論文 デュアルラティスモデルを用いたひび割れ影響下の物質移動解析

坂 敏秀*1 · John E. Bolander*2 · Peter Grassl*3

要旨: ボロノイ分割とドロネー分割の双対性に着目したデュアルラティスモデルに基づく離散的に表現されたひび割れの影響を考慮可能な物質移動解析手法を開発し、ひび割れたコンクリート中の水分移動解析を行った。理論解との比較により、デュアルラティスモデルの3次元拡散方程式解析手法としての有効性、および水分移動解析手法としての妥当性を示し、ひび割れの幅と深さの影響を反映した水分移動挙動を再現できることを確認した。

キーワード: ラティスモデル,物質移動,ひび割れ,拡散方程式

1. はじめに

構造物の長寿命化においては、構造体の性能が長期間の使用に耐えられなければならない。RC 構造物の経年劣化現象である中性化や鉄筋腐食などに対しては、実験的に解明する研究が数多くなされてきた。一方で、実験による炭酸化進行予測手法の限界が指摘され、数値解析を用いたより一般的な手法の確立が期待されている。著者らはこのようなRC構造物の経年劣化現象を模擬可能な数値解析手法の開発に取り組んでおり、特にひび割れを離散的に表現可能であることに重点を置いている。

RC 構造物の経年劣化現象を模擬する上で重要な水分や二酸化炭素などの物質移動に関し多くの数値解析的研究がある。離散的あるいは不連続体的手法として、例えば、野城ら¹⁾ と Nakamura et al²⁾ は剛体バネモデル³⁾ にトラスモデルを組み込み、ひび割れ解析と物質移動解析を連成する手法を提案している。同様の連成解析として、Bolander and Berton⁴⁾ は、ラティスモデル⁵⁾ を用いてセメント複合材料の乾燥収縮ひび割れ解析を実施した。

これらの数値解析手法において、Nakamura et al²)の手法はひび割れ面に平行なトラス要素を配置しており、ひび割れ発生による物質移動の加速を考慮可能だが、2次元での検討にとどまっている。トラスモデルを3次元で用いた例として小澤らのと長崎らりの研究があるが、ひび割れの考慮方法は詳述されていない。また、Bolander and Berton⁴)の手法では、物質移動解析に用いるラティス要素がひび割れ面と直交しているため、ひび割れ面に沿った物質移動が支配的な現象を解析するのには不向きである。これに対し、 $Grassl^8$)はドロネー分割とボロノイ分割の双対性に着目した2次元のデュアルラティスモデルを示し、ひび割れ解析と物質移動解析の連成を試みた。 $Grassl^8$)の方法はボロノイ多角形の辺をラティス要素とみなして、ひび割れ幅を考慮しながら物質移動問題を解

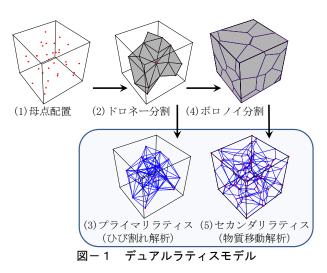
く。物質移動解析を行う際にひび割れ解析で得られるひび割れ幅を考慮可能なことがこの手法の特長である。このコンセプトは無理なく3次元に拡張可能であり、坂⁹はこの方法を用いて3次元の定常拡散方程式を解いた。

本論では、Grassl⁸⁾ の示したデュアルラティスモデルを用い、コンクリート・セメント複合材料を対象にひび割れ解析と物質移動解析を連成させることを目的とし、非定常拡散方程式解析法としてのデュアルラティスモデルの検証を行い、ひび割れの影響を考慮した水分挙動の数値解析例を示す。

2. 解析手法

2.1 デュアルラティスモデル

デュアルラティスモデルを**図-1**に示す。モデルの作成手順は次のようになる。(1) 領域内に任意に母点を配置する。(2) 配置した母点をもとに、ドロネー分割を行う。設定した領域は、2次元なら三角形分割、3次元なら四面体分割される。(3) ドロネー分割の結果得られた三角形あるいは四面体の辺をラティス要素とみなし、プラ



^{*1} 鹿島技術研究所 建築解析グループ 研究員 修士(環境学) (正会員)

^{*2} University of California, Davis Civil and Environmental Engineering Professor Ph.D

^{*3} University of Glasgow Department of Civil Engineering Senior Lecturer Ph.D

イマリラティスと呼ぶ。(4) ドロネー分割と双対関係にあるボロノイ分割によって、2次元なら多角形、3次元なら多面体で領域を分割する。(5) ボロノイ多角形あるいは多面体の辺をラティス要素とみなし、セカンダリラティスと呼ぶ。

本研究では、プライマリラティスにてひび割れ解析を 行いつつ、セカンダリラティスにて物質移動解析を行い、 両解析を連成させることを目標としている。

図-2にラティス要素とひび割れ面の位置関係を示す。 プライマリラティスを用いたひび割れ解析によって生じるひび割れ面がボロノイ多面体の面に一致する。そのため、ボロノイ多面体の辺上にあるセカンダリラティスでひび割れ幅の影響を容易に考慮可能となる。これがデュアルラティスモデルの特長である。

2.2 プライマリラティスを用いたひび割れ解析手法

プライマリラティスはいわゆるラティスモデル ⁵⁾ であり、そのひび割れ解析に関する定式化の詳細や解析例

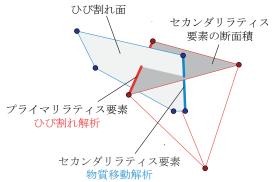


図-2 ラティス要素とひび割れ面の位置関係

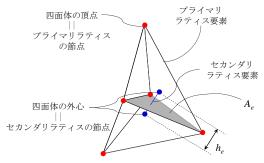


図-3 セカンダリラティス要素とドロネー四面体

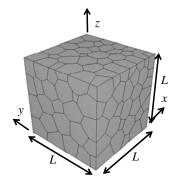


図-4 検証に用いた解析モデル

は既往研究5)に説明を譲る。

本論では、Grassl⁸⁾ が示したように、ひび割れ解析の結果得られるひび割れ幅を物質移動解析で考慮することを想定しつつ、セカンダリラティスを用いた物質移動解析手法の検証に主眼を置く。

2.3 セカンダリラティスを用いた物質移動解析手法

セカンダリラティス要素とドロネー四面体の関係を図 -3に示す。セカンダリラティス要素の節点はドロネー四面体の外心である。隣り合うドロネー四面体の外心同士を結んだものが1つのセカンダリラティス要素であり、この2つの四面体で共有される面の面積を要素の断面積 A_e とする。また、外心間の距離を要素の長さ h_e とする。

ひび割れ部を含めたコンクリート中の物質移動を式(1)に示す拡散方程式で近似することを想定し、セカンダリラティスを用いて拡散方程式を離散化する。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot \left(D(\theta) \nabla \theta \right) \tag{1}$$

ここで、 θ : ポテンシャル、 $D(\theta)$: 拡散係数、t: 時刻、 である。

ラティスモデルによる拡散方程式の離散化については Bolander and Berton⁴⁾ と Grassl⁸⁾ の方法に倣う。ここでは、ラティスモデルによる空間離散化方程式、および要素 e の容量マトリクス M_e と伝導マトリクス K_e をそれぞれ式 (2)~(4)に示す。

$$\mathbf{M}\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial t} + \mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{f} \quad t > 0 \tag{2}$$

$$\boldsymbol{M}_{e} = \frac{A_{e}h_{e}}{6d} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{K}_{e} = \frac{D_{e}A_{e}}{h_{e}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

ここで、M: 全体容量マトリクス、K: 全体伝導マトリクス、 θ : 全ポテンシャルベクトル、f: 流東ベクトル、 D_e 、 A_e 、 A_e : それぞれ要素 e の拡散係数、断面積、長さ、d: 解析空間の次元に応じたパラメータで、2 次元では 2、3 次元では 3 である。

本研究では、式(2)を Crank-Nicolson 法によって解く。

3. 解析手法の検証

3.1 非定常拡散方程式での検証

セカンダリラティスを用いる拡散方程式の解析手法を 検証する。

図-4に示す解析モデルを用い、式(5)~(7)に示す初期 条件と境界条件のもとで解析を行った。

$$\theta = \sin \frac{\pi}{L} x \quad 0 \le x \le L, t = 0 \tag{5}$$

$$\theta = 0 \quad x = 0, L, t > 0 \tag{6}$$

$$q_n = 0$$
 $y = 0, L, z = 0, L, t > 0$ (7)

ここで、L:解析領域の寸法、 q_n :流束、t:時刻である。 この問題の理論解は式(8)に示すとおりである。

$$\theta = \exp\left(-\frac{\pi^2}{L^2}t\right)\sin\frac{\pi}{L}x\tag{8}$$

図-5に理論解を実線で、ラティスモデルによる数値解(以下、ラティス解)を点で示す。ラティス解は理論解とよく一致しており、セカンダリラティスを用いて非定常拡散方程式を解くことが可能なことが確認できる。

3.2 非線形拡散係数での検証

物質移動問題を拡散方程式で近似するとき,多くの場合,拡散係数はポテンシャル変数に対して強い非線形性を示す。本論では,拡散係数が非線形の場合を検証する。

等温条件下の不飽和状態のコンクリート中の水分移動を想定し、式(9)に示す Leech et al¹⁰⁾ の拡散係数を用いる。

$$D(\theta) = 2.2 \times 10^{-4} \exp(6.4\theta) \quad (\text{mm}^2/\text{sec}) \tag{9}$$

ここで、 θ は相対含水率であり、0 から 1 の値をとる。 検証対象としたのは式(10)~(12)で定義された 1 次元 半無限領域での問題である。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad x > 0, t > 0$$
 (10)

$$\theta(x) = 0 \quad t = 0 \tag{11}$$

$$\theta(x=0,t)=1$$
; $\theta(x,t)\to 0$ as $x\to\infty$ (12)

この問題は、Boltzmann変数 $\lambda = x t^{-1/2}$ を導入することにより θ と λ に関する常微分方程式に帰着され、 μ 0は λ - θ 9 可面上の曲線となることが知られている。

4章の解析例にも転用するため、ここでは2次元のモデル化によって解析手法の検証を行う。解析に用いたボロノイ分割と境界条件を図-6に示す。計算精度への要素分割の影響を確認するため、(a) と (b) のメッシュを用いた。解析領域は1辺30 mmの正方形とし、境界条件をy=0で含水率1、他の境界で流束0の条件とした。

解析結果(以下,ラティス解と呼ぶ)を**図**−**7**に△□○で示す。比較のため、1次元の有限差分法で解いた結果(以下,差分解と呼ぶ)を併せて実線で示す。ラティス解が差分解より若干遅れて拡散するのが確認できるものの、両者は概ね一致している。また、解析時間が長くなるにつれ、ラティス解と差分解がより一致する傾向が

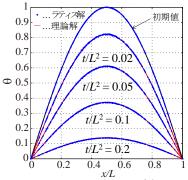


図-5 ラティス解と理論解の比較

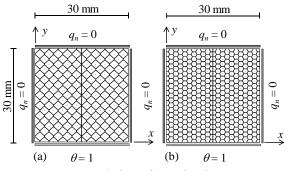


図-6 解析モデルと境界条件

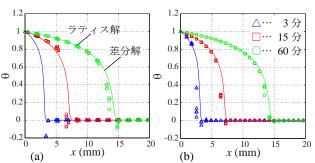


図-7 解析結果

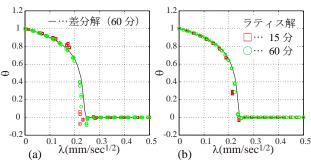


図-8 Boltzmann 変数による結果表示

みられる。なお、 θ =0付近でラティス解は負の値を示しているが、細かい要素分割を行った(b)のモデルで値のぶれが小さいことから、 θ =0付近の極端な非線形分布を表現できるような十分な要素分割がなされていないためだと考えられる。また、このぶれは時間刻みに由来する誤差ではないことを確認した。

図-8に、Boltzmann 変数を横軸に用いた結果を示す。 ラティス解は差分解とよく一致している。ラティス解と 差分解の一致度合いを定量的に比較するために、図-8 から吸着性を求める。吸着性 S は式(13) によって定義され、拡散係数 $D(\theta)$ によって定まる。

$$S = \int_0^1 \lambda d\theta \tag{13}$$

60 分時点のラティス解と差分解で求めた吸着性を**表** -1に示す。ただし Leech et al 10)に示された含水率 0.13 m^3/m^3 を掛けた値を示した。ラティス解と差分解の値は、Leech et al 10)の示した値とほぼ一致しており、セカンダリラティスを用いた非線形拡散方程式の数値解について妥当性を確認できた。

4. ひび割れの影響を考慮した水分移動の数値解析例 4.1 解析モデル

齊藤ら¹¹⁾ の実験を参考に、図-9に示すようなひび 割れのあるコンクリート試験体の等温条件下の吸水実験

表-1 吸着性の比較

解析手法	吸着性 (mm/sec ^{1/2})
ラティス解 (b)	0.0248
差分解	0.0253
Leech et al ¹⁰⁾ の値	0.0250

を想定した解析を実施する。ひび割れ面が部材幅方向に 貫通していれば 2 次元モデルで十分なので,図-6 (b) に示すボロノイ分割を解析モデルとして再利用する。た だし,中央 (x=15 mm) 位置に y 軸に平行なひび割れ面 が存在すると仮定する。ひび割れ面位置での拡散係数は Wang et al¹²⁾ と Aldea et al¹³⁾ を参考にし,ひび割れ幅が 0.1 mm で 1000 倍,0.2 mm で 1000 倍の値を設定する。

変数 θ は相対含水率とし、0から 1 の値をとる。初期 条件は θ =0 とする。境界条件は、吸水面で θ =1、その 他の面では流束を0とする。拡散係数は式(θ)に従う。

4.2 解析ケース

ひび割れの影響をみるために,**表-2**に示す解析ケースを準備した。乾燥収縮によって生じるひび割れなど,

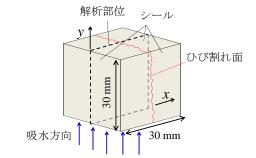


図-9 ひび割れのあるコンクリートの吸水実験

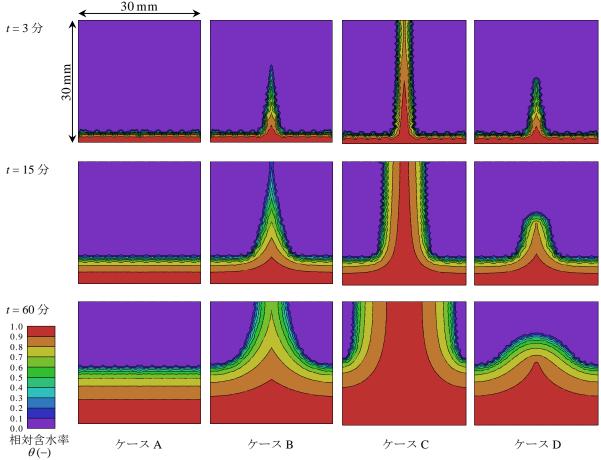


図-10 相対含水率 0 の分布の比較 (上から 3, 15, 60 分)

表-2 解析ケースの設定

ケース	ひび割れ幅・深さ	拡散係数
名称		の倍率 12), 13)
A	なし	なし
В	0.1 mm(貫通)	100 倍
С	0.2 mm(貫通)	1000 倍
D	0.1 mm(非貫通)	100 倍

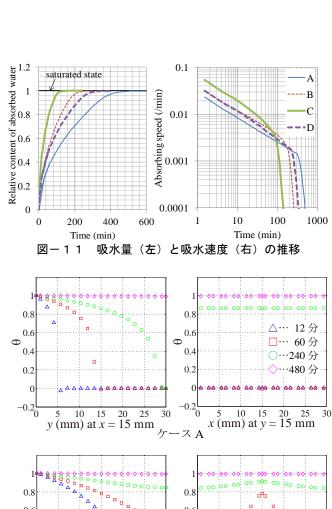
長期耐久性に影響を及ぼすと考えられているひび割れを想定し、ひび割れ幅を 0.1 mm と 0.2 mm の 2 種類とした。また、貫通ひび割れと非貫通ひび割れの影響の違いを明らかにすることを目的とし、ひび割れが試験体全体を貫通している場合と、半分までの非貫通のものを比較する。なお、ひび割れなしのケース A は 3.2 節で計算したモデルである。

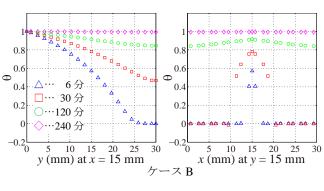
4.3 解析結果

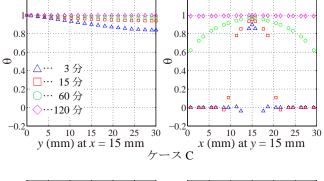
解析時刻 3,15,60 分時点の各ケースの含水率分布を図 10に示す。全体に見られる傾向として、低含水率で の等値線が高含水率のそれと比べて凸凹している。これ は、3.2節で述べたように、含水率0付近でのメッシュ解 像度の低さによるものと推測される。ケース A は健全な コンクリートであり、時間の進行とともに水分がほぼ一 様に浸入していくことが確認できる。ケース B~D は、 ひび割れ部へ先に水分が浸入し、その後健全なコンクリ ート部へ広がっていくことが確認できる。ケース C は 15 分時点にはひび割れ内が飽和しており, その後は健全部 とひび割れ部から吸水していると推測される。ケース B と D は, 3 分時点ではほぼ同じ含水率分布を示すが, ケ ース D はひび割れ部が飽和し、その後の全体の分布形状 が丸くなっていく。60分までの分布からは、ケース A, B, Dは健全部からの吸水が多いのに対し、ケース C はひび 割れ部を通じた吸水が健全部からの吸水とほぼ同様に生 じていると思われる。

部材が飽和するまでの時間を比べるために、各節点での含水率を領域全体で積分し、部材に吸収された水分量を各ステップで求めた。この吸収された水分量を飽和水分量で除した割合を図ー11に示す。ひび割れ幅の大きいケース C < ケース B < ケース D < ケース A の順に部材全体が飽和状態になるまでの時間が長くなり、ひび割れの規模が大きいほど飽和するのが速くなると考えられる。また、各ステップ間の水分量の差を時間刻みで割ることにより吸水速度を求め、推移を図ー11右に示す。吸水速度の減少は各ケースとも同様の傾きを示す。

図-12に、飽和するまでの含水率の変化をケース別に示す。ひび割れ位置 (x = 15 mm) での含水率変化 (左) と y = 15 mm 位置での x 方向の含水率変化(右)を示し







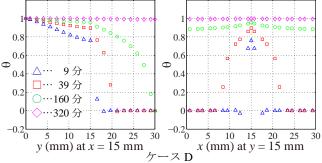


図-12 飽和するまでの含水率の変化

た。ケース A では、 3.2 節で示した含水率分布に従って 吸水し、シール端(y=30 mm)に到達する。ケース B では、ひび割れ先端まで急速に吸水し、30 分時点ではひび割れからの吸水で部材内部に水分が移動している。一方で、240 分時点ではほぼ一様な含水率分布を示していることから、健全部からの吸水によって全体の含水率分布が決まっていると考えられる。ケース C では、急速に ひび割れ部が飽和し、ひび割れ部を通じて部材内部に水分が移動していると捉えられる。ケース D では、ひび割れ部が急速に飽和することが確認できる。ひび割れ部から先のシール端まではケース A と同様の水分移動現象だと考えられる。y=15 mm 位置での分布はケース B と同様の傾向を示している。

以上の結果より、コンクリートに生じるひび割れ幅と 深さの影響についてセカンダリラティスを用いた水分移 動解析で考慮可能だと考えられる。今後は、実験のシミ ュレーション解析などの実施により、実現象との比較を 行う予定である。

5. 結論

本論では、Grassl⁸⁾ の示したデュアルラティスモデルを 3 次元に拡張した場合のラティス要素とドロネー四面体・ボロノイ多面体の関係を示した。この 3 次元のモデル化を用いても 2 次元と同様に非定常拡散方程式を解析可能なことを確認した。

続いて、ポテンシャル変数に対して非線形な拡散係数を与えた場合について、2次元モデルを用いて解析手法の妥当性を検証した。その結果、等温条件下の不飽和状態におけるひび割れのあるコンクリートの吸水実験を想定した計算例を示し、デュアルラティスモデルを用いてコンクリートのひび割れ幅と深さの影響を水分移動解析で考慮可能なことを確認した。

参考文献

- 野城良祐,石川靖晃,中村光,田邉忠顕:物質移動 を考慮した RBSM によるひび割れ進展解析手法の 開発,コンクリート工学年次論文集, Vol.25, No.1, pp.467-472, 2003.
- 2) Nakamura, H., et al.: Time-dependent structural analysis

- considering mass transfer to evaluate deterioration process of RC structures, Journal of Advanced Concrete Technology, Vol. 4, No. 1, pp.147-158, 2006.
- 3) Kawai, T.: New element models in discrete structural analysis, 日本造船学会論文集, No.141, pp.174-180, 1977
- Bolander, J.E. and Berton, S.: Simulation of shrinkage induced cracking in cement composite overlays, Cement and Concrete Composite, Vol.26, pp.861-871, 2004.
- Bolander, J.E. and Saito, S.: Fracture analyses using spring networks with random geometry, Engineering Fracture Mechanics, Vol.61, pp569-591, 1998.
- 6) 小澤泰士,斉藤成彦,檜貝勇:3次元剛体バネモデルによるコンクリートの収縮ひび割れ解析,コンクリート工学年次論文集,Vol.26,No.1,pp.477-482,2004
- 7) 長崎了,中村光,上田尚史,国枝稔:乾燥収縮によるコンクリート構造物のひび割れ進展解析,コンクリート工学年次論文集,Vol.30,No.1,pp.453-458,2008.
- Grassl, P.: A lattice approach to model flow in cracked concrete, Cement and Concrete Composite, Vol.31, pp.454-460, 2009.
- 9) 坂敏秀: 3 次元デュアルラティスに基づく非一様グ リッドを用いた定常拡散方程式の解析手法, 日本建 築学会大会(関東)学術講演梗概集, 構造-I, pp.301-302, 2011.
- Leech, C., Lockington, D., and Dux, P.: Unsaturated diffusivity functions for concrete derived from NMR images, Materials and Structures, Vol. 36, pp.413-418, 2003.
- 11) 齊藤宗一郎ほか: ひび割れ内部の水分挙動に関する 実験的検討, 生産研究, 62巻4号, 51-54, 2010年.
- 12) Wang, K., Jansen, D.C., and Shah, S.P.: Permeability study of cracked concrete, Cement and Concrete Research, Vol.27, No.3, pp.381-393, 1997.
- 13) Aldea, C-M., et al.: Estimation of water flow through cracked concrete under load, ACI Material Journal, Vol. 97, 567-575, 2000.