

# 論文 変形分離原理に基づく RC 造部材の降伏変形角の統計計算法

王 澤霖\*1・楠 浩一\*2・諏訪田 晴彦\*3・大塚 悠里\*4

**要旨:** 本論文では, RC 造梁, 柱の降伏変形角を鉄筋の抜け出しによる変形 (抜け出し変形), せん断変形, 曲げ変形に分離する方法に基づき, 力学モデルを用いて各変形成分の関係を定式化し, 各変形成分の比 (抜け出し変形/曲げ変形, せん断変形/曲げ変形) と部材のシアスパン比の関係を検討した。また, 実用性を考慮して, 数理統計手法を用いてさらに簡略な関係式を提案した。得られた提案式による計算値をデータベースによる実験値, さらに既存の方法による計算結果と比較し, 提案式の合理性と精度を確認した。さらに, 降伏変形角の実験値/提案式による計算値に影響を与える因子を分析した。

**キーワード:** 降伏変形角, 変形分離, シアスパン比, 数理統計

## 1. はじめに

鉄筋コンクリート造建築物において, 地震応答を精度良く評価するために, 降伏点の変形と耐力は重要な因子である。また, 現行の建築基準法に規定された限界耐力計算法では<sup>1)</sup>, 建築物の耐震性能を検証するためには, 限界変形と応答値を比較しなければならない。大地震時, 図-1に示すように建築物の応答低減係数  $F_h$  に応じ要求曲線を低減すると, 想定される応答点も低減する。 $F_h$  は等価減衰定数  $h_{eq}$  の関数として定義されるため,  $F_h$  の精度向上のためには  $h_{eq}$  の精度が重要である。さらに,  $h_{eq}$  を計算する際, 部材の塑性率 (最大変形/降伏変形) が極めて重要であるので, 応答低減係数  $F_h$  を精緻化するためには, 建物の塑性率を検討する必要がある。また, 塑性率の精度を評価する際には, 降伏点の変形が大きく影響する。

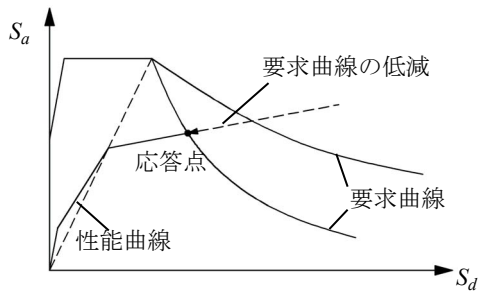


図-1 限界耐力計算法概要図

降伏点の変形の推定法については様々な提案が行われている。菅野の研究<sup>2)</sup>により, 回帰分析に基づいて提案された剛性低下率  $\alpha_y$  を用いる評価手法が簡単に降伏変形角の計算に応用でき, 精度も期待できる。しかし, 高強度材料を用いる部材に対しては適用範囲ではない。申・壁谷澤<sup>3)</sup>, 長崎等<sup>4)</sup>, 姜・北山<sup>5)</sup>らは, 変形分離に

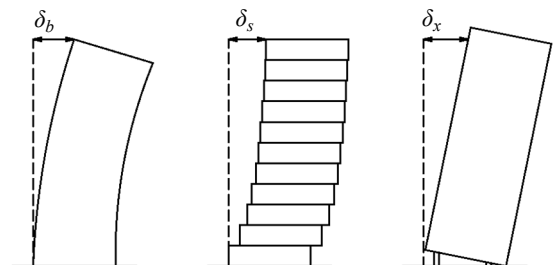
よる各変形成分を力学的モデルにより分析し, 計算式を提案している。これらは各変形成分を考慮しているが, せん断力による変形角の計算においては複雑なトラス機構とアーチ機構を使うため, 実用性が低いという問題点がある。

著者らは梁の変形角を抜け出しによる変形, せん断による変形, 曲げ変形に分離して, 算出する降伏変形角の算定式を提案した<sup>6)</sup>。特に, せん断変形については, 複雑なトラス機構とアーチ機構を使わず, せん断力はコンクリートが負担すると仮定した簡明な力学モデルで算出した。そこで, 本論文ではこの提案方法に基づいて, 力学モデルとともに数理統計の手法も使い, 各変形成分の関係を定式化する。さらに, この提案式を用い, 梁と柱部材降伏変形角の簡略式を推定し, データベースや過去の方法との比較を行い, それらの精度を検討する。

## 2. 本研究で用いた算定式とデータベースの概要

### 2.1 変形分離による降伏変形角の算定式

図-2に示すように, 水平力を受ける部材の変形は抜け出し, せん断, 曲げ三つの成分に分けることができる。



(a) 曲げ変形 (b) せん断変形 (c) 抜け出し変形

図-2 部材の変形成分

よって, 降伏時の変形角は, 曲げ変形による変形角  $R_b$ ,

\*1 東京大学大学院 工学研究科建築学専攻 (学生会員)

\*2 東京大学 地震研究所教授 (正会員)

\*3 国立研究開発法人建築研究所 国際地震工学センター 主任研究員 (正会員)

\*4 国立研究開発法人建築研究所 構造研究グループ 研究員 (正会員)

せん断による変形角 $R_y$ 、主筋の抜け出しによる変形角 $R_x$ を用いて式(1)で表せる。

$$R_y = R_b + R_s + R_x \quad (1)$$

また、 $R_b$ 、 $R_s$ 、 $R_x$ は式(2)～式(4)で表せる<sup>9)</sup>。

$$R_b = \frac{1}{3} \phi_y L \quad (2)$$

$$R_s = \frac{\kappa Q}{\beta_s GA} \quad (3)$$

$$R_x = \frac{L_p}{j} = \frac{\varepsilon_y d_p}{2j} \quad (4)$$

ここで、 $\phi_y$ は降伏時の曲率、 $L$ は部材の長さ、 $Q$ は降伏時のせん断力、 $G$ はせん断弾性係数、 $A$ は部材の断面積、 $L_p$ は鉄筋の抜け出し長さ、 $\varepsilon_y$ は主筋の降伏ひずみ、 $d_p$ は主筋の定着長、 $j$ は応力中心間距離である。また、矩形断面での形状係数 $\kappa$ は1.5と仮定し、せん断ひび割れによる剛性低下率 $\beta_s$ は1/3と仮定する。

## 2.2 データベースの概要

上記の算定式を検証するために、1980年から2013年の間に日本国内に発表された論文の内、曲げ降伏を生じた梁柱部材の実験データから有用なデータを収集した<sup>7)</sup>。なお、次に該当する試験体は検討から除外した。(1)論文に梁、柱断面、鉄筋量、軸力比、コンクリート強度など必要なデータの記述がない試験体。(2)梁の場合はスラブ、柱の場合は袖壁を有する試験体。(3)高強度鉄筋(490N/mm<sup>2</sup>以上)および高強度コンクリート(60N/mm<sup>2</sup>以上)を用いている試験体。(4)変形角1/50で、まだ降伏

点に達していない試験体。これらの条件により、検討に用いた試験体は梁79体と柱360体である。また、楠<sup>8)</sup>が提案した方法を用いて論文に掲載された荷重-変形曲線を三折れ線にモデル化し、第二折れ点の変形を降伏変形角の実験値と定義した。データベースを用いた具体的な手順を下記で示す:(1)論文中に示された荷重-変形骨格曲線を変形角1/50 radまでデジタル化する。(2)ステップ(1)により得られた骨格曲線のデータを、変位を200等分したデータに変換する。(3)荷重-変形曲線を三折れ線モデル化し、第二折れ点の変位を降伏変位とする。

以上より採用した試験体の一部を表-1に示す。また、表-1における各変形成分 $R_b$ 、 $R_s$ 、 $R_x$ の値は式(2)～式(4)で算出した。本論文の検討においては、これらのデータベースを使った。

## 3. 降伏変形角の数理モデル

### 3.1 力学モデルによる各変形成分の関係

式(1)より、降伏変形角の提案式は式(5)で表せる。

$$R_y = R_b + R_s + R_x = \left(1 + \frac{R_s}{R_b} + \frac{R_x}{R_b}\right) R_b \quad (5)$$

ここでは力学モデルを用い、 $R_b/R_s$ 、 $R_b/R_x$ の簡略式を提案する。

#### (1) 曲げ変形角 $R_b$ とせん断変形角 $R_s$

降伏時の断面の曲率 $\phi_y$ とせん断力 $Q$ の関係により、式(2)に示す曲げ変形成分 $R_b$ は式(6)で計算できる。

表-1 採用した梁、柱試験体一覧表(一部)

通し番号	断面 b×D (mm×mm)	コンクリート強度 (N/mm <sup>2</sup> )	鉄筋降伏強度 (N/mm <sup>2</sup> )	軸力比	シアスパン比	引張鉄筋比	加力形式	降伏点荷重 (kN)	降伏変形角の実験値 (%)	式(2)による $R_b$ (%)	式(3)による $R_s$ (%)	式(4)による $R_x$ (%)
梁-1	100×300	18.14	318	0	1	0.88%	両端固定	57.92	0.48	0.10	0.09	0.16
梁-2	100×300	18.14	318	0	1	0.88%	両端固定	50.75	0.31	0.10	0.08	0.16
梁-3	200×400	30.89	426	0	2	1.77%	両端固定	229.10	0.85	0.28	0.11	0.28
梁-4	250×350	34.91	397	0	2.01	1.30%	片持ち	195.40	0.49	0.26	0.08	0.29
梁-5	200×200	33.05	360	0	2.5	0.59%	両端固定	27.90	0.48	0.29	0.03	0.23
柱-1	310×310	45.47	438	0.28	2.4	1.24%	両端固定	315.38	0.54	0.34	0.11	0.31
柱-2	310×310	45.47	438	0.8	2.4	1.24%	両端固定	341.75	0.63	0.34	0.12	0.33
柱-3	310×310	45.47	438	0.61	2.4	1.93%	両端固定	373.37	0.65	0.34	0.13	0.38
柱-4	310×310	45.47	438	0.61	2.4	1.93%	両端固定	391.01	0.85	0.34	0.14	0.42
柱-5	317×317	59.29	433	0.22	2.37	1.19%	両端固定	600.85	1.07	0.33	0.19	0.30
柱-6	317×317	59.29	433	0.22	2.37	1.19%	両端固定	645.36	0.41	0.33	0.20	0.30
柱-7	317×317	59.29	433	0.46	2.37	1.19%	両端固定	710.63	0.31	0.33	0.22	0.30
柱-8	450×450	29.30	485	0.33	2	0.84%	両端固定	536.45	0.67	0.32	0.11	0.34
柱-9	300×300	29.56	427	0.18	2	1.89%	両端固定	305.64	1.35	0.28	0.13	0.50
柱-10	450×450	30.38	485	0	2	0.84%	両端固定	323.54	0.68	0.32	0.06	0.34
柱-11	450×450	30.87	485	0.17	2	0.84%	両端固定	506.15	0.50	0.32	0.10	0.34
柱-12	300×300	31.71	427	0.33	2	1.89%	両端固定	309.90	1.04	0.28	0.13	0.50
柱-13	300×300	31.98	427	0.49	2	1.89%	両端固定	361.05	1.72	0.28	0.16	0.50
柱-14	250×250	32.34	444	0	2.5	1.29%	片持ち	119.51	0.85	0.36	0.07	0.58
柱-15	450×450	32.54	485	-0.1	2	0.84%	両端固定	221.08	0.51	0.32	0.04	0.34

$$R_b = \frac{1}{3} \phi_y L = \frac{1}{3} \frac{QL}{EI} L = \frac{QL^2}{3EI} \quad (6)$$

ここで、 $E$  は部材のヤング係数、 $I$  は断面二次モーメントである。

式(3)について、せん断弾性係数  $G$  は、弾性論により、部材のヤング係数  $E$  を用いて表せる。従って、せん断変形成分  $R_s$  は式(7)で表せる。

$$R_s = \frac{\kappa Q}{\beta_s GA} = \frac{2(1+\nu)\kappa Q}{\beta_s EA} \quad (7)$$

ここで、 $\nu$  はポアソン比である。

式(6)と式(7)より、式(8)が得られる。

$$\frac{R_s}{R_b} = \frac{2(1+\nu)\kappa Q}{\beta_s EA} \cdot \frac{3EI}{QL^2} = \frac{(1+\nu)\kappa}{2\beta_s} \cdot \frac{D^2}{L^2} \quad (8)$$

式(8)中の  $(1+\nu)\kappa/2\beta_s$  は部材の材料特性に関わる式であるが、すべての試験体に対して同じ数値となるため、この部分を定数とみなすことができる。曲げ変形成分  $R_b$  とせん断変形成分  $R_s$  の関係式は式(9)に示す。

$$\frac{R_s}{R_b} \propto \frac{1}{a^2} \quad (9)$$

ここで、 $a$  はシアスパン比  $L/D$  である。

### (2) 曲げ変形角 $R_b$ と抜け出しによる変形角 $R_x$

抜け出しによる変形角  $R_x$  は、図-3 に示すように、せん断力  $Q$  による剛体回転により生じる。引張鉄筋の軸力  $T$  は式(10)で表せる。

$$T = \frac{QL}{j} \quad (10)$$

この時の鉄筋のひずみは式(11)で計算させる。ここで、 $E_s$  は鉄筋のヤング係数、 $A_{st}$  は引張鉄筋の断面積である。

$$\varepsilon_y = \frac{T}{E_s A_{st}} = \frac{QL}{E_s A_{st} j} \quad (11)$$

従って、抜け出しによる変形角  $R_x$  は式(12)で計算できる。

$$R_x = \frac{L_p}{j} = \frac{\varepsilon_y d_p}{2j} = \frac{QL d_p}{2E_s A_{st} j^2} \quad (12)$$

$j = \gamma D$  とおくと、 $R_x/R_b$  は式(13)で表せる。

$$\frac{R_x}{R_b} = \frac{QL d_p}{2E_s A_{st} j^2} \cdot \frac{3EI}{QL^2} = \frac{d_p EB}{8\gamma^2 E_s A_{st}} \cdot \frac{D}{L} \quad (13)$$

ここで、式(9)と式の形をそろえるために、他の因子が与える影響を定数に近似し、 $R_x/R_b$  とシアスパン比の関係式を式(14)のように仮定する。

$$\frac{R_x}{R_b} \propto \frac{1}{a} \quad (14)$$

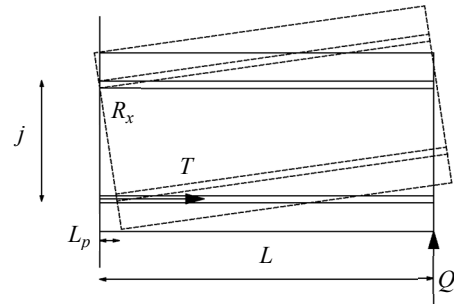


図-3 抜け出しによる変形角

2. で示した梁と柱のデータベースを用いて、 $R_b/R_s$ 、 $R_b/R_x$  とシアスパン比の関係について式(9)と式(14)に示すモデルで回帰分析を行った。その結果を図-4 と図-5 に示す。また、 $R_b/R_s$ 、 $R_b/R_x$  とシアスパン比の関係式が以下に得られた。

$$\frac{R_b}{R_s} = 0.5204a^2, \quad \frac{R_b}{R_x} = 0.4583a$$

それぞれの決定係数  $R^2$  は 0.6256 と 0.5439 である。ここで、決定係数  $R^2$  は残差の二乗和を実際のデータの平均からの偏差の二乗和で割ったものを 1 から引いた値であり、 $R^2=1$  の場合に回帰式が実際のデータと完全に一致し、 $R^2=0$  の場合に回帰式が実際のデータに全く無関係であることを示す係数である。

この時、式(5)に示した降伏変形角は式(15)で表せる。

$$R_y = \left(1 + \frac{1}{0.5204a^2} + \frac{1}{0.4583a}\right) R_b \quad (15)$$

### 3.2 降伏変形角の数理モデル

上記の分析より、力学モデルを考えずに、単純に数理統計の手法で、式(5)に示す  $R_s/R_b + R_x/R_b$  はシアスパン比

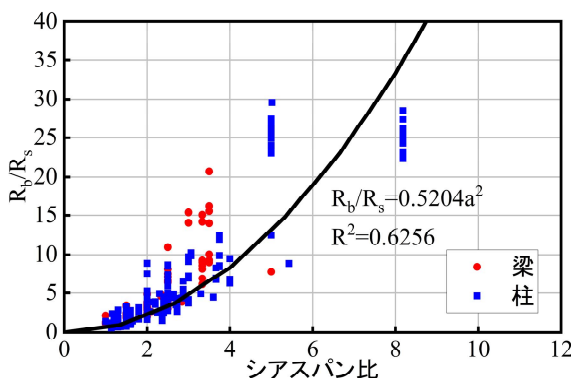


図-4  $R_b/R_s$  とシアスパン比の関係

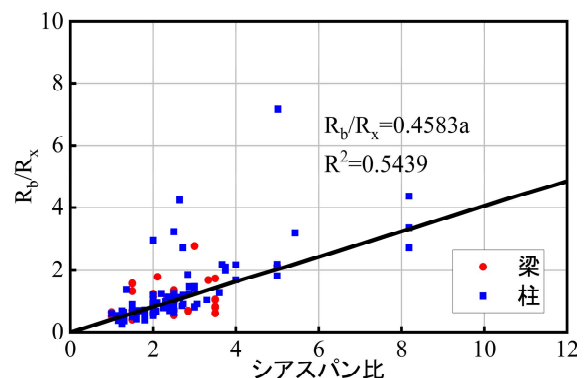


図-5  $R_b/R_x$  とシアスパン比の関係

$a$ の関数 $f(a)$ と仮定し、式(5)に示した降伏変形角は式(16)で表せる。

$$R_y = [1 + f(a)]R_b \quad (16)$$

ここで、 $f$ はシアスパン比 $a$ を変数とする関数である。

式(16)において、関数 $f(a)$ のモデルについて、本論文では、表-2に示す5つの関数モデルを用いて検討する。

表-2 各部変形角とシアスパン比の関数モデル

(1)一次関数 $ax$ 形	$f(a) = C_1 \frac{1}{a}$
(2)一次関数 $ax+b$ 形	$f(a) = C_1 \frac{1}{a} + C_2$
(3)二次関数 $ax^2$ 形	$f(a) = C_1 \frac{1}{a^2}$
(4)二次関数 $ax^2+bx$ 形	$f(a) = C_1 \frac{1}{a^2} + C_2 \frac{1}{a}$
(5)二次関数 $ax^2+bx+c$ 形	$f(a) = C_1 \frac{1}{a^2} + C_2 \frac{1}{a} + C_3$

表-2に示す定数 $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ については、データベースによる回帰分析で決めることができる。

式(15)では力学モデルに基づき、 $R_b/R_s$ 、 $R_b/R_x$ とシアスパン比の関係をそれぞれ求め、係数を定めるが、二次関数 $ax^2+bx$ 形における定数 $C_1$ 、 $C_2$ は純粋な統計分析から定める。そのため、式(15)と表-2に示す二次関数 $ax^2+bx$ は数式の形は同じだが、実際には異なるモデルである。

## 4. 検証結果

### 4.1 数理モデルにおける定数の回帰分析結果

梁と柱のデータベースを用いた回帰分析により求めた表-2における定数 $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ を表-3に示す。

表-3 回帰分析結果一覧表

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$R^2$
(1) $ax$ 形	3.361	-	-	0.701
(2) $ax+b$ 形	3.932	-0.3151	-	0.718
(3) $ax^2$ 形	5.267	-	-	0.462
(4) $ax^2+bx$ 形	0.9396	2.796	-	0.712
(5) $ax^2+bx+c$ 形	-0.3644	4.307	-0.402	0.717

表-3より、決定係数 $R^2$ は $ax^2$ 形で最も低く、このモデルは実験データと離れているため適さない。 $ax^2+bx+c$ 形と $ax+b$ 形の決定係数 $R^2$ は最も大きく、他のモデルより実験データに当てはまる。そのため、回帰分析結果より、

$ax^2+bx+c$ 形と $ax+b$ 形のモデルの適合性が高いと考えられる。

### 4.2 データベースによる比較結果

2.で示したデータベースを用い、式(15)と表-2に示した各モデルによる計算値の精度を検証する。式(15)による計算結果を図-7に示し、表-2に示した一次関数 $ax$ 形による計算結果を図-8に示す。参考のため、変形分離による式(1)と菅野式による計算結果を併せて図-6と図-9に示している。また、実験値/各提案式による計算値を表-4に示す。

表-4 降伏変形角の実験値/計算値の結果一覧表

検証方法	平均値	標準偏差	±30%以内の割合
式(15)	1.002	0.340	64.9%
$ax$ 形	0.980	0.341	65.6%
$ax+b$ 形	1.000	0.340	64.1%
$ax^2$ 形	1.116	0.387	62.6%
$ax^2+bx$ 形	0.992	0.339	65.1%
$ax^2+bx+c$ 形	1.001	0.341	64.5%
式(1)	1.003	0.330	68.6%
菅野式	1.193	0.557	49.0%

各数理モデルによる計算結果を詳細に比較すると、平均値と標準偏差から、二次関数 $ax^2$ 形では平均値が大きく、±30%以内の割合が小さいため、誤差が大きくなったと言える。 $ax^2+bx$ 形による計算結果は $ax^2+bx+c$ 形の結果とほぼ同じく、 $ax^2$ 形より実験値との整合が良くなったと考えられる。また、一次関数 $ax$ 形による計算結果は $ax+b$ 形の結果とほぼ同じで、特に、 $ax+b$ 形の結果は実験値と最も近い。 $ax+b$ 形では、 $ax$ 形を定数 $b$ を用いて修正することとなり、平均値は1に近くっており、式(1)による結果と近くなった。表-3に示す回帰分析結果と併せて考えると、 $ax^2$ 形の決定係数 $R^2$ は小さく、モデルの適合性が低いため、誤差が大きくなったと考えられる。また、回帰分析結果より、 $ax^2+bx+c$ 形と $ax+b$ 形の決定係数 $R^2$ は最も良く、この二つのモデルにおける計算結果は実験値と良い整合性を示した。以上の分析により、式(15)の代わりに、一次関数 $ax+b$ 形および二次関数 $ax^2+bx+c$ 形を用いることが可能である。

式(15)と式(1)の計算結果を比較すると、表-4より平均値と標準偏差はそれぞれほぼ同じとなったことが分かる。さらに図-6と図-7を比較すると、各試験体による計算結果は近いいため、簡略化された式(15)を使用しても問題がないと考えられる。

表-4より、式(15)と表-2に示した一次関数 $ax$ 形によ

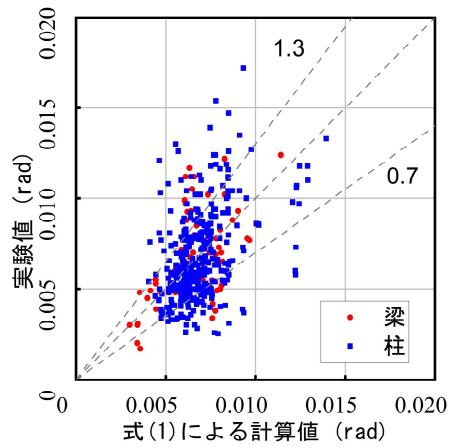


図-6 式(1)による計算値と実験値の比較

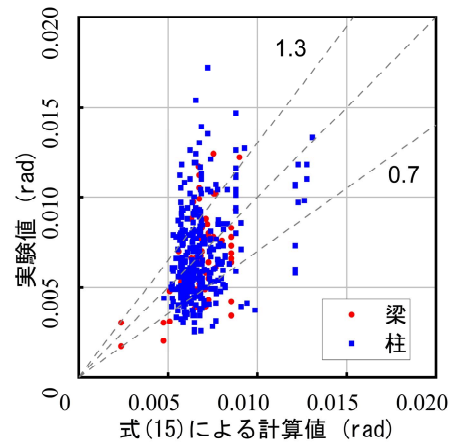


図-7 式(15)による計算値と実験値の比較

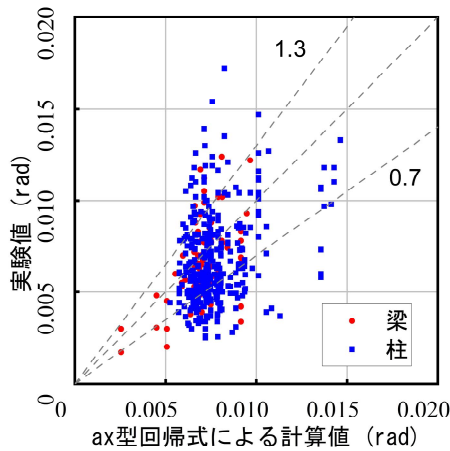


図-8 ax型回帰式による計算値と実験値の比較

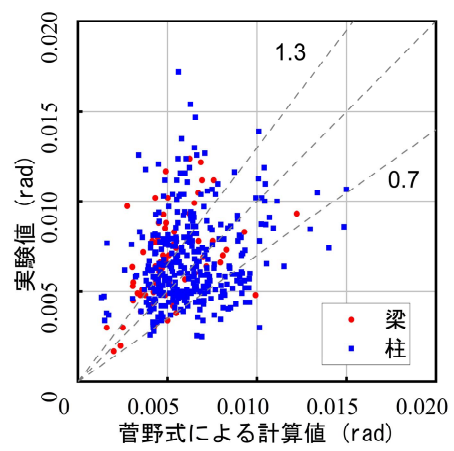


図-9 菅野式による計算値と実験値の比較

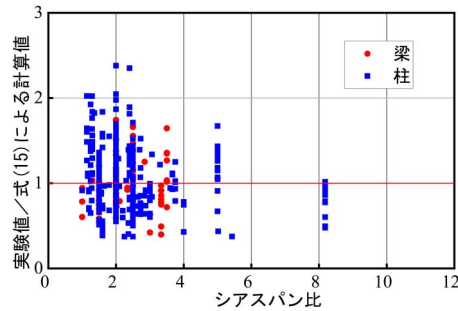


図-10 シアスパン比—実験値/計算値関係

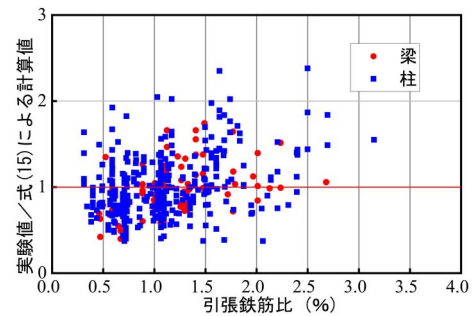


図-11 引張鉄筋比—実験値/計算値関係

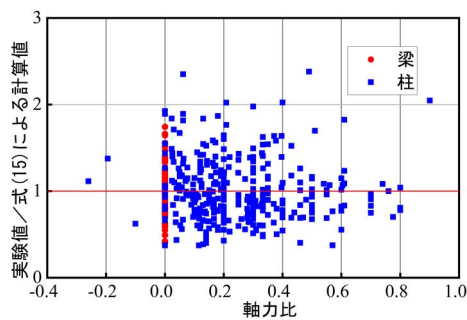


図-12 軸力比—実験値/計算値関係

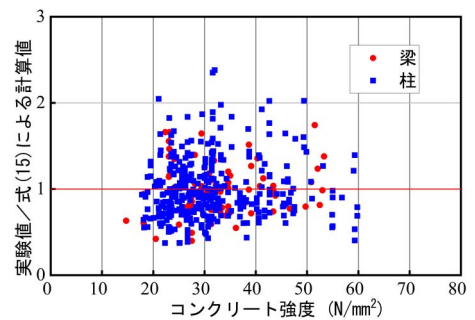


図-13 コンクリート強度—実験値/計算値関係

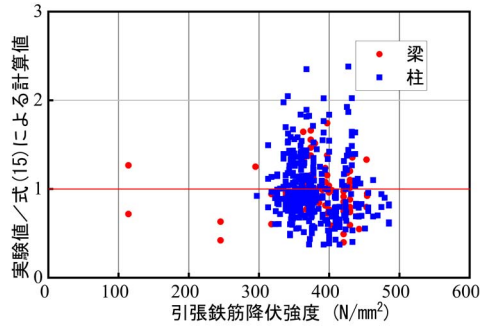


図-14 引張鉄筋降伏強度—実験値／計算値関係

る計算結果を比較すると、式(15)と $ax$ 形の実験値／計算値の結果は近いことが分かる。算定式の簡略化を考えると、式(15)に示した計算式は一次関数 $ax$ 形のモデルを用いてさらに簡略化できる。

図-9に示すように菅野式による計算結果は式(1)と比較すると、菅野式による計算結果のばらつきが大きくなっており、表-4でも本論文に提案した式(15)は菅野式より良い整合性を示した。

#### 4.3 実験値／計算値の影響因子分析

降伏変形角の実験値／計算値(式(15))とシアスパン比、引張鉄筋比、軸力比、コンクリート強度および引張鉄筋降伏強度の関係を図-10～図-14に示す。

コンクリート強度は、高強度化に伴い、実験値／計算値(式(15))はやや減少する傾向が見られた。他の因子については、明確な相関は見られなかった。また、シアスパン比が3~10の場合と引張鉄筋降伏強度が300N/mm<sup>2</sup>以下となる場合のデータは少ないため、今後はさらに多くの実験データベースを用いて検証する必要がある。

#### 5. まとめ

本検討はRC造部材降伏変形角の計算方法について、変形分離の原理に基づき、簡略式を提案するために、各変形成分の関係を分析した。得られた結果を以下にまとめる。

(1)提案式を検証するために、過去の論文に基づき、梁、柱部材の実験データベースを整備した。論文に掲載された荷重—変形曲線をデジタル化し、三折れ線モデル化して実験による降伏点を定義した。

(2)降伏変形角の計算について、変形分離の原理に基づき、力学モデルの手法で、 $R_b/R_s$ 、 $R_b/R_x$ とシアスパン比の理論式を導出した。

(3)変形分離による計算式の实用性を向上するため、上記(1)の理論式を簡略化した式を提案した。また、数理統

計の手法を用いて、さらに簡略な統計式を提案した。また、実験データベースを用いて、これらの提案式の精度を検証し、実験値との整合が良いことが分かった。

(4)影響因子の分析結果より、シアスパン比、引張鉄筋比、軸力比および引張鉄筋降伏強度と実験値／計算値に明確な相関は見られなかったが、コンクリート強度は、高強度化に伴い、実験値／計算値は減少する傾向を示した。

今後はさらに多くの実験データベースを用いて検証する必要がある。

#### 謝辞

本研究は国土交通省平成30年度建築基準整備促進事業「鉄筋コンクリート造の限界耐力計算における応答変位の算定精度向上に向けた建築物の振動減衰性状の評価方法の検討」(調査番号S30)の助成を受けて実施した。関係者各位に謝意を表します。

#### 参考文献

- 1) 国土交通省国土技術政策総合建築研究所他：2015年版 建築物の構造関係技術基準解説書，2015
- 2) 菅野 俊介：鉄筋コンクリート造部材の復元力特性に関する研究，コンクリートジャーナル，Vol.11，No.2，pp.1-9，1973.2
- 3) 申 範昊，壁谷澤 寿海：高強度材料を使用したRC梁部材の復元力特性に関する研究，構造工学論文集，Vol.40B，pp.315-322，1994.3
- 4) 長崎 充，渡辺 達也，前田 匡樹：鉄筋コンクリート梁・柱部材の降伏変形評価法，コンクリート工学年次論文報告集，Vol.18，No.2，pp.797-802，1996
- 5) 姜 柱，北山 和宏：鉄筋コンクリート梁の降伏変形推定方法，日本建築学会構造系論文集，Vol.62，No.501，pp.85-92，1997.11
- 6) 王 澤霖他：RC造建物の振動減衰性状評価方法の検討 その7 変形分離によるRC造梁に関する降伏変形角の新しい計算方法とその精度，日本建築学会大会学術講演梗概集(北陸)，pp.635-636，2019.9
- 7) 向井 智久他：建築研究所資料 実験データベースを用いた鉄筋コンクリート造部材の構造特性評価式の検証，国立研究開発法人 建築研究所，2016.11
- 8) 楠 浩一：加速度記録により求めたR/C造建物の性能曲線のための外挿法に関する研究，日本建築学会構造系論文集，Vol.84，No.761，pp.961-971，2019.7