論文 デュアルラティスモデルを用いたひび割れ影響下の物質移動解析

坂 敏秀^{*1} • John E. Bolander^{*2} • Peter Grassl^{*3}

要旨:ボロノイ分割とドロネー分割の双対性に着目したデュアルラティスモデルに基づく離散的に表現され たひび割れの影響を考慮可能な物質移動解析手法を開発し,ひび割れたコンクリート中の水分移動解析を行 った。理論解との比較により,デュアルラティスモデルの3次元拡散方程式解析手法としての有効性,およ び水分移動解析手法としての妥当性を示し,ひび割れの幅と深さの影響を反映した水分移動挙動を再現でき ることを確認した。

キーワード: ラティスモデル,物質移動,ひび割れ,拡散方程式

1. はじめに

構造物の長寿命化においては、構造体の性能が長期間 の使用に耐えられなければならない。RC 構造物の経年 劣化現象である中性化や鉄筋腐食などに対しては、実験 的に解明する研究が数多くなされてきた。一方で、実験 による炭酸化進行予測手法の限界が指摘され、数値解析 を用いたより一般的な手法の確立が期待されている。著 者らはこのような RC 構造物の経年劣化現象を模擬可能 な数値解析手法の開発に取り組んでおり、特にひび割れ を離散的に表現可能であることに重点を置いている。

RC 構造物の経年劣化現象を模擬する上で重要な水分 や二酸化炭素などの物質移動に関し多くの数値解析的研 究がある。離散的あるいは不連続体的手法として,例え ば,野城ら¹⁾ と Nakamura et al²⁾ は剛体バネモデル³⁾ に トラスモデルを組み込み,ひび割れ解析と物質移動解析 を連成する手法を提案している。同様の連成解析として, Bolander and Berton⁴⁾ は,ラティスモデル⁵⁾ を用いてセ メント複合材料の乾燥収縮ひび割れ解析を実施した。

これらの数値解析手法において,Nakamura et al²⁾の手 法はひび割れ面に平行なトラス要素を配置しており,ひ び割れ発生による物質移動の加速を考慮可能だが,2次 元での検討にとどまっている。トラスモデルを3次元で 用いた例として小澤ら⁶⁾と長崎ら⁷⁾の研究があるが, ひび割れの考慮方法は詳述されていない。また,Bolander and Berton⁴⁾の手法では,物質移動解析に用いるラティス 要素がひび割れ面と直交しているため,ひび割れ面に沿 った物質移動が支配的な現象を解析するのには不向きで ある。これに対し,Grassl⁸⁾はドロネー分割とボロノイ 分割の双対性に着目した2次元のデュアルラティスモデ ルを示し,ひび割れ解析と物質移動解析の連成を試みた。 Grassl⁸⁾の方法はボロノイ多角形の辺をラティス要素と みなして,ひび割れ幅を考慮しながら物質移動問題を解 く。物質移動解析を行う際にひび割れ解析で得られるひ び割れ幅を考慮可能なことがこの手法の特長である。こ のコンセプトは無理なく3次元に拡張可能であり、坂⁹ はこの方法を用いて3次元の定常拡散方程式を解いた。

本論では、Grassl⁸⁾の示したデュアルラティスモデル を用い、コンクリート・セメント複合材料を対象にひび 割れ解析と物質移動解析を連成させることを目的とし、 非定常拡散方程式解析法としてのデュアルラティスモデ ルの検証を行い、ひび割れの影響を考慮した水分挙動の 数値解析例を示す。

2. 解析手法

2.1 デュアルラティスモデル

デュアルラティスモデルを図-1に示す。モデルの作 成手順は次のようになる。(1)領域内に任意に母点を配 置する。(2)配置した母点をもとに、ドロネー分割を行 う。設定した領域は、2次元なら三角形分割、3次元なら 四面体分割される。(3)ドロネー分割の結果得られた三 角形あるいは四面体の辺をラティス要素とみなし、プラ



*1 鹿島技術研究所 建築解析グループ 研究員 修士(環境学) (正会員)

*2 University of California, Davis Civil and Environmental Engineering Professor Ph.D *3 University of Glasgow Department of Civil Engineering Senior Lecturer Ph.D イマリラティスと呼ぶ。(4) ドロネー分割と双対関係に あるボロノイ分割によって、2次元なら多角形、3次元な ら多面体で領域を分割する。(5) ボロノイ多角形あるい は多面体の辺をラティス要素とみなし、セカンダリラテ ィスと呼ぶ。

本研究では、プライマリラティスにてひび割れ解析を 行いつつ、セカンダリラティスにて物質移動解析を行い、 両解析を連成させることを目標としている。

図-2にラティス要素とひび割れ面の位置関係を示す。 プライマリラティスを用いたひび割れ解析によって生じ るひび割れ面がボロノイ多面体の面に一致する。そのた め、ボロノイ多面体の辺上にあるセカンダリラティスで ひび割れ幅の影響を容易に考慮可能となる。これがデュ アルラティスモデルの特長である。

2.2 プライマリラティスを用いたひび割れ解析手法

プライマリラティスはいわゆるラティスモデル⁵⁾で あり、そのひび割れ解析に関する定式化の詳細や解析例





は既往研究5)に説明を譲る。

本論では、Grassl⁸⁾ が示したように、ひび割れ解析の 結果得られるひび割れ幅を物質移動解析で考慮すること を想定しつつ、セカンダリラティスを用いた物質移動解 析手法の検証に主眼を置く。

2.3 セカンダリラティスを用いた物質移動解析手法

セカンダリラティス要素とドロネー四面体の関係を図 -3に示す。セカンダリラティス要素の節点はドロネー 四面体の外心である。隣り合うドロネー四面体の外心同 士を結んだものが1つのセカンダリラティス要素であり、 この2つの四面体で共有される面の面積を要素の断面積 *A_eと*する。また、外心間の距離を要素の長さ*h_eと*する。

ひび割れ部を含めたコンクリート中の物質移動を式 (1)に示す拡散方程式で近似することを想定し、セカンダ リラティスを用いて拡散方程式を離散化する。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot \left(D(\theta) \nabla \theta \right) \tag{1}$$

ここで, θ :ポテンシャル, $D(\theta)$:拡散係数,t:時刻, である。

ラティスモデルによる拡散方程式の離散化については Bolander and Berton⁴⁾ と Grassl⁸⁾の方法に倣う。ここでは、 ラティスモデルによる空間離散化方程式、および要素 eの容量マトリクス M_e と伝導マトリクス K_e をそれぞれ式 (2)~(4)に示す。

$$\boldsymbol{M} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial t} + \boldsymbol{K} \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{f} \quad t > 0 \tag{2}$$

$$\boldsymbol{M}_{e} = \frac{A_{e}h_{e}}{6d} \begin{bmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
(3)

$$\boldsymbol{K}_{e} = \frac{D_{e}A_{e}}{h_{e}} \begin{bmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
(4)

ここで、M: 全体容量マトリクス、K: 全体伝導マトリ クス、 θ : 全ポテンシャルベクトル、f: 流東ベクトル、 D_e , A_e , h_e : それぞれ要素 e の拡散係数、断面積、長さ、d: 解析空間の次元に応じたパラメータで、2次元では2、3 次元では3である。

本研究では、式(2)を Crank-Nicolson 法によって解く。

3. 解析手法の検証

3.1 非定常拡散方程式での検証

セカンダリラティスを用いる拡散方程式の解析手法を 検証する。

図-4に示す解析モデルを用い,式(5)~(7)に示す初期 条件と境界条件のもとで解析を行った。

$$\theta = \sin \frac{\pi}{L} x \quad 0 \le x \le L, t = 0 \tag{5}$$

 $\theta = 0 \qquad x = 0, L, t > 0 \tag{6}$

$$q_n = 0$$
 $y = 0, L, z = 0, L, t > 0$ (7)

ここで, *L*: 解析領域の寸法, *q_n*: 流束, *t*: 時刻である。 この問題の理論解は式(8)に示すとおりである。

$$\theta = \exp\left(-\frac{\pi^2}{L^2}t\right)\sin\frac{\pi}{L}x\tag{8}$$

図-5に理論解を実線で、ラティスモデルによる数値 解(以下、ラティス解)を点で示す。ラティス解は理論 解とよく一致しており、セカンダリラティスを用いて非 定常拡散方程式を解くことが可能なことが確認できる。

3.2 非線形拡散係数での検証

物質移動問題を拡散方程式で近似するとき,多くの場合,拡散係数はポテンシャル変数に対して強い非線形性 を示す。本論では,拡散係数が非線形の場合を検証する。

等温条件下の不飽和状態のコンクリート中の水分移動 を想定し,式(9)に示す Leech et al¹⁰⁾の拡散係数を用いる。

$$D(\theta) = 2.2 \times 10^{-4} \exp(6.4\theta) \quad (\mathrm{mm}^{2}/\mathrm{sec}) \tag{9}$$

ここで, θ は相対含水率であり, 0 から1の値をとる。

検証対象としたのは式(10)~(12)で定義された1次元 半無限領域での問題である。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad x > 0, t > 0 \tag{10}$$

$$\theta(x) = 0 \quad t = 0 \tag{11}$$

$$\theta(x=0,t) = 1$$
; $\theta(x,t) \to 0$ as $x \to \infty$ (12)

この問題は、Boltzmann 変数 $\lambda = x t^{-1/2}$ を導入すること により $\theta \ge \lambda$ に関する常微分方程式に帰着され、解 θ は $\lambda - \theta$ 平面上の曲線となることが知られている。

4 章の解析例にも転用するため、ここでは2次元のモ デル化によって解析手法の検証を行う。解析に用いたボ ロノイ分割と境界条件を図-6に示す。計算精度への要 素分割の影響を確認するため、(a) と (b) のメッシュを 用いた。解析領域は1辺30mmの正方形とし、境界条件 をy=0で含水率1,他の境界で流束0の条件とした。

解析結果(以下, ラティス解と呼ぶ)を図-7に△□ ○で示す。比較のため,1次元の有限差分法で解いた結 果(以下,差分解と呼ぶ)を併せて実線で示す。ラティ ス解が差分解より若干遅れて拡散するのが確認できるも のの,両者は概ね一致している。また,解析時間が長く なるにつれ, ラティス解と差分解がより一致する傾向が



みられる。なお、 $\theta=0$ 付近でラティス解は負の値を示し ているが、細かい要素分割を行った(b)のモデルで値のぶ れが小さいことから、 $\theta=0$ 付近の極端な非線形分布を表 現できるような十分な要素分割がなされていないためだ と考えられる。また、このぶれは時間刻みに由来する誤 差ではないことを確認した。

図-8に、Boltzmann 変数を横軸に用いた結果を示す。 ラティス解は差分解とよく一致している。ラティス解と 差分解の一致度合いを定量的に比較するために、図-8 から吸着性を求める。吸着性 *S* は式(13) によって定義され,拡散係数 *D*(θ)によって定まる。

$$S = \int_0^1 \lambda \mathrm{d}\theta \tag{13}$$

60 分時点のラティス解と差分解で求めた吸着性を表 -1に示す。ただし Leech et al¹⁰⁾ に示された含水率 0.13 m³/m³を掛けた値を示した。ラティス解と差分解の値は, Leech et al¹⁰⁾ の示した値とほぼ一致しており, セカンダ リラティスを用いた非線形拡散方程式の数値解について 妥当性を確認できた。

ひび割れの影響を考慮した水分移動の数値解析例 4.1 解析モデル

齊藤ら¹¹⁾の実験を参考に,図-9に示すようなひび 割れのあるコンクリート試験体の等温条件下の吸水実験 を想定した解析を実施する。ひび割れ面が部材幅方向に 貫通していれば2次元モデルで十分なので、図-6(b) に示すボロノイ分割を解析モデルとして再利用する。た だし、中央(x = 15 mm)位置にy軸に平行なひび割れ面 が存在すると仮定する。ひび割れ面位置での拡散係数は Wang et al¹²) と Aldea et al¹³) を参考にし、ひび割れ幅が 0.1 mm で 100 倍、0.2 mm で 1000 倍の値を設定する。

変数 θは相対含水率とし、0から1の値をとる。初期 条件は θ=0 とする。境界条件は、吸水面でθ=1,その 他の面では流束を0とする。拡散係数は式(9)に従う。 4.2 解析ケース

ひび割れの影響をみるために,表-2に示す解析ケースを準備した。乾燥収縮によって生じるひび割れなど,

シール

解析部位



ケース	ひび割れ幅・深さ	拡散係数
名称		の倍率 ^{12), 13)}
А	なし	なし
В	0.1 mm (貫通)	100倍
С	0.2 mm(貫通)	1000 倍
D	0.1 mm(非貫通)	100 倍

表-2 解析ケースの設定

長期耐久性に影響を及ぼすと考えられているひび割れを 想定し,ひび割れ幅を0.1 mm と0.2 mm の2種類とした。 また,貫通ひび割れと非貫通ひび割れの影響の違いを明 らかにすることを目的とし,ひび割れが試験体全体を貫 通している場合と,半分までの非貫通のものを比較する。 なお,ひび割れなしのケースAは3.2 節で計算したモデ ルである。

4.3 解析結果

解析時刻3,15,60分時点の各ケースの含水率分布を図 –10に示す。全体に見られる傾向として、低含水率で の等値線が高含水率のそれと比べて凸凹している。これ は、3.2節で述べたように、含水率0付近でのメッシュ解 像度の低さによるものと推測される。ケースAは健全な コンクリートであり、時間の進行とともに水分がほぼ-様に浸入していくことが確認できる。ケース B~D は, ひび割れ部へ先に水分が浸入し、その後健全なコンクリ ート部へ広がっていくことが確認できる。ケースCは15 分時点にはひび割れ内が飽和しており、その後は健全部 とひび割れ部から吸水していると推測される。ケース B とDは、3分時点ではほぼ同じ含水率分布を示すが、ケ ースDはひび割れ部が飽和し、その後の全体の分布形状 が丸くなっていく。60分までの分布からは、ケース A, B, Dは健全部からの吸水が多いのに対し、ケースCはひび 割れ部を通じた吸水が健全部からの吸水とほぼ同様に生 じていると思われる。

部材が飽和するまでの時間を比べるために,各節点で の含水率を領域全体で積分し,部材に吸収された水分量 を各ステップで求めた。この吸収された水分量を飽和水 分量で除した割合を図-11に示す。ひび割れ幅の大き いケース C < ケース B < ケース D < ケース A の順に部 材全体が飽和状態になるまでの時間が長くなり,ひび割 れの規模が大きいほど飽和するのが速くなると考えられ る。また,各ステップ間の水分量の差を時間刻みで割る ことにより吸水速度を求め,推移を図-11右に示す。 吸水速度の減少は各ケースとも同様の傾きを示す。

図-12に, 飽和するまでの含水率の変化をケース別 に示す。ひび割れ位置(x=15mm)での含水率変化(左) とy=15mm位置でのx方向の含水率変化(右)を示し



図-12 飽和するまでの含水率の変化

た。ケースAでは、 3.2節で示した含水率分布に従って 吸水し、シール端 (y = 30 mm) に到達する。ケースB では、ひび割れ先端まで急速に吸水し、30分時点ではひ び割れからの吸水で部材内部に水分が移動している。一 方で、240分時点ではほぼ一様な含水率分布を示してい ることから、健全部からの吸水によって全体の含水率分 布が決まっていると考えられる。ケースCでは、急速に ひび割れ部が飽和し、ひび割れ部を通じて部材内部に水 分が移動していると捉えられる。ケースDでは、ひび割 れ部が急速に飽和することが確認できる。ひび割れ部か ら先のシール端まではケースAと同様の水分移動現象だ と考えられる。y = 15 mm位置での分布はケースBと同 様の傾向を示している。

以上の結果より,コンクリートに生じるひび割れ幅と 深さの影響についてセカンダリラティスを用いた水分移 動解析で考慮可能だと考えられる。今後は,実験のシミ ュレーション解析などの実施により,実現象との比較を 行う予定である。

5. 結論

本論では、Grassl⁸⁾の示したデュアルラティスモデル を3次元に拡張した場合のラティス要素とドロネー四面 体・ボロノイ多面体の関係を示した。この3次元のモデ ル化を用いても2次元と同様に非定常拡散方程式を解析 可能なことを確認した。

続いて、ポテンシャル変数に対して非線形な拡散係数 を与えた場合について、2次元モデルを用いて解析手法 の妥当性を検証した。その結果、等温条件下の不飽和状 態におけるひび割れのあるコンクリートの吸水実験を想 定した計算例を示し、デュアルラティスモデルを用いて コンクリートのひび割れ幅と深さの影響を水分移動解析 で考慮可能なことを確認した。

参考文献

- 野城良祐,石川靖晃,中村光,田邉忠顕:物質移動 を考慮した RBSM によるひび割れ進展解析手法の 開発,コンクリート工学年次論文集, Vol.25, No.1, pp.467-472, 2003.
- 2) Nakamura, H., et al.: Time-dependent structural analysis

considering mass transfer to evaluate deterioration process of RC structures, Journal of Advanced Concrete Technology, Vol. 4, No. 1, pp.147-158, 2006.

- Kawai, T.: New element models in discrete structural analysis, 日本造船学会論文集, No.141, pp.174-180, 1977.
- Bolander, J.E. and Berton, S.: Simulation of shrinkage induced cracking in cement composite overlays, Cement and Concrete Composite, Vol.26, pp.861-871, 2004.
- Bolander, J.E. and Saito, S.: Fracture analyses using spring networks with random geometry, Engineering Fracture Mechanics, Vol.61, pp569-591, 1998.
- 小澤泰士,斉藤成彦,檜貝勇:3 次元剛体バネモデ ルによるコンクリートの収縮ひび割れ解析,コンク リート工学年次論文集, Vol.26, No.1, pp.477-482, 2004.
- 7) 長崎了,中村光,上田尚史,国枝稔:乾燥収縮によるコンクリート構造物のひび割れ進展解析,コンクリート工学年次論文集, Vol.30, No.1, pp.453-458, 2008.
- Grassl, P.: A lattice approach to model flow in cracked concrete, Cement and Concrete Composite, Vol.31, pp.454-460, 2009.
- 5) 坂敏秀:3 次元デュアルラティスに基づく非一様グ リッドを用いた定常拡散方程式の解析手法,日本建 築学会大会(関東)学術講演梗概集,構造-I, pp.301-302,2011.
- Leech, C., Lockington, D., and Dux, P.: Unsaturated diffusivity functions for concrete derived from NMR images, Materials and Structures, Vol. 36, pp.413-418, 2003.
- 11) 齊藤宗一郎ほか:ひび割れ内部の水分挙動に関する 実験的検討,生産研究,62巻4号,51-54,2010年.
- Wang, K., Jansen, D.C., and Shah, S.P.: Permeability study of cracked concrete, Cement and Concrete Research, Vol.27, No.3, pp.381-393, 1997.
- Aldea, C-M., et al.: Estimation of water flow through cracked concrete under load, ACI Material Journal, Vol. 97, 567-575, 2000.