

# [136] 修正された二次元ハイブリッドストレスモデルによる 鉄筋コンクリート構造物の非線形解析

正会員 伊良波 繁雄 (琉球大学工学部)

## 1. はじめに

構造物の離散化極限解析法の一つとして剛体バネモデル<sup>1)</sup>、ハイブリッドストレスモデル<sup>1)</sup>等のように要素境界のみで破壊(すべり、引張、圧縮)を考慮する方法がある。このような解析法による地盤、梁、板等の極限解析は、すでに大きな成果を上げているが、鉄筋コンクリート構造物の解析<sup>2), 3)</sup>への応用はまだ始まったばかりである。前報<sup>3)</sup>では、応力パラメータが7個、要素境界の変位パラメータから3個のハイブリッドストレスモデル(以後モデル-1とする)を鉄筋コンクリートはりの極限解析に応用した。モデル-1は「要素境界の応力の精度は良いが、要素の内部応力および変位の精度は低い。」と云う特性がある。コンクリートは低いレベルの応力状態から非線形性を示し、また、二軸圧縮応力によって破壊荷重が増加することを考えれば、要素内の応力や変形の精度の改善が必要となる。このために、応力パラメータと要素境界の変位パラメータを増して、数値計算を行ったところ、応力パラメータが12個、要素境界の変位パラメータが4個のモデル(以後モデル-2とする)は要素内の応力および変位についても、良い精度を示すことが解った<sup>4)</sup>。本報告ではモデル-2を用いて鉄筋コンクリートはりの極限解析を行っている。なお、コンクリートのモデル化としては、要素内で二軸圧縮の影響を考慮するためにGerstleの構成式<sup>5)</sup>を仮定し、要素境界ですべり破壊と引張破壊を仮定している。

## 2. 解析手法

ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理は<sup>6)</sup>

$$\Pi_{CH} = \sum \{ \int \int_{\Omega} u_n B(\sigma_{ij}) dx dy - \int_{\partial \Omega} u_n u_i T_i dS + \int \int_{\Omega} \sigma_n u_i \bar{T}_i dS \} \dots (1)$$

で与えられる。ここで  $B(\sigma_{ij})$ : コンプリメンタリエネルギー、 $u_i$ : 変位、 $u_n$ : 要素の体積、 $\partial \Omega$ : 要素の境界、 $\sigma_{ij}$ : 応力、 $T_i = \sigma_{ij} n_j$ 、 $s_n$ : 力学的境界、 $n_j$ : 方向余弦、 $\bar{T}_i$ : 外力、 $\Sigma$ : 要素全部の和を意味する。図-1に示すように 全体座標系を  $x, y$  軸とし、局部座標系  $n, s$  を要素境界ごとに仮定すれば変位、応力について、それぞれ次式が成立する。

$$u_x = l U - m V, \quad u_y = m U + l V \quad \dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x l^2 + 2\tau_{xy} l m + \sigma_y m^2 \\ \sigma_s &= \sigma_x m^2 + \sigma_y l^2 - 2\tau_{xy} l m \\ \tau_{ns} &= -(\sigma_x - \sigma_y) l m + \tau_{xy} (l^2 - m^2) \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

ここで、 $l, m$ は方向余弦、 $u_x, u_y$ はそれぞれ  $x, y$  方向の変位である。 $U, V$ はそれぞれ要素境界の  $n$  方向、 $s$  方向の変位を示す。式(2)、(3)を用いて、式(1)の要素境界積分を交換すると次式ようになる。

$$\Pi_{CH} = \sum [ \int \int_{\Omega} u_n B(\sigma_{ij}) dx dy - \int_{\partial \Omega} u_n (U \sigma_n + V \tau_{ns}) ds + \int \int_{\Omega} \sigma_n (U \bar{\sigma}_n + V \bar{\tau}_{ns}) ds ] \quad \dots (4)$$

つぎに、図-2に示すように、要素境界にすべり破壊が生じている場合を考える。この時、すべり面においてはモール・クーロンの式を満足させる必要がある。このために、ラグランジェの未定乗数法を用いる。すなわち

$$\Pi^*_{CH} = \Pi_{CH} - \int_{s_s} \Gamma (\tau_{ns} \pm C_2 \sigma_n) ds \quad \dots (5)$$

となる。ここで、 $s_s$ はすべり面、 $\Gamma$ はラグランジェの未定乗数を意味する。式(5)では簡単のために、増分記号 $\Delta$ を省略して示した。なお、式(5)の付帯条件式は

$$\sigma_{i,j,j} = 0: V_n \text{ 内}, \quad U = \bar{U}, \quad V = \bar{V}: S_U \text{ 上}, \quad V = 0: S_s \text{ 上} \quad \dots (6)$$

である。剛性マトリックスを導くため、応力場、変位場、ラグランジェの未定乗数 $\Gamma$ を次式のように仮定する。

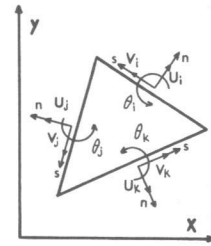


図-1 二次元ハイブリッドストレスモデル

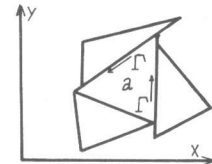


図-2 要素aの境界の破壊状況

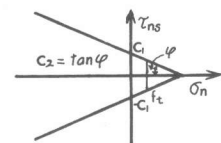


図-3 モールクーロンの降伏条件

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \beta_1 + y \beta_4 + x \beta_6 + y^2 \beta_8 + x^2 \beta_{10} + 2xy \beta_{11} \\ \sigma_y &= \beta_2 + x \beta_5 + y \beta_7 + x^2 \beta_9 + y^2 \beta_{10} + 2xy \beta_{12} \\ \tau_{xy} &= \beta_3 - y \beta_6 - x \beta_7 - 2xy \beta_{10} - y^2 \beta_{11} - x^2 \beta_{12} \end{aligned} \right\} \dots\dots(7)$$

$$U = u_i - \theta_i S, \quad V = v_i - \varepsilon_i S \quad \dots\dots(8)$$

$$\Gamma = \Gamma_{v_i} - \Gamma_{\varepsilon_i} S \quad \dots\dots(9)$$

式(8)で $u_i$ 、 $v_i$ 、 $\theta_i$ は図-1に示すように節点*i*の変位であるが、 $\varepsilon_i$ は*i*点での要素境界に平行な方向のひずみを意味している。なお、 $S$ は図-1に示すように、局所座標系の原点からの距離である。式(7)、(8)、(9)を式(5)に代入し、応力パラメータと変位パラメータおよびラグランジェの未定乗数について、停留条件を求めれば剛性マトリックスが得られる。引張破壊とすべり破壊を同時に考慮する方法は前報<sup>3)</sup>に示してあるのでここでは省略する。なお、荷重増分法としては山田の方法を用いて行い、この時、コンクリートの応力-ひずみ関係式はGerstleの構成式を仮定している。

### 3・材料のモデル化

鉄筋の応力-ひずみ関係は図-4に示すように、完全弾塑性体を仮定する。鉄筋は三角形要素で表しているために、せん断力の伝達が可能である。鉄筋とコンクリートの付着は完全付着とする。コンクリートの破壊としては図-3に示すように、要素境界で引張破壊およびすべり破壊を仮定し、すべり破壊の条件式として

$$\tau_{ns} = \tan 37^\circ \sigma_n + 0.249 f_c \quad \dots\dots(10)$$

を仮定する。ここで $f_c$ はコンクリートの一軸圧縮強度である。コンクリートの引張破壊による応力解放は考慮しているが、ひび割れ面でのせん断力の伝達は無視している。つぎに、コンクリートの応力-ひずみ関係式としては二軸圧縮の影響を考慮するためにGerstleの構成式を用いている。

### 4・数値計算例

#### 4-1 コンクリート板の二軸圧縮

コンクリートの応力-ひずみ関係式として、Gerstleの構成式を用いた時の解析結果と実験結果を比較した。解析モデルは図-6に示すような正方形板で応力比 $\alpha = \sigma_2 / \sigma_1$ は0/3、1/3、2/3、3/3の4ケースである。二軸強度包絡線としてはKupferとGerstle<sup>7)</sup>によって提案された破壊包絡線を用いている。実験値はブラシ型加圧盤を用いたミュンヘン工科大学の二軸試験結果である。各応力比での最大圧縮強度は図-5に示す。また、各応力比での応力-ひずみ曲線( $\sigma_1$ と $\varepsilon_1$ )は図-7に示す。なお、破壊包絡線は一軸圧縮強度が一致するように決めてあるので、図-5に示すように $\alpha = 0/3$ 、 $3/3$ の時は良く一致しているが $\alpha = 1/3$ 、 $2/3$ の時は実験値よりも低目になっている。要素分割は図-6に示してあるが、計算では対称性を利用して1/4のみを用いて、荷重増分法で行っている。

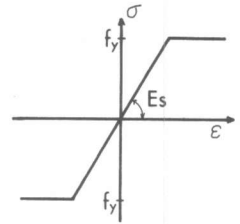


図-4 鉄筋の応力-ひずみ関係

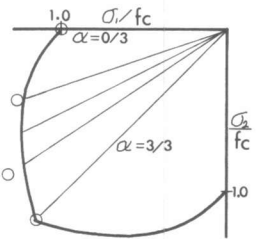


図-5 二軸強度包絡線

$2G_0 = 4.21 \times 10^3 \text{ ksi}$   
 $3K_0 = 8.79 \times 10^3 \text{ ksi}$   
 $f_c = 4.45 \text{ ksi}$

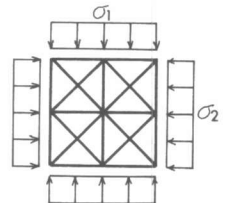


図-6 解析モデル

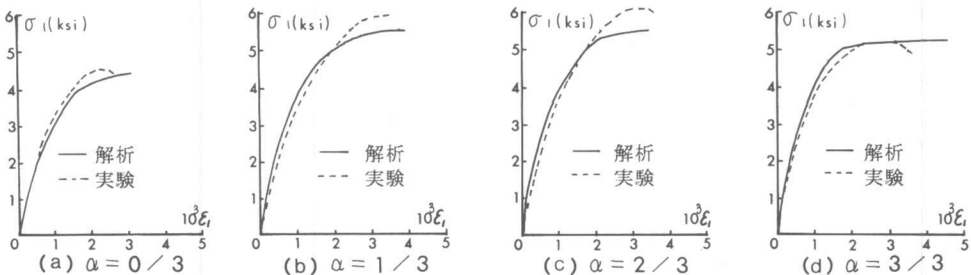


図-7 二軸圧縮試験と解析結果の比較

なお、計算の目的が、要素内でGerstleの構成式を用いたときの理論値と実験値の比較であるので、要素境界でのすべり破壊は考慮してない。

解析結果の応力 ( $\sigma_1$ ) とひずみ ( $\epsilon_1$ ) 曲線を図-7に示した。 $\alpha = 0/3$ 、 $3/3$  の場合は実験結果と大体一致している。 $\alpha = 1/3$ 、 $2/3$  の場合は低応力状態では実験値と一致しているが、破壊荷重付近では、実験値よりも、かなり低目となっている。これは、前に述べたように、 $\alpha = 1/3$ 、 $2/3$  での実験値をKupferとGerstleの破壊包絡線で近似した時に、かなり低目になったためである。

#### 4・2 腹鉄筋のないはりの解析

試験体は断面が20cm×10cm、せん断スパン比が3.5のせん断補強筋のない矩形はり(JCI選定試験体)<sup>9)</sup>である。実験では4.7tonの時に斜めひびわれが発生し、急激な破壊を起こしている。要素分割は図-8に示すように載荷点から支点方向に向かう斜めひびわれが表せるように分割してある。図-9はスパン中央の変位と荷重の関係を示している。計算によって求められた変位は実験値よりも小さく、最高荷重も多少高目になっているが、最高荷重に達した後で急激に荷重の低下を起こしており、実験と同じ傾向を示している。次に、荷重段階ごとのひびわれ状況を図-10に示した。(a)は荷重が1.72tonの時のひびわれ状況を示している。この段階では、曲げひびわれだけが生じている。(b)は曲げひびわれが発達し斜め方向にひびわれが曲がり、ついで、腹部中央のA点にひびわれが発生したところであり、この状態で最高荷重になっている。(c)はA点のひびわれの応力解放によって、はりが破壊した時のひびわれ図である。つぎに、図-10-CのB点の位置の軸力の変化を表したものが図-11である。B点のかぶりコンクリートに曲げひびわれが発生した時の荷重が3.7tonである。この曲げひびわれによって、軸力が約64kg/cm<sup>2</sup>の増加がある。つぎに、荷重が増加し、はり腹部に発生した斜めひびわれがB点に達した時に、急激に鉄筋の軸力の増加を起こし、ついで、軸力の減少が起こっている。軸力の急激な増加および減少は、斜めひびわれの応力解放の途中なので、軸力が1020kg/cm<sup>2</sup>に達するのも、瞬間的なものである。

#### 4・3 コーベルの解析

原・北田<sup>9)</sup>によって行われた実験のうち、 $a/d = 0.3$ 、 $P_{st} = 0.85\%$ の試験体の解析例を示す。要素分割は図-12に示すように、引張鉄筋と柱部材の主筋のみを考慮し他の鉄筋は無視した。解析は要素内でGerstleの構成式を用いた時の効果を見るために、要素内を弾性体とする解析も行った。図-13には、荷重-たわみ曲線を示してあるが、両者を比較すると、2.2ton付近までは応力が小さいので差はない。しかし荷重が増加するにつれ、変位の差が大きくなっている。要素内を弾性体とする方法では、最大荷重(44.0ton)に達した後に変形が増加しているのに対し、要素内でGerstleの構成式を用いたモデルでは40tonぐらいから変形が急増し、最大荷重

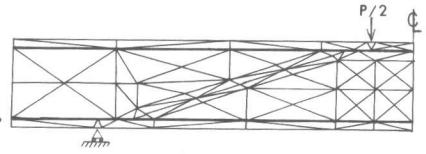


図-8 要素分割

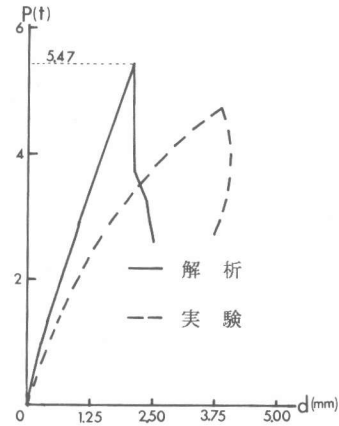


図-9 荷重-たわみ関係

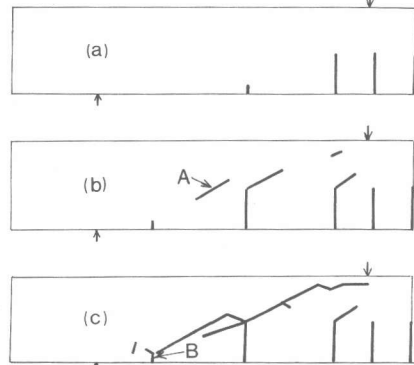


図-10 ひびわれ状況

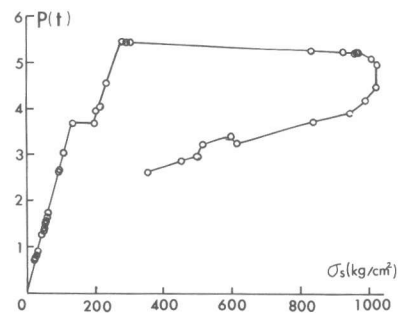


図-11 荷重と鉄筋軸力の関係

は42.6 ton となった。また、両者の差は柱との結合部付近の鉄筋が降伏する時の荷重にも大きな影響を与える。すなわち、要素内を弾性体とするモデルでは荷重が43.0 ton で降伏しているのに対し、要素内でGerstle の構成式を仮定したモデルは39.5 ton で降伏し、しかも降伏以後の変形は急増している。つぎに、鉄筋が降伏した時のひびわれ図を図-14に示す。両者のひびわれ性状は少し違っているが、荷重は柱との結合部の鉄筋と片持ち部と柱の結合下部の圧縮力によって支えられていることがわかる。

### 5・むすび

ハイブリッドストレスモデルを用いて、鉄筋コンクリート構造物の極限解析を行った。このモデルによる腹鉄筋のない単純ばりの解析では、耐力は高目となっているが、最高荷重に達した後急激に破壊が起こっており、斜め引張破壊の特徴を良く表している。コーベルの解析では、要素内でGerstle の構成式を考慮に入れた場合と考慮に入れない場合の2ケースについて解析した。引張鉄筋の降伏は、Gerstle の構成式を考慮したものが、より早く降伏し、それ以後の変位も急増している。また、耐力もGerstle の構成式を考慮した方が少し低目となった。

最後に、本研究にあたり計算および作図に御助力いただいた本学部卒業生、梅木邦隆氏(梅木工務店)、川崎聡氏(沖繩総合事務局)に心から感謝の意を表します。

### 参考文献

- 1) 川井忠彦編：生研セミナーテキスト(物理モデルによる連続体力学の諸問題解析)、生産技術研究奨励会、1979。
- 2) 上田眞稔、毛井高博、川井忠彦：離散化極限解析法による鉄筋コンクリート構造物の非線形解析、RC構造の有限要素解析に関するコロキウム集、日本コンクリート工学協会論文集、PP179-186、1984
- 3) 伊良波繁雄：ハイブリッドストレスモデルによる鉄筋コンクリート構造物の非線形解析、第7回日本コンクリート工学年次講演会論文集、PP441-444、1985
- 4) 伊良波繁雄：修正されたハイブリッドストレスモデルによる非線形構造解析、構造工学論文集、Vol.32A、PP249-254、1986
- 5) Gerstle, K.H.: Simple Formulation of Biaxial Concrete Behavior, Journal of ACI, Vol.78, No.6, PP62-68, 1981
- 6) 鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論、コンピューターによる構造工学講座II-3-A、培風館(1972年)
- 7) Kupfer, H.B. and Gerstle, K.H.: Behavior of Concrete Under Biaxial Stresser, J. of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.99, No.EM4, Proc. Paper 9917, Aug, 1973, pp.852-866
- 8) 解析モデル検証用試験体の実験データ集、日本コンクリート工学協会、1983・10
- 9) 原 忠勝、北田勇輔：a/dの小さい鉄筋コンクリート片持部材のせん断破壊に関する実験検討、第5回日本コンクリート工学年次講演会論文集、PP353-356、1983

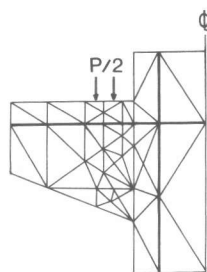


図-12 要素分割

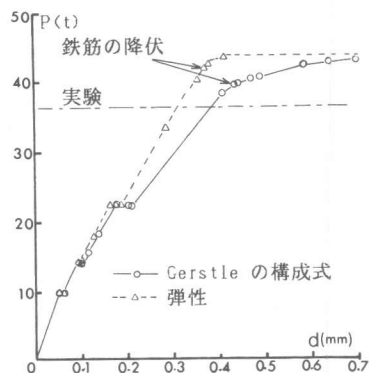
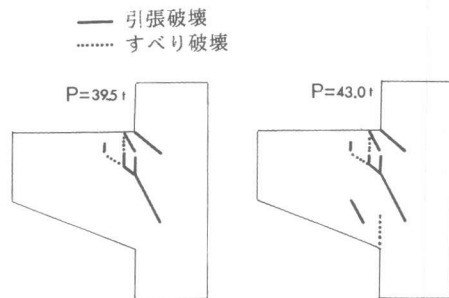


図-13 荷重-たわみ関係



(a) Gerstleの構成式 (b)弾性体

図-14 ひびわれ状況