の卓越周期は変化していなかった。

図-9 には各試験体の正負最大応答点を結んだ傾きから算出した等価周期の推移を示す。全試験体とも 1 次モードの弾性時等価周期は図-4 の伝達関数から求めた周期と良好に一致した。また、入力が大きくなるにつれて 1 次モードを含むランクの最大応答点から算出した等価周期は増加しており、塑性変形の進行が表現されているといえる。一方、2 次モードに関しては、S1 や L1 では弾性状態である 50%入力時でも等価周期と伝達関数卓越周期に誤差があった。一方 2 次モードの影響が大きな S3・S4 および L2・L3・L4 は良好に一致している。つまり 2 次モードの影響が大きな試験体ほど 2 次モードの等価周期の値もばらつきが少なくなるといえる。

## 5.4 等価質量比

式(19)を用い、計測値から各ランクの等価質量比、 $M/M$  を算出した。図-10に全体降伏時のS1とS4の各ランクの等価質量比-代表変位関係を示す。図中◆印は、それまでの変位最大値となる点である。1次モードは両試験体とも、弾性時から全体降伏時まで各加振の最大応答付近では非常に安定した等価質量比を示しており、それぞれ90%、65%程度と、概ね表-1に示した解析値と一致した。2次モードでは、1次モードに比べばらつきが多い結果となった。S1の2次モードの等価質量比は予備解析では8%と算出されているものの、Rank3の等価質量比は一定の値をとることはなかった。S4のRank3に関してはS1と比較すると、解析値の33%付近に集中していた。このように全試験体の傾向として、2次モードの影響が大きくなるほどそのモードの挙動が明確になっていた。この傾向はLシリーズに関しても同様であった。

## 6. まとめ

超高層鉄筋コンクリート造建物を想定した鋼製板ばね構面試験体を用いて、等価質量比および周期をパラメータとした振動実験を行い、その記録から性能曲線を作成し1次モードの抽出を主目的としてWavelet変換によるモード分解を行った。得られた知見を以下に示す。

- (1) S・Lシリーズともに1・2次モードの卓越する性能曲線から両モードの挙動を分解することができた。
- (2) 弾性時は全試験体とも1次モードの性能曲線の等価周期が伝達関数卓越周期と良好に一致した。2次モードに関しては2次モードの影響が大きな試験体ほど等価周期の算出値にばらつきが少なかった。
- (3) 塑性化後の1次モード等価周期は入力が大きくなるほど増加しており、塑性の進行が表現されていた。
- (4) 式(19)を用いて計測値から算出した各ランクの等価質量比は1次モードについては良好に対応していた。2次モードに関しては、2次モードの影響が大きいものほど値が安定してくるという傾向が見られたものの、非常にばらつきが多かった。

謝辞：本研究は、科学研究費補助金(基盤研究C 課題番号19560566 研究代表者 楠浩一)の補助を受けて実施した。また本研究は、UR都市機構都市住宅技術研究所との共同研究で実施するとともに、同研究所から多大なる御協力を頂きました。

## 参考文献

- 1) 楠浩一，勅使川原正臣，小出栄治：リアルタイム残余耐震性能判定装置の開発 その1 判定方法の概要，日本建築学会学術講演集，pp.961-962，2003年

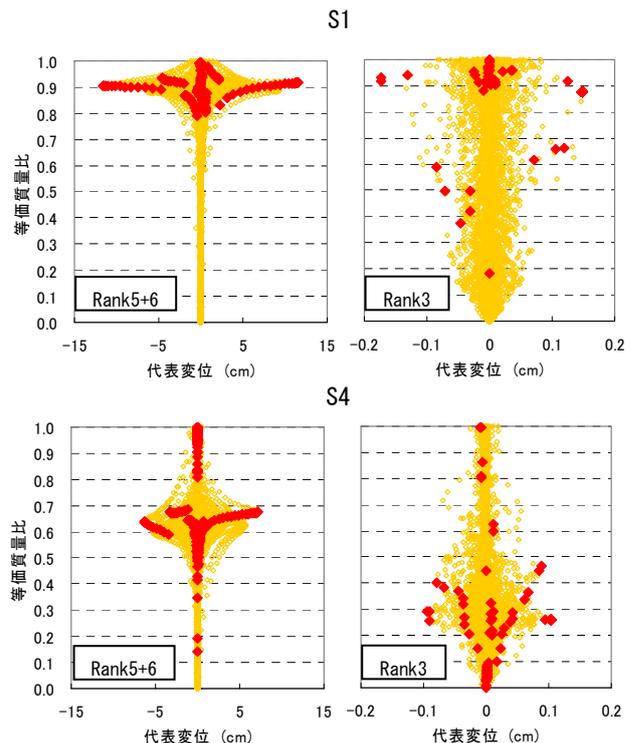


図-10 等価質量比-代表変位関係

- 2) 楠浩一，勅使川原正臣：リアルタイム残余耐震性能判定装置の開発 その2 鉄骨平面フレームの振動台実験の概要，日本建築学会学術講演集，pp.797-798，2004年
- 3) 楠浩一，勅使川原正臣：リアルタイム残余耐震性能判定装置の開発 その3 余震を含めた等価粘性減衰定数の検討，日本建築学会学術講演集，pp.949-950，2006年
- 4) 松本裕史，茜絢也，楠浩一，田才晃：リアルタイム残余耐震性能判定装置の開発 その4 性能曲線の精度検討法概要，日本建築学会学術講演集，p.25-26，2007年
- 5) 伊佐治勝大，楠浩一，松本裕史，田才晃：リアルタイム残余耐震性能判定装置の開発 その6 加速度計配置についての検討，日本建築学会学術講演集，p.249-250，2008年
- 6) 楠浩一，松本裕史，伊佐治勝大，田才晃：リアルタイム残余耐震性能判定装置の開発 その7 計測計画と性能曲線の作成方法，日本建築学会学術講演集，pp.251-252，2008年
- 7) 松本裕史，楠浩一，伊佐治勝大，田才晃，田中稲子：リアルタイム残余耐震性能判定装置の開発 その8 計測記録からの性能曲線作成と応答評価，日本建築学会学術講演集，pp.253-254，2008年
- 8) 榊原進：ウェブレットビギナーズガイド 東京電機大学出版局 1995年