

論文 ハイブリッド型ペナルティ法を用いた鉄筋コンクリート構造物の離散ひび割れの解析

藤原 良博*1・竹内 則雄*2・塩見 忠彦*3・上林 厚志*4

要旨: ハイブリッド型ペナルティ法 (HPM) は、連続体から不連続体に移行する破壊現象の評価に適した手法の一つである。離散ひび割れの計算に二重節点や自由度の変更は不要で、要素間のペナルティ消失のみで表現できる。さらに、要素に弾性体を用いており弾性変形の精度が良い。これらの特徴は脆性部材の進行性破壊の評価に最適であり、筆者らは HPM に新たに鉄筋コンクリートの構成式を導入した。これにより初期ひび割れからひび割れの開閉・進展・分岐の精度良い計算が可能となった。適用性を示すため、アンカーボルト引き抜き試験およびディープビーム載荷試験のシミュレーション解析を行い、良好な結果が得られた。

キーワード: ハイブリッド型ペナルティ法, 離散ひび割れ, 鉄筋コンクリート

1. はじめに

コンクリート構造物の損傷や崩壊の対策には、まず、その破壊過程を予測する必要がある。コンクリートは引張応力により微細なひび割れが多発し、その後主要なひび割れが成長・分岐・進展することで破壊に至る。このような複雑な進行性破壊過程を表すためには、個々のひび割れの正確な評価が重要であり課題となっている。

離散ひび割れの計算については、これまで様々な方法が研究されている。有限要素法 (FEM) では離散ひび割れに二重節点を用いる必要があり、そのため自由度が増加しアルゴリズムが複雑になる。要素内に離散ひび割れを表現できる拡張有限要素法 (XFEM)¹⁾によりコンクリート試験のシミュレーション解析も行われているが²⁾³⁾、計算が複雑でひび割れの分岐やひび割れが多発する問題への適用が難しい。粒子法はメッシュが不要で離散ひび割れの計算も可能であり、コンクリートの計算にも用いた例があるが⁴⁾、定量的な精度があまり良くない。

その他に、離散体である剛体や弾性体の境界を接合して連続体を表し、接合部を分離させて離散ひび割れを表す手法がある。剛体をばねで結ぶ剛体ばねモデル (RBSM)⁵⁾や個別要素法 (DEM)⁶⁾、弾性体をペナルティで結ぶ不連続変形法 (DDA)⁷⁾⁸⁾およびハイブリッド型ペナルティ法 (HPM)⁹⁾¹⁰⁾である。これらの手法は、より簡便なアルゴリズムで要素の離散を計算できる。

DEM は連続体の計算精度が良くないために、コンクリート構造物の計算にはあまり用いられていない。DEM は点接触なのに対し、RBSM は面接触により表面力を評価し、連続体の変形を近似的に求めることができる。非線形挙動をばねの構成式で表し、連続体から離散的な滑り

や亀裂の計算が可能であり、地盤やコンクリートに応用されている¹¹⁾¹²⁾。しかし、RBSM では変形を剛体間のみでしか表現できないために弾性変形に対する精度があまり良くない。

HPM は、弾性体をペナルティで結ぶことで RBSM の欠点を解決している。弾性体であるために、ひび割れ前の連続体やひび割れ間の弾性領域の変形精度が良い。

筆者らは HPM に直接破壊エネルギーを反映できるひび割れ評価手法と圧縮破壊の構成式を導入した。さらに鉄筋を積層要素として追加し、鉄筋コンクリート構造物の進行性破壊過程の精度良い計算を可能にした。

新たに HPM に導入した鉄筋コンクリート構成式の妥当性と計算精度の検証のため、無筋コンクリートに埋め込まれたアンカーボルトの引き抜き試験およびディープビーム試験のシミュレーション解析を行った。

2. HPM の基礎方程式の概要

HPM の定式化は文献¹⁰⁾に示されている。特徴は、部分領域を弾性体として部分領域間を変位の連続性を満足するように Lagrange 未定乗数を導入したハイブリッド型の仮想仕事式を用いていることである (式(1))。

$$\sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}(\delta \mathbf{u}) dV - \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV \right) - \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{\langle s \rangle}} \lambda \cdot (\mathbf{u}_{\langle s \rangle}^{(s_a)} - \mathbf{u}_{\langle s \rangle}^{(s_b)}) dS \right) - \int_{\Gamma_o} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0 \quad (1)$$

ここに、 $\Omega^{(e)}$ は部分領域 (図-1)、上付きの (s_a) 、 (s_b) は境界 $\Gamma_{\langle s \rangle}$ で隣接する 2 つの部分領域 $\Omega^{(s_a)}$ と $\Omega^{(s_b)}$ に関する量を示す。 $\mathbf{u}_{\langle s \rangle}^{(s_a)}$ 、 $\mathbf{u}_{\langle s \rangle}^{(s_b)}$ は、 $\Omega^{(s_a)}$ と $\Omega^{(s_b)}$ 間の境界 $\Gamma_{\langle s \rangle}$ 上の変位 (図-2)。M は部分領域の数、N は部分領域間

*1 法政大学大学院 デザイン工学研究科 (学生会員)

*2 法政大学大学院 デザイン工学研究科教授 工博

*3 (株) マインド エンジニアリングディレクター Ph.D.

*4 (株) 竹中工務店 技術研究所 主任 (正会員)

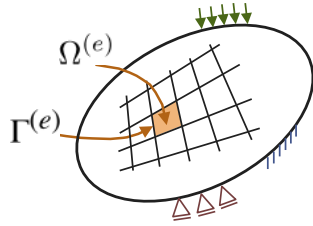


図-1 部分領域 $\Omega^{(e)}$ と部分領域間の境界 $\Gamma^{(e)}$

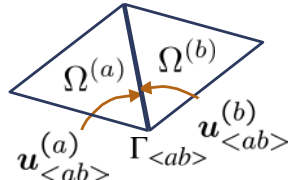


図-2 部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ 間の境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$

の境界の数, δu は仮想変位, σ は応力, f は物体力, \hat{f} は表面力である。

ここで, Lagrange 未定乗数 λ は物理的には境界 $\Gamma_{\langle s \rangle}$ の表面力に対応することから, λ に対し, 式(2)のようにペナルティ関数を導入している。

$$\lambda_{\langle s \rangle} = p \cdot \delta_{\langle s \rangle} \quad (2)$$

ここに, p はペナルティ関数, $\delta_{\langle s \rangle}$ は境界 $\Gamma_{\langle s \rangle}$ の相対変位である。

これは, DDA で用いているペナルティ関数と同じ考え方であるが, DDA では, 点接触を前提に1点でペナルティ関数を導入するのに対し, HPM では境界面上に分布したペナルティ関数を用いる。ひび割れなどの不連続現象を表すために自由度を変更する必要は無く, 式(2)の右辺をゼロにするだけでよい。ペナルティ関数を硬いばねと考えれば RBSM と同様に部分領域間のばねとして非線形挙動の構成式を定義できる。

自由度は部分領域 $\Omega^{(e)}$ 内の点 $x^p = (x_p, y_p) \in \Omega^{(e)}$ に定義し, 線形変位場 $u^{(e)}$ を式(3)のように仮定する。

$$u^{(e)} = N_d^{(e)} d^{(e)} + N_\varepsilon^{(e)} \varepsilon^{(e)} \quad (3)$$

ここで, $d^{(e)}$ は剛体変位および剛体回転を表し, $\varepsilon^{(e)}$ は部分領域 $\Omega^{(e)}$ 内で一定なひずみを表す。上付きの (e) は部分領域 $\Omega^{(e)}$ に関するものであることを意味する。式(3)におけるそれぞれの係数は, 2次元平面問題の場合, 以下の通りである。

$$d^{(e)} = [u^p, v^p, \theta^p]^t, \quad \varepsilon^{(e)} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^t,$$

$$N_d^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(y - y_p) \\ 0 & 1 & (x - x_p) \end{bmatrix}$$

$$N_\varepsilon^{(e)} = \begin{bmatrix} x - x_p & 0 & (y - y_p)/2 \\ 0 & y - y_p & (x - x_p)/2 \end{bmatrix}$$

ここで, u^p, v^p は部分領域内の点における剛体変位, θ^p は剛体回転を表しており, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ は, それぞれ, 部分領域内で一定な値を持つ x および y 方向の垂直ひずみとせん断ひずみを表している。

3. 鉄筋コンクリート構成式の実装

3.1 コンクリートの圧縮側構成式

コンクリートの一軸圧縮応力ひずみ関係は圧縮強度 f_c を最大点とする曲線となる(図-3点線)。これを竹内ら¹²⁾が RBSM で採用した方法と同様にトリリニアで近似した(図-3実線)。圧縮限界ひずみ後の軟化も考慮可能とした。除荷・再載荷の履歴特性は原点指向とした。

圧縮強度 f_c は二軸応力状態に応じて変化し, H. Kupfer ら¹³⁾が提案した降伏曲面を用いた(図-4)。

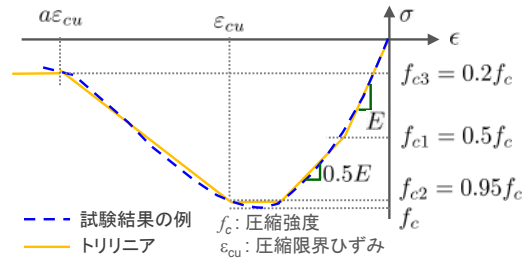


図-3 圧縮応力のスケルトンカーブ

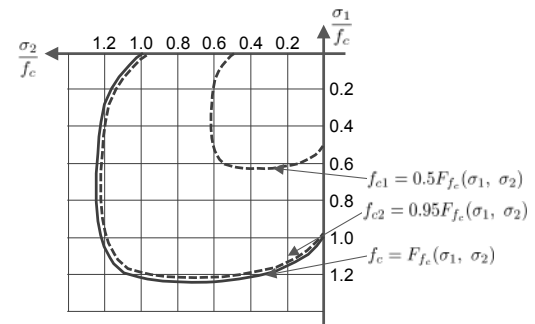


図-4 二軸状態での降伏曲面

3.2 コンクリートの引張側構成式

要素境界 $\Gamma_{\langle ab \rangle}$ における法線方向の表面応力 σ_n が引張強度 f_t に達するとペナルティ関数の値を消失させて離散ひび割れを表す(図-5)。ひび割れ後は, Hillerborg ら¹⁴⁾が定義した破壊エネルギー G_f を考慮した引張軟化挙動を用い(図-6), ペナルティ関数をゼロとし, 表面応力減少分を解放力として関連部分に分配する。除荷・再載荷経路は原点指向とした。

引張軟化曲線は, Hordijk らによる提案式(式(4))を用いた¹⁵⁾¹⁶⁾。

$$\frac{\sigma_n}{f_t} = \left(1 + 27 \left(\frac{\delta_n}{\delta_c} \right)^3 \right) \exp \left(-6.93 \frac{\delta_n}{\delta_c} \right) - 28 \frac{\delta_n}{\delta_c} \exp(-6.93) \quad (4)$$

ここに, δ_c : 応力がゼロとなる限界仮想ひび割れ幅 (mm)
 $\delta_c = 5.14 G_f / f_t$ (5)

f_t : 引張強度 (MPa), G_f : 破壊エネルギー (N/mm)

式(4)による引張軟化曲線の例を図-7の赤線で示す。文献¹⁷⁾の共通試験結果(図-7灰色線)はほぼ破線と実線の間に入り, 適用性が高い経験式である。

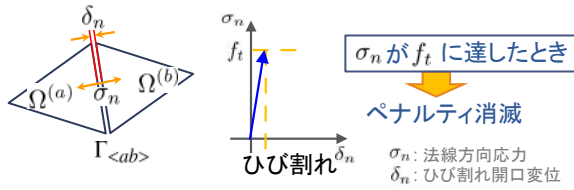


図-5 要素表面力と引張強度

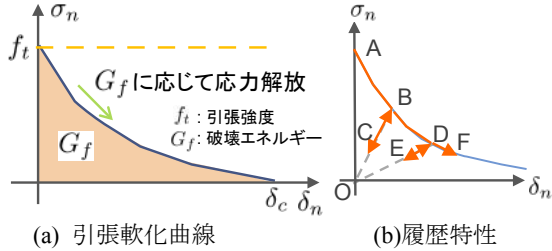


図-6 コンクリートの引張軟化曲線

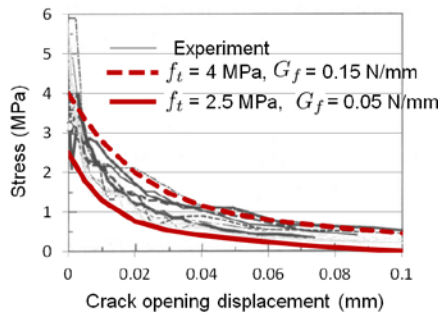


図-7 引張軟化曲線の履歴特性

HPM では、離散ひび割れに直接破壊エネルギーを反映した計算ができるため、精度のよいひび割れ幅の評価が可能である。ひび割れはメッシュ分割に依存するが、Delaunay法を適用したランダムなメッシュを用いることでひび割れを比較的良く再現することができ、要素分割の違いによる影響は小さい¹⁸⁾。

3.3 鉄筋の構成式

鉄筋は積層要素として定義し、要素はコンクリート1層と複数の鉄筋層よりなる(図-8)。鉄筋層の剛性はRBSMと同様にばねで定義する。隣接要素間の境界の剛性マトリックスとペナルティは(6)式で定義する。

$$\mathbf{k}_{\langle ab \rangle} = p\mathbf{k}_{c\langle ab \rangle} + \sum_{i=1}^n \mathbf{k}_{si\langle ab \rangle} \quad (6)$$

ここに、 P はペナルティ関数、 $\mathbf{k}_{c\langle ab \rangle}$ はコンクリートの剛性マトリックス ((7)式)、 $\mathbf{k}_{si\langle ab \rangle}$ は i 番目の層の鉄筋の剛性マトリックス、 n は鉄筋層の層数である。

$$\mathbf{k}_{c\langle ab \rangle} = \int_{\Gamma_{\langle ab \rangle}} \mathbf{B}_{\langle ab \rangle}^t \mathbf{k}_c \mathbf{B}_{\langle ab \rangle} d\Gamma \quad (7)$$

$$\text{ここに、} \mathbf{B}_{\langle ab \rangle} = \left[\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)} \mathbf{N}^{(a)} \quad \mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)} \mathbf{N}^{(b)} \right] \quad (8)$$

$$\mathbf{k}_c = \frac{E_c}{(1-\nu^2)h} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \quad (9)$$

$\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(a)}$ 、 $\mathbf{R}_{\langle ab \rangle}^{(b)}$ は座標変換マトリックス、 E_c 、 ν はコンクリートのヤング係数およびポアソン比、 h は隣接要素間距離である¹⁰⁾。

$\mathbf{k}_{si\langle ab \rangle}$ は下式に示す隣接する要素間の境界の表面力と相対変位の関係より得られる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \frac{E_s}{h} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \beta \sin^2 \theta & (\beta - 1) \cos \theta \sin \theta \\ (\beta - 1) \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + \beta \cos^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_s \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ここに、 E_s は鉄筋のヤング係数、 β はダウエル効果の係数、 θ は鉄筋軸方向と境界の法線方向のなす角度である(図-9)。

鉄筋の非線形構成式はパイリニアモデルを用いた。

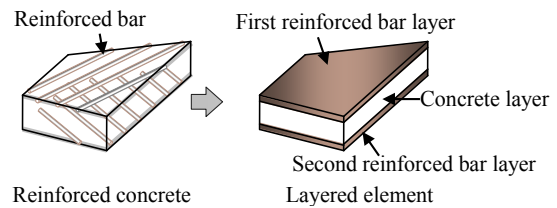


図-8 積層要素の説明

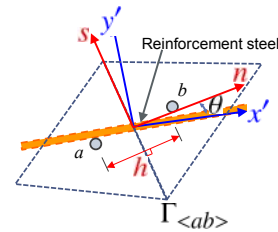


図-9 鉄筋の方向

4. アンカーボルト引き抜き試験のシミュレーション

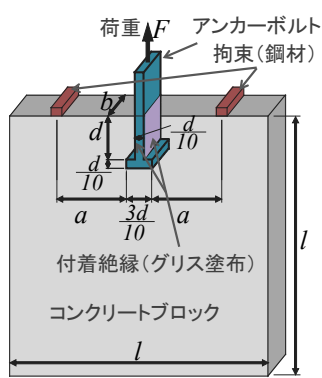
4.1 試験体の説明

HPM に導入した構成式の適用性を確認するため、無筋コンクリートに埋め込まれたアンカーボルト引き抜き試験¹⁹⁾のシミュレーション解析を行った。試験体は2体あり、その寸法や境界条件が異なる。モデル図と寸法を図-10に示す。

4.2 解析モデル

モデル#1 の解析モデルを図-11に示す。メッシュ分割はDelaunay法²⁰⁾を適用した。左右対称モデルであることから右半分のみモデル化し、左側面を対称境界(鉛直ローラー)とした。荷重はアンカーボルト上部に静的な引張荷重を細分化して与えた。

文献¹⁹⁾を参照して定めた材料定数を表-1に示す。非線形アルゴリズムは竹内¹²⁾により拡張された山田の荷重増分法(r_{min} 法)²¹⁾を用いた。この手法は、RBSMにおいてコンクリートの引張ひび割れ、圧縮破壊現象を的確に表現できるアルゴリズムとして用いられている。



	a	b	d	l
モデル#1	300	100	150	900
モデル#2	60	80	60	350

単位 mm

図-10 試験体モデル図

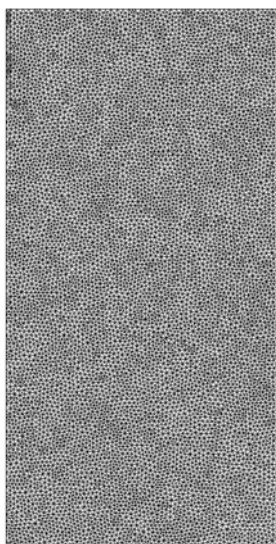


図-11 解析モデル図

表-1 材料定数

項目	コンクリート		アンカー ボルト
	モデル#1	モデル#2	
圧縮強度 f_c (MPa)	32.6	34.3	—
引張強度 f_t (MPa)	2.8	3.4	—
ヤング率 E (GPa)	24.7	29.4	205.9
ポアソン比 ν	0.167	0.167	0.3
破壊エネルギー G_f (N/mm)	0.06	0.08	—

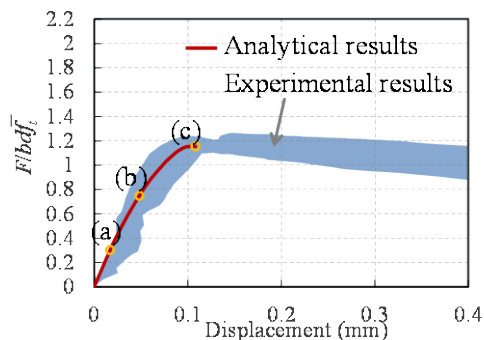


図-12 基準化荷重と変位関係の比較 (モデル#1)

4.3 解析結果

(1) モデル#1 の解析結果

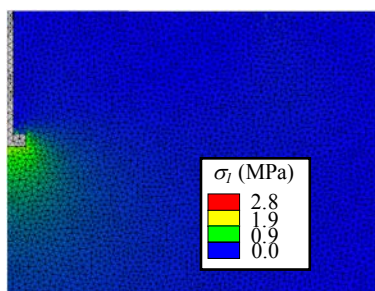
荷重 F を bdf_t で基準化した荷重と変位関係を図-12に示す (ただし, $f_t = 0.33\sqrt{f_c}$, f_c は圧縮強度 (MPa))。解析結果は試験結果によく対応している。

図-13には図-12の(a)~(c)に対応する位置の変形図と最大主応力 σ_1 コンター図を示す。初期ひび割れが発生し、更にひび割れが進展・成長していく過程において試験結果によく対応した荷重変位関係が得られた。

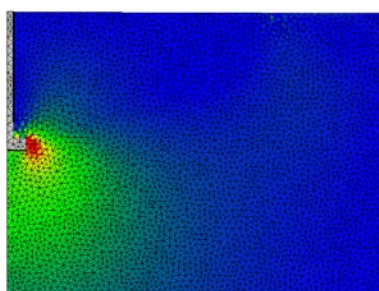
(2) モデル#2 の解析結果

モデル#2の試験では試験後の写真よりひび割れ状態が分かっている (図-14)。

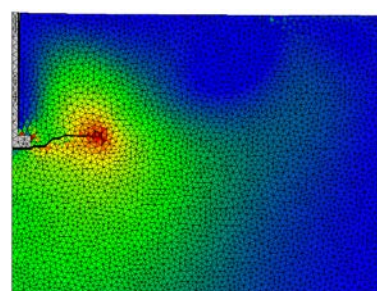
図-15に変形図 (倍率20倍) と最大主応力 σ_1 コンター図を示す。解析結果は実験と同様に最初にアンカーボルト底面からひび割れ、横方向にひび割れが進展し、その後拘束点に向かうひび割れと斜め下方向へ向かうひび割れに分岐する。このようなひび割れの成長と分岐が実験結果とよく対応した。ひび割れ先端の集中応力は離散ひび割れの考慮により表現できる。引張軟化曲線を適切に設定できれば、要素境界の解放応力による連続的なひび割れの進展を精度良く評価でき、さらに破壊時の応力分布や変形が精度良く求められる。



(a) $F/bdf_t = 0.303$



(b) $F/bdf_t = 0.748$



(c) $F/bdf_t = 1.154$

図-13 変形図と最大主応力 σ_1 コンター図 (モデル#1)

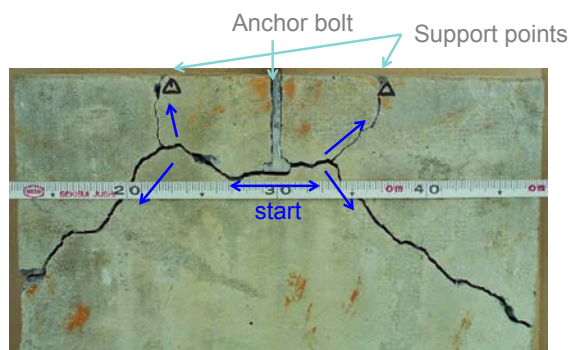


図-14 試験後のひび割れ状態 (モデル#2)

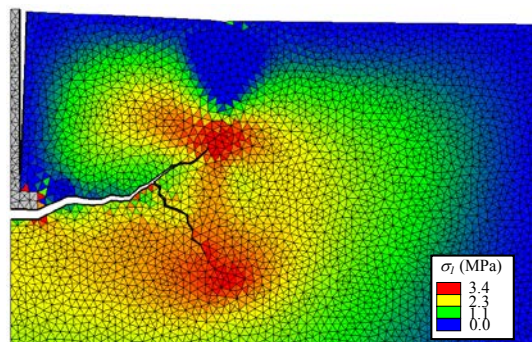


図-15 解析結果のひび割れパターン (モデル#2)

5. ディープビーム試験のシミュレーション

5.1 試験体の説明

ディープビーム試験体の模式図を図-16に示す。実験では水平方向の変位と回転が自由である鋼製の支承を使用している。鉄筋 (D16) 6本が2段に配筋されている。

5.2 解析モデル

解析モデルを図-17に示す。メッシュ分割はDelaunay法²⁰⁾を適用した。図-17の赤枠内に鉄筋層を定義した。配筋を考慮し鉄筋層高さを40mmとし、厚みは鉄筋の総断面積より設定した。材料定数を表-2に示す¹⁹⁾。

鉛直荷重は拡張 r_{min} 法の収束性を考慮して細分化し、左右の荷重版の中央上面に与えた。

表-2 材料定数

項目	コンクリート	鉄筋	支承版
圧縮強度 f_c (MPa)	54.4	375.3	—
引張強度 f_t (MPa)	3.3	375.3	—
ヤング係数 E (GPa)	33.3	210.0	210.0
ポアソン比 ν	0.167	—	0.3
厚み (mm)	100.0	29.79	100.0
破壊エネルギー G_f (N/mm)	0.13	—	—
鉄筋角度 ($^\circ$)	—	0.0	—
ダウエル効果係数 β	—	0.005	—

5.3 解析結果

図-18に荷重変形関係を示す。荷重版直下のコンクリートが圧縮破壊し、解析結果の変位が急激に増大した。

図-19に変形図 (倍率 40.0) と最小主応力 σ_3 コンター図を示す。最初に供試体下面中央に曲げひび割れが入り、次に支持版から荷重版に向かいせん断ひび割れが進

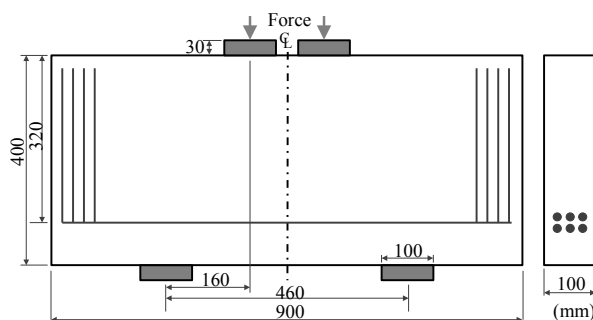


図-16 試験体の模式図

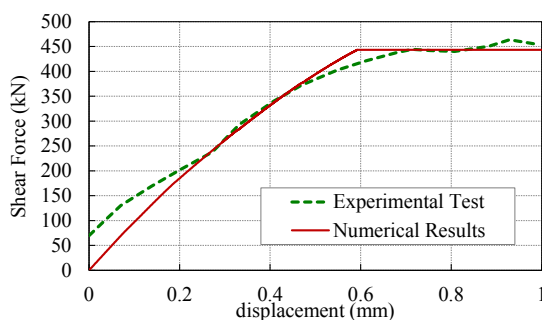


図-18 荷重変形関係

展していく過程を表すことができた。ひび割れ後に支持版と荷重版間に圧縮ストラットが形成され、最終的に圧縮破壊により計算が終了した。

このように、鉄筋コンクリートにおいても進行性破壊現象が精度良く計算できることが確認できた。

6. まとめ

HPMは連続体の変形精度がよく、ペナルティ消失という簡便な方法で弾性体の離散的な破壊を計算できる手法である。筆者らは、HPMに対し新たに鉄筋コンクリート構成式を導入し、ひび割れを含む進行性破壊過程に対し精度よい評価が可能となった。

コンクリートの引張破壊構成式は、Hordijkら¹⁶⁾の経験式を適用してひび割れ幅を直接破壊エネルギーに反映させられるようにした。コンクリートの圧縮破壊は要素内部の自由度において、トリリニア型で軟化現象も評価可能な骨格曲線を用いた。鉄筋は積層にばねを定義し、非線形構成式はバイリニアモデルを用いた。

コンクリート構成式の検証のため、無筋コンクリートに埋め込まれたアンカーボルト引き抜き試験のシミュレーション解析を行った。モデル#1では、基準化した荷重変位関係が試験結果と良く対応し、モデル#2には、ひび割れの進展と分岐が試験結果と良く対応する結果が得られた。

鉄筋コンクリート構成式の検証のため、ディープビームの荷重試験に対するシミュレーション解析を行った。荷重変形関係が試験結果と良く対応し、ひび割れの進展

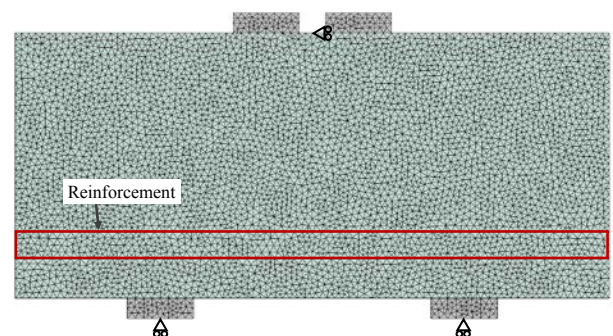


図-17 解析モデル

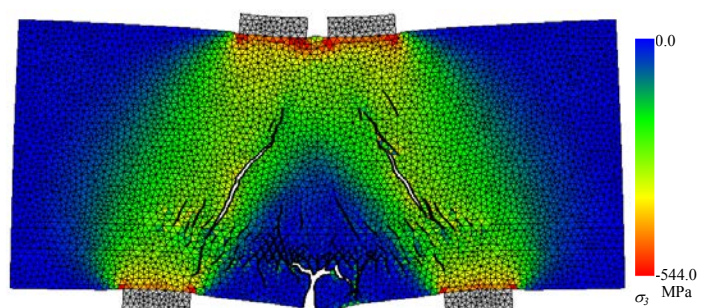


図-19 変形図と σ_3 コンター図

も良い結果が得られた。

以上より、新たに HPM に導入した鉄筋コンクリート構成式は、定性的にも定量的にもコンクリートの進行性破壊過程を精度よく評価できることが確認できた。

謝辞

図-7、図-12 および図-18 の実験結果は (社) 日本コンクリート工学会の委員会報告に掲載された図を使用しました。

離散化極限解析およびコンクリート構成式について丁寧なご指導下さった上田眞稔博士に感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Belytschko T and Black T. : Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.45, No.5, pp.601-620, 1999.
- 2) Unger, J. F., Eckardt, S. and Könke, C. : Modelling of Cohesive Crack Growth in Concrete Structures with the Extended Finite Element Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.196, No.41, pp.4087-4100, 2007.
- 3) Theiner, Y. and Hofstetter, G. : Numerical Prediction of Crack Propagation and Crack Widths in Concrete Structures, Engineering Structures, Vol. 31, No.8, pp.1832-1840, 2009.
- 4) Rabczuk, T. and Belytschko, T. : A Three-Dimensional Large Deformation Meshfree Method for Arbitrary Evolving Cracks, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.196, No.29, pp.2777-2799, 2007.
- 5) Kawai, T. : New Element Models in Discrete Structural Analysis, Journal of the Society of Naval Architects of Japan, No. 141, pp.174-180, 1977.
- 6) Cundall, P. A. : A Computer Model for Simulating Progressive Large Scale Movements in Blocky Rock Systems, Proceedings of the Symposium of the International Society of Rock Mechanics (Nancy, France), Vol. 1, No. II-8, 1971.
- 7) Shi, G. H. and Goodman, R. E. : Generalization of Two-Dimensional Discontinuous Deformation Analysis for Forward Modeling, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol.13, No.4, pp.359-380, 1989.
- 8) 佐々木猛, 大西有三, 吉中龍之進 : 不連続変形法 (DDA) とその岩盤工学への適用に関する研究, 土木学会論文集, No.493/III-27, pp.11-20, 1994.
- 9) 竹内則雄, 草深守人, 武田洋, 佐藤一雄, 川井忠彦 : ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析, 土木学会構造工学論文集, Vol. 46A, pp.261-270, 2000.
- 10) 竹内則雄, 大木裕久, 上林厚志, 草深守人 : ハイブリッド型変位モデルにペナルティ法を適用した離散化モデルによる材料非線形解析, 日本計算工学会論文集 (Transactions of JSCES Paper No.20010002), pp.53-62, 2001.
- 11) 竹内則雄 : 地盤力学における離散化極限解析, 培風館, 1991.
- 12) 竹内則雄, 上田眞稔, 上林厚志, 鬼頭宏明ほか : 鉄筋コンクリート構造の離散化極限解析法, 丸善, 2005.
- 13) Kupfer, H., Hilsdorf, H. K. and Rusch, H. : Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses, ACI Journal Proceedings, Vol. 66, No.8, pp.656-666, 1969.
- 14) Hillerborg, A., Modéer M. and Petersson, P. E. : Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements, Cement and Concrete Research, Vol.6, No.6, pp.773-781, 1976.
- 15) 中村成春, 橋高義典, 三橋博三, 内田裕市 : コンクリートの引張軟化特性の標準試験方法に関する基礎的検討, コンクリート工学論文集, 第10巻, 第1号, pp.151-164, 1999.
- 16) Cornelissen, H. A. W., Hordijk, D. A. and Reinhardt, H. W. : Experiments and Theory for the Application of Fracture Mechanics to Normal and Lightweight Concrete, Fracture toughness and Fracture Energy of Concrete, pp.565-575, 1986.
- 17) 橋高義典, 内田裕市, 金子佳生, 関田徹志ほか : コンクリートの破壊特性の試験方法に関する調査研究委員会報告, コンクリート工学年次論文集, Vol. 23, No. 1, 2001.
- 18) 富田充宏, 田中志野 : デローニ三角分割を用いた鉄筋コンクリートはりの解析, 石川工業高等専門学校紀要, Vol.38, pp.65, 2006.
- 19) 日本コンクリート工学会編 : 破壊力学の応用研究会報告書, (社) 日本コンクリート工学会, 1993.
- 20) 谷口健男 : FEM のための要素自動分割 デローニ三角分割法の利用, 森北出版, 1992.
- 21) Yamada, Y., Yoshimura, N., and Sakurai, T. : Plastic Stress-Strain matrix and its Application for the Solution of Elasto-Plastic Problem by a Finite Element Method, International Journal of Mechanical Sciences, Vol.10, pp. 343-354, 1968.